

Nukleosynthese

A. Weiss (Max-Planck-Institut für Astrophysik, Garching, Germany)

2. März 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Element-Häufigkeiten	8
2.1	Definitionen und Relationen	8
2.1.1	Die solaren Häufigkeiten der Elemente	12
2.1.2	Meteoritenalter und Kosmochronologie	18
2.1.3	Kosmische Häufigkeiten	22
2.1.4	Die Elementmaschine Stern	24
2.1.5	Der kosmische Materiekreislauf	27
2.1.6	Primäre und sekundäre Elemente	29
3	Kernphysik	30
3.1	Grundlagen	30
3.1.1	Kernstruktur	30
3.1.2	Bindungsenergie und Massenformel	33
3.1.3	Stabilität	34
3.2	Kernreaktionen und -reaktionsraten	36
3.2.1	Kinematik und Energetik	36
3.2.2	Wirkungsquerschnitt und Reaktionsrate	37
3.2.3	Nicht-resonante Reaktionen und der quantenmechanische Wirkungsquerschnitt	40
3.2.4	Kernresonanzen	44
3.2.5	Elektronen-Abschirmung	46
3.2.6	Reaktionsgleichgewicht und Rückreaktion	48
3.2.7	Reaktionstypen	49
3.2.8	Reaktionsraten: Quellen	50
3.2.9	Reaktionsgleichungen	50
4	Elementsynthese im Urknall	52
4.1	Kosmologischer Hintergrund	52
4.1.1	Rotverschiebung	53
4.1.2	Der Urknall	54
4.1.3	Zum Gleichgewicht	54
4.1.4	Thermodynamik des expandierenden Universums	55
4.1.5	Expansionsgeschichte des frühen Universums	56
4.2	Die Nukleosynthese	60
4.3	Beobachtung der primordialen Häufigkeiten	61
4.3.1	^4He	62
4.3.2	Deuterium ^2H	62
4.3.3	^3He	63
4.3.4	^7Li	63
4.4	Vergleich zwischen Beobachtungen und Rechnungen	63

5	Hydrostatische Brennphasen in Sternen	67
5.1	Vorhauptreihe	67
5.1.1	Deuterium-Brennen	67
5.1.2	Die leichten Elemente Li, Be, B	67
5.2	Wasserstoff-Brennen	68
5.2.1	<i>pp</i> -Ketten	69
5.2.2	CNO-Zyklus	72
5.2.3	Das solare Neutrino-Problem	74
5.3	Helium-Brennen	79
5.3.1	Der 3- α -Prozess	80
5.3.2	α -Einfänge	82
5.3.3	Ablauf des Heliumbrennens	83
5.3.4	Weitere Nukleosynthese	84
5.4	Kohlenstoff-, Neon-, Sauerstoff-, Siliziumbrennen	85
5.4.1	Kohlenstoff-Brennen	85
5.4.2	Sauerstoff-Brennen	86
5.4.3	Neon- und Silizium-Brennen	87
5.4.4	Zusammenfassung	88
6	Nukleosynthese mit Neutronen	90
6.1	Der s-Prozess	91
6.1.1	Neutronenquellen	91
6.1.2	Wirkungsquerschnitte	91
6.1.3	Details der Synthese	93
6.1.4	Beobachtungen und Häufigkeiten von s-Prozess Elementen	94
6.2	Der r-Prozess	95
6.2.1	Ablauf	95
6.2.2	Astrophysikalische Quellen	96
6.3	Der p-Prozess	98
7	Explosive Nukleosynthese	100
7.1	Nukleares statistisches Gleichgewicht	100
7.2	Produktion der Eisengruppe	101

Kapitel 1

Einleitung

Gegenstand *Nukleosynthese* ist der Teil der Astrophysik, der sich mit der Herkunft, der Erzeugung, und auch der Verbreitung der chemischen Elemente im Universum beschäftigt. Man muss sich die grundlegende Tatsache vor Augen halten, dass *alle Atome unseres eigenen Körpers, aber auch die der Erde zu früheren Zeiten in Sternen erzeugt wurden*. Woher kamen die Bausteine, die dafür benötigt werden? Welche Elemente wurden wo erzeugt? Gibt es immer wiederkehrende Element-Verhältnisse? Wurden alle Elemente gleichzeitig erzeugt?

Der Teil der Physik, der die physikalischen Prozesse der Elemententstehung oder -umwandlung beschreibt, ist die *Kernphysik*. Sie befasst sich mit dem Aufbau der Atomkerne, ihren Bausteinen, ihrer Struktur, ihrer Stabilität, und den Wechselwirkungen zwischen den Bausteinen. Die Elektronenhülle, die mit dem Kern das Atom bildet und für elektrische Neutralität sorgt, ist Gegenstand der Atomphysik, und hier weitgehend ohne Interesse für uns. Die Bindungsenergie¹ der Elektronen ist von der Größenordnung

$$E_{\text{atom}} = \frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2 \approx 10 \text{ eV} \quad (1.1)$$

Dagegen sind die Bindungsenergien der Atomkerne von der Größenordnung

$$E_{\text{nuk}} = \eta(\alpha/2\pi)m_p c^2 \approx \eta \text{ 1MeV}, \quad (1.2)$$

wobei $\alpha = (e^2/hc) \approx 1/137$ die Feinstrukturkonstante ist ($e = \text{Ladungseinheit}$) und η ein Vorfaktor, der die quantenmechanischen Effekte (Tunneleffekt) symbolisieren soll.

Es ist also klar, dass wir im Universum nach Orten suchen müssen, an denen hohe Temperaturen von bis zu 10^{10} K herrschen müssen (tatsächlich ist diese Zahl um einen Faktor 10^2 bis 10^4 zu hoch), denn dort wird es möglich sein, die Atomkerne auf- oder umzubauen. Geeignete Bedingungen findet man vor allem in *Sternen* und ganz zu Beginn des Universums, im *Urknall*. Alternativ zu diesen thermischen Prozessen kann man allerdings auch nicht-thermische finden (“Beschleuniger”), in denen genügend hohe Energien erreicht werden. Das Interesse der Astrophysik richtet sich somit auf Orte, an denen Nukleosynthese stattfinden kann, die Bedingungen, die dort herrschen, und wie sie die Abfolge der Synthese beeinflussen, etc. Nukleosynthese kann man also nicht ohne Verständnis der *Orte der Nukleosynthese* betreiben, insbesondere, weil diese Orte während der Nukleosynthese veränderliche physikalische Bedingungen aufweisen können.

¹Energien werden in der Atom- und Kernphysik in eV angegeben; $1 \text{ eV} = 11605 \text{ K} = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$

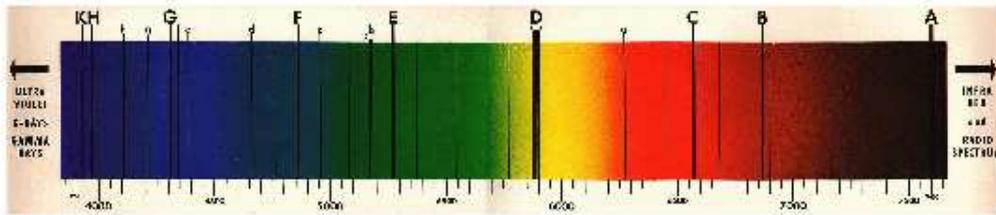


Abbildung 1.1: Absorptions-Spektrum der Sonne mit Fraunhofer-Linien

Wir werden daher in dieser Vorlesung folgende Themen betrachten müssen:

- Elementhäufigkeiten im Universum
- Beobachtungen, Spektralanalyse, Resultate
- Kernphysikalische Grundlagen
- Kernphysikalische Prozesse
- Kernsynthese im Urknall
- Kernsynthese in Sternen
 1. in ruhigen Brennphasen
 2. in Explosionen
- kosmische Strahlung
- Schlüsselemente
- Nukleosynthese und Energiegewinnung (Kernfusion)
- Die Sonne
- ...

Übersicht Wir werden uns zunächst mit den Elementhäufigkeiten im Universum und den *Beobachtungen* beschäftigen, die uns Aussagen darüber liefern. Generell kann die Häufigkeit eines chemischen Elements und auch seiner Isotope aus der *Spektralanalyse* des Lichts gewonnen werden. Dabei macht man sich die Eigenschaft der Atome zunutze, dass sie, je nach Temperatur und Dichte des Gases, und vor allem in Abhängigkeit von der Zahl der Atome einer Sorte, Licht bei festen Wellenlängen absorbieren. Ein kontinuierliches *Schwarzkörper-Spektrum* einer Hintergrundquelle zeigt somit dunkle Linien (‘‘Fraunhofer-Linien’’; s. Abb. 1.1) bei festen Wellenlängen, die das absorbierende Element charakterisieren. Die Tiefe der Linie gibt dann im Wesentlichen Aufschluss über die Häufigkeit dieses Elements.

In den meisten Fällen stammt das Licht von der Oberfläche (der *Photosphäre*) eines Sterns. Durch die Spektralanalyse erfahren wir also nur, welche Elemente sich dort befinden, aber nichts über die chemische Zusammensetzung im Inneren. Dazu benötigen wir die Theorie des Sternaufbaus. Dennoch liefert die Spektralanalyse wertvolle Hinweise auf die Bedingungen im Innern und auf die frühere Entwicklung des Sterns.

Sehr vereinfacht haben wir folgendes Bild über die Elementhäufigkeiten im Universum:

1. die Elementhäufigkeiten sind überall sehr ähnlich; aber die kleinen Unterschiede sind sehr relevant!
2. Wasserstoff ist das häufigste Element mit ca. 70% (Massenanteil)
3. Helium ist das zweithäufigste Element mit ca. 28%
4. alle anderen Elemente machen zusammen zwischen 0.0001 und 0.04 der Masse aus; die Unterschiede in deren Häufigkeiten sind die Schlüssel zum Verständnis der chemischen Geschichte des Universums
5. dabei ist Sauerstoff das wichtigste dieser "Metalle" ² mit ca. 50% Anteil in dieser Gruppe
6. weitere relativ häufige Elemente sind Kohlenstoff, Stickstoff, Neon, Eisen
7. alle chemischen Elemente, solange sie stabil sind oder Zerfallszeiten haben, die dem Alter des Universums entsprechen, wurden im Universum gefunden.

Burbidge (Margaret), Burbidge (Geoffrey), Fowler³ und Hoyle haben 1957 eine sehr wichtige Arbeit geschrieben, die nur noch als "B²FH" zitiert wird, und in der das damalige Wissen um die Entstehung der Elemente erstmals zusammenfassend beschrieben wurde. Dieses Bild ist heute noch in weiten Teilen gültig. Danach sind die Elemente folgendermaßen entstanden:

- H und He im Urknall, alles andere im Wesentlichen in Sternen
- He auch in Sternen
- Elemente von Lithium bis Eisen in gewöhnlichen Sternen bis zum Ende ihres Lebens
- schwerere Elemente und seltene Erden in speziellen Phasen der Entwicklung von Sternen, meist auch nur in Sternen bestimmter Massen
- die sehr schweren Elemente in explosiven Brennphasen bei sehr hohen Energien (*Supernovae*, *verschmelzende Neutronensterne*, *Akkretionstori um Schwarze Löcher?*)

Die speziellen relativen Element- und Isotopenhäufigkeiten stellen sich oft durch spezielle Situationen ein. Daher können wir aus ihnen auf das Innere von Sternen und die dortigen Bedingungen schließen.

Als nächstes wenden wir uns der *Kernphysik* und *Kernreaktionen* im allgemeinen Sinne zu. Atomkerne bestehen aus Protonen und Neutronen. Sie sind am stabilsten, wenn etwa die gleiche Anzahl von Protonen und Neutronen vorhanden sind. Instabile Kerne zerfallen, oft durch β -Zerfall (Positronen-Zerfall) oder auch Elektroneneinfang. Betrachtet man die Masse eines Kerns im Vergleich zur Summe der Massen seiner Bestandteile, ergibt sich, dass diese Summe größer ist, der Kern stellt also einen energetisch günstigeren Energiezustand dar. Die Energiedifferenz ist die *Bindungsenergie* eines Kerns mit Massenzahl A und Ladungszahl Z

$$B(A, Z) = c^2 [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{nuc}}] = c^2 \Delta m \quad (1.3)$$

Δm nennt man den *Massendefekt*. Er liefert fast ausschließlich die Energie, die Sterne von ihrer Oberfläche abstrahlen. Für Helium ist z.B. $B(4, 2) = 26.7 \text{ MeV}$. Diese Energie kann also gewonnen werden, wenn vier Protonen zu Helium fusionieren.

²In der Astronomie/Astrophysik werden alle Elemente außer H und He als Metalle bezeichnet, unabhängig, ob sie physikalisch oder chemisch wirklich solche sind.

³Nobelpreis 1983 für seine Beiträge zur Nukleosynthese

Die Bindungsenergie pro Nukleon (für ${}^4\text{He}$ sind das 6.68 MeV) liegt immer bei etwa 8 MeV und hat ein Maximum bei den Isotopen der Eisen-Gruppe ${}^{62}\text{Ni}$, ${}^{58}\text{Fe}$ und ${}^{56}\text{Fe}$ (8.5 MeV). Das letzte Isotop ist für die effektiv ablaufende stellar Nukleosynthese das wichtigste. Das bedeutet, dass man am meisten Energie aus Nukleonenfusion gewinnt, wenn man ${}^{56}\text{Fe}$ aufbaut. Für schwerere Kerne dagegen muss schon wieder Energie aufgewendet werden.

Die Bindung ergibt sich daraus, dass bei sehr kurzen Entfernungen die anziehende *starke Wechselwirkung* dominiert. Um aber Reaktionsteilnehmer, vor allem die positiv geladenen Protonen, dorthin zu bringen, muss erst die *Coulomb-Abstoßung* überwunden werden. Dazu benötigt man Energien in der Größenordnung 1 MeV oder darüber. Dies entspräche Temperaturen von 10^{10} K. Tatsächlich helfen aber quantenmechanische Effekte mit, den Potential-Berg (“Coulomb-Wall”) zu überwinden. Am wichtigsten ist dabei der *Tunneleffekt*, der von Gamow gefunden wurde. Dadurch können sich Nukleonen mit nur einem Bruchteil der Energie auf so kleine Distanzen annähern, wo sie von der starken Wechselwirkung gebunden werden. Der Tunneleffekt ist vor allem für *nicht-resonante* Reaktionen wichtig. Außerdem kann der Energiezustand des resultierenden Kerns einen angeregten Zustand haben, in den zu kommen bei bestimmten, *resonanten* Energien leichter ist. Daher sind typische Temperaturen, bei denen Kernreaktionen ablaufen, meist deutlich niedriger als der Coulomb-Wall andeuten würde.

Da die Stärke der Coulomb-Abstoßung mit der Ladung der Reaktionsteilnehmer zunimmt, können tendenziell schwerere Kerne nur bei höheren Temperaturen erzeugt werden als leichtere. Daher findet in Sternen die Nukleosynthese als eine Abfolge von Brennphasen statt, in denen, jeweils mehr oder weniger getrennt, leichte zu schwereren Elemente fusioniert werden. Diese *hydrostatischen Brennphasen* werden wir im Detail betrachten. Im Wechselspiel mit der Struktur der Sterne ergibt sich, dass dies alles eine Zwiebschalenstruktur der Elemente in einem Stern hinterlässt (Abb. 2.11).

Am Ende eines Sternlebens kann eine explosive Phase stehen (am bekanntesten und spektakulärsten sind wohl Supernovae). In dieser sind die Temperaturen so hoch, dass alle Elemente gleichzeitig erzeugt und auch wieder zerstört werden können. Oft stellt sich dann ein Gleichgewicht ein, in dem die Häufigkeit eines Kerns aufgrund seiner Masse (Energie) gegeben ist. Das ist das *nukleare statistische Gleichgewicht*, das uns ebenfalls beschäftigen wird. Es ist auch der Grund, warum ${}^{56}\text{Fe}$, und nicht ${}^{62}\text{Ni}$ am Ende der endothermen Kernfusion steht.

Im Vergleich zu den Reaktionen, in denen Coulomb-Wälle überwunden werden müssen, sind direkte Neutronen-Einfänge energetisch viel leichter zu bewerkstelligen. Daher werden viele schwere, seltene Elemente auf diesem Weg auch schon bei relativ niedrigen Temperaturen erzeugt. Allerdings sind freie Neutronen sehr selten. Man braucht also eine *Neutronen-Quelle*. Kerne mit sehr vielen Neutronen sind aber schnell instabil, und zerfallen über β -Zerfälle, die durch die *elektroschwache Wechselwirkung* definiert und weitgehend temperaturunabhängig sind. Die Prozesse des Neutroneneinfangs und der β -Zerfälle heißen *s- und r-Prozess*.

Schließlich werden wir den Beginn der Kernsynthese im frühen Universum, während des *Big Bang* (Urknall), besprechen. Damals wurden aus Protonen und Neutronen nur wenige Elemente erzeugt, vor allem ${}^4\text{He}$, ${}^3\text{He}$, ${}^7\text{Li}$, ${}^2\text{D}$. Wie der Wettlauf zwischen Reaktionen und Abkühlung des Universums verlief, ist der Schlüssel zum Verständnis dieser frühesten Epoche der Geschichte des Weltalls und der Interpretation der Beobachtungen dieser Elemente. *Big Bang Nukleosynthese* ist einer der Grundpfeiler der Theorie des heißen Urknalls und des expandierenden Universums.

Neben anderen, eher exotischen Kernprozessen, wie zum Beispiel der *Spallation* von Kernen durch hochenergetische Teilchen der *kosmischen Strahlung*, werden wir dann noch die Prozesse im Innern der Sonne besprechen, weil es hier gelungen ist, die Kernprozesse direkt nachzuweisen. Das gelang, weil in den Beta-Zerfällen

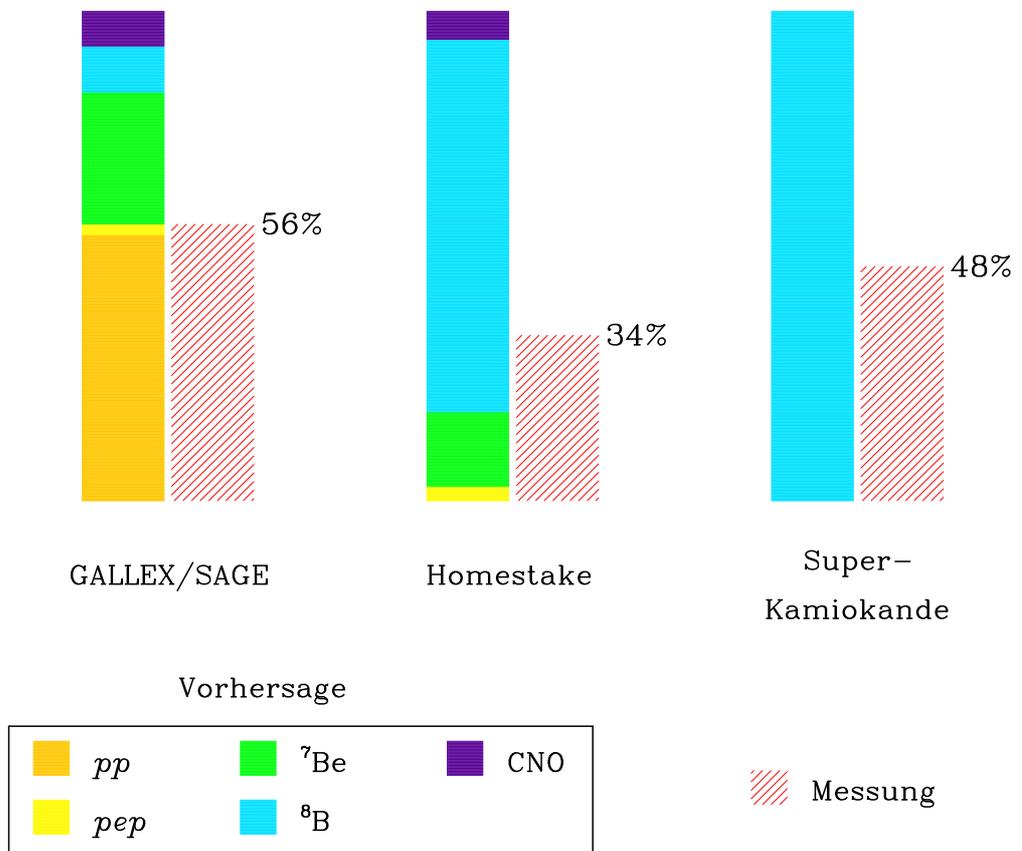


Abbildung 1.2: Erwartete und in den ersten Experimenten gemessene Neutrinos aus dem Inneren der Sonne

auch *Neutrinos* entstehen, die den Stern ungehindert und mit Lichtgeschwindigkeit verlassen und in irdischen Detektoren gemessen werden können. Das bekannte *Sonnenneutrino-Problem* hat vor wenigen Jahren eine Lösung gefunden, die das Bild der *Elementarteilchen-Physik* verändert hat. Abbildung 1.2 zeigt, wieviele Neutrinos von der Sonne in den verschiedenen Experimenten erwartet wurden (aufgespalten nach Kernreaktion, die die ν s erzeugt), und wieviele tatsächlich gemessen wurden. Das Defizit in den frühen Experimenten stellte das solare Neutrino-Problem dar.

Kapitel 2

Element-Häufigkeiten

Bevor wir in die eigentliche Nuklearphysik einsteigen, müssen wir uns zunächst ein Bild davon machen, welche Elemente wir im Universum überhaupt vorfinden, in welchen Häufigkeiten sie auftreten, und ob diese von Ort zu Ort, oder auch im Laufe der Zeit variieren.

2.1 Definitionen und Relationen

Häufigkeiten sind Anteile eines Elementes in einer gegebenen Probe, z.B. die relativen Teilchen-Häufigkeiten eines Isotopes. Es macht Sinn, Häufigkeiten so zu definieren, dass sie gegenüber Dichteänderungen invariant sind, denn dann spiegeln Häufigkeitsänderungen nukleare Prozesse (Element- oder Isotopenumwandlungen) wieder. Daher ist die *Anzahldichte* N_j , d.h. die Anzahl der Atome der Sorte j pro cm^{-3} , die oft in chemischen Versuchen benutzt wird, nicht geeignet. Der Unterschied zwischen (chemischem) Labor und astrophysikalischen Verhältnissen sind genau die starken Temperatur-, Dichte- und Druckveränderungen.

Daher definiert man Häufigkeiten in der Astrophysik meist als Anzahl der Spezies j relativ zu einer (relativistischen) Erhaltungsgröße, z.B. zur *Gesamtzahl von Baryonen oder Nukleonen*.

Avogadro-Zahl N_A = Zahl der Atome einer Spezies j , die in W_j Gramm (einem Mol) dieses Elementes enthalten sind, wobei

W_j das *Atomgewicht* (auch Molekulargewicht) der Spezies j heißt. Die Dimension ist [gm/Mol], wird aber oft weggelassen.

Beispiel: $W_{\text{He}} = 4.0026$. Der numerische Wert von N_A (Teilchen/Mol) ist

$$N_A = 6.02214 \cdot 10^{23}$$

Sei m_j die Masse (in Gramm) eines Atoms der Sorte j , dann folgt für die Massendichte dieser Spezies, wenn sie eine Teilchendichte von N_j hat

$$\rho_j = N_j m_j.$$

Außerdem gilt per definitionem $W_j = N_A m_j$ (Einheit gm/Mol).

Atomgewichte werden per Konvention auf einer Skala gemessen, auf der

$$W_{12\text{C}} = 12(\text{gm/Mol})$$

Atomare Masseneinheit Daraus definiert sich die atomare Masseneinheit (*a.m.u.*)

$$M_u = m_{12\text{C}}/12 = 1/N_A \text{ gm/Mol} = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ gm},$$

wobei $m_{12\text{C}}$ die Masse eines einzelnen, *neutralen* Atoms des Kohlenstoff-Isotops ^{12}C ist. Hier ist die “12” die Zahl der Nukleonen in ^{12}C , und für $m_{12\text{C}}$ wurde $W_j = N_A m_j$ verwendet.

Da jeder Atomkern der Nukleonenzahl A aus Z Protonen und $(A-Z)$ Neutronen besteht, liegt es nahe, die Masse m_j in Relation zu setzen zu diesen beiden Konstituenten. Beachte, dass man auch noch die Masse der Elektronen in der Hülle Zm_e berücksichtigen muss. Die triviale Massenformel aus der Summe der Neutronen- und Protonenmassen ist nicht richtig, da der Atomkern nicht einfach die Summe der einzelnen Nukleonen ist, sondern einen neuen, kollektiven und gebundenen Zustand des Gesamtsystems darstellt. Dieser Zustand hat eine andere Energie als die Summe der Einzelteile; ist sie niedriger, kann der Kern (im Prinzip) so existieren (er kann aber immer noch in einen noch günstigeren Zustand zerfallen, z.B. durch Emission eines Neutrons oder α -Teilchens).

Die Größe eines Atomkerns ist typischerweise im Bereich von Femtometern (fm oder “Fermi” genannt).

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

Rutherford fand durch Streuexperimente, dass für den Kernradius R etwa gilt

$$R = r_0 A^{1/3},$$

wobei $r_0 = 1.3 \text{ fm}$. Diese Gleichung impliziert auch, dass die Dichte von Kernmaterie ($\sim m_j/R_j^3 \sim (M_u A_j)/A_j$) nahezu konstant ist, und zwar bei etwa $\rho_{\text{nuc}} \approx 10^{14} \text{ g/cm}^3$.

Bei solch kleinen Abständen ist die Coulomb-Abstoßung zwischen den Protonen natürlich sehr groß und es ist gar nicht einsichtig, wie ein Atomkern zusammen halten soll. Die Lösung besteht darin, dass es eine anziehende, sehr kurz reichweitige *starke Wechselwirkung* (“Kernkraft”) gibt, die auf nuklearen Skalen die elektroschwache Wechselwirkung dominiert. Selbstverständlich müssen die Kernstruktur und die Eigenschaften des Kerns quantenmechanisch betrachtet werden.

Der gebundene Kern befindet sich aufgrund der Kernkraft in einem anziehenden Potenzial. Seine Gesamtenergie besteht aus der Ruheenergie der Nukleonen sowie der Bindungsenergie. Daher ist die richtige Beschreibung seiner Masse

$$\begin{aligned} m_j &= Z_j m_{\text{H}} + (A_j - Z_j) m_{\text{n}} - B_j/c^2 \\ m_{\text{H}} &= m_{\text{p}} + m_{\text{e}} \\ m_{\text{p}} &= 1.6726 \cdot 10^{-24} \text{ g} = \text{Protonenruhemasse} \\ m_{\text{n}} &= 1.6749 \cdot 10^{-24} \text{ g} = \text{Neutronenruhemasse} \\ m_{\text{e}} &= 9.1094 \cdot 10^{-28} \text{ g} = \text{Elektronenruhemasse} \end{aligned} \quad (2.1)$$

wobei A_j und Z_j wieder die Zahl der Nukleonen (*Kernmassenzahl*) und die der Protonen (*Kernladungszahl*) sind, und

$B_j = B(A_j, Z_j)$ die *Bindungsenergie* des Kerns j ist (c ist die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit).

$$\Delta m_j = B_j/c^2$$

ist der *Massendefekt*.

Wir definieren auch den *Massenexzess* (mit $\tilde{W}_j := m_j/M_u$)

$$\Delta M_{\text{AZ}} := A_j M_u - m_j = (A_j - \tilde{W}_j) M_u \quad (2.2)$$

Beachte, das sich der Massenexzess aus Bindungsenergie und der Nicht-Unterscheidung der Massen von Protonen und Neutronen, sowie der Vernachlässigung der Elektronenmasse ergibt. ΔM_{AZ} kann positiv oder negativ sein. Er beschreibt die Abweichung der Nuklidmasse von der eines Kerns der gleichen Anzahl von Nukleonen, die jeweils die Durchschnittsmasse der Nukleonen im Vergleichskern ^{12}C haben. Wir haben hier die Größe \tilde{W}_j eingeführt, die dimensionslos mit dem gleichen Zahlenwert wie W_j sein soll. $\tilde{W}_j = W_j \times 1 \text{ Mol/gm}$.

Wendet man 2.1 auf ^{12}C an ($m_{^{12}\text{C}}/M_u = 12$), ergibt sich direkt

$$\frac{B(12,6)}{m_{^{12}\text{C}}c^2} = \frac{6}{12}m_{\text{H}}/M_u + \frac{6}{12}m_{\text{n}}/M_u - 1 = \frac{\tilde{W}_{\text{H}} + \tilde{W}_{\text{n}}}{2} - 1$$

Damit lässt sich \tilde{W}_j umschreiben zu

$$\begin{aligned} \tilde{W}_j &= Z_j \tilde{W}_{\text{H}} + (A_j - Z_j) \tilde{W}_{\text{n}} - \frac{B_j/c^2}{M_u} \\ &= A_j \tilde{W}_{\text{n}} + Z_j (\tilde{W}_{\text{H}} - \tilde{W}_{\text{n}}) - \frac{B_j/c^2}{M_u} \\ &= \frac{A_j}{2} (\tilde{W}_{\text{H}} + \tilde{W}_{\text{n}} + \tilde{W}_{\text{n}} - \tilde{W}_{\text{H}}) + Z_j (\tilde{W}_{\text{H}} - \tilde{W}_{\text{n}}) - \frac{B_j/c^2}{M_u} \\ &= A_j + A_j \left(\frac{\tilde{W}_{\text{H}} + \tilde{W}_{\text{n}}}{2} - 1 \right) + \left(Z_j - \frac{A_j}{2} \right) (\tilde{W}_{\text{H}} - \tilde{W}_{\text{n}}) - \frac{B_j/c^2}{M_u} \\ &= A_j + A_j \left(\frac{B_{^{12}\text{C}}/12 - B_j/A_j}{M_u c^2} \right) + \left(Z_j - \frac{A_j}{2} \right) (\tilde{W}_{\text{H}} - \tilde{W}_{\text{n}}) \quad (2.3) \end{aligned}$$

Für stabile Kerne (siehe ^4He , ^{12}C , ^{16}O , ^{52}Fe) ist im allgemeinen $Z_j \approx A_j/2$ und damit der letzte Term in 2.3 sehr klein. Der zweite Term kann zwar auch klein gegenüber A_j sein, er ist aber wichtig, weil er die Abweichung von der trivialen Kernmasse beschreibt. Beachte, dass

$$\begin{aligned} W_{\text{H}} &= 1.007825 \text{ gm/Mol} \\ W_{\text{n}} &= 1.008665 \text{ gm/Mol} \end{aligned}$$

Die Ausdrücke $B_{^{12}\text{C}}/12$ und B_j/A_j stellen die *Bindungsenergie per Nukleon* dar.

Die gesamte *Massendichte* ergibt sich aus

$$\rho_m = \sum_j N_j m_j = \sum_j N_j \frac{W_j}{N_{\text{A}}} \text{ gm/cm}^3 \quad (2.4)$$

Mit

$$b_j := \frac{B_{^{12}\text{C}} - 12B_j/A_j}{m_{^{12}\text{C}}c^2} \quad (2.5)$$

kann man ρ_m dann auch schreiben als (letzter Term in 2.3 vernachlässigt)

$$\rho_m = \sum_j \left(\frac{N_j A_j}{N_{\text{A}}} \right) (1 + b_j). \quad (2.6)$$

(Beachte, dass hier beim Ersatz von W_j durch \tilde{W}_j ein Dimensionsfaktor gm/Mol auftaucht.)

Da ρ_m kompositionsabhängig und nicht invariant gegen nukleare Reaktionen ist, definieren wir

$$\rho = \frac{\sum_j N_j A_j}{N_{\text{A}}}, \quad (2.7)$$

was wegen der Nukleonenzahl-Erhaltung invariant ist ($\rho \approx \rho_m$), und damit den *Nukleonenteil* einer Spezies als

$$X_j \equiv \frac{N_j A_j}{\rho N_A}, \quad (2.8)$$

der die Anzahl der Nukleonen, die in Sorte j vorliegen, relativ zu der Gesamtanzahl der Nukleonen aller Sorten beschreibt. Beachte, dass A_j hier nur die reine Nukleonenzahl, oder auch Massenzahl (also eine ganze Zahl) ist. Oft wird in der Literatur A_j auch als Atomgewicht verwendet, was unserem W_j entspricht. Dann ist obige Gleichung (aus 2.6 und 2.7) wieder exakt.

Denkt man sich obige Gleichung mit M_u in Zähler und Nenner multipliziert, wird klar, dass X_j den *Massenteil* der Sorte j bezeichnet. Das gilt innerhalb der Genauigkeit selbst dann, wenn anstelle von ρ die kompositionsabhängige Massendichte ρ_m verwendet wird. Der Unterschied ist aber gering.

Es gilt

$$\sum_j X_j = 1$$

Mit X_j verwandt ist der *Molanteil*

$$Y_j \equiv \frac{X_j}{A_j} = \frac{N_j}{\rho N_A},$$

welcher die Zahl der *Kerne* (vorher: der Nukleonen) vom Typ j relativ zur Gesamtzahl der *Nukleonen* ist. Hier gilt

$$\sum_j Y_j = \frac{\sum_j N_j}{\rho N_A} = \frac{\sum_j N_j}{\sum_j N_j A_j} =: \frac{\sum_j N_j}{n} \neq 1$$

Hier ist $n = \sum_j N_j A_j$ die *gesamte Nukleonenzahldichte*.

Diese Normierung ist problematisch, weil man die Summe aller Spezies benötigt und die Fehler in den Daten für die häufigsten Sorten dominieren. Daher normiert man traditionell auf eine einzelne Spezies, die häufig und leichter zu messen ist. Für Häufigkeitsbestimmungen in Meteoriten, z.B., benutzt man Silizium, und normiert (logarithmisch) auf 10^6 Silizium-Atome. Die Umnormierung lautet

$$\log y_j \equiv \log f_{\text{Si}} + \log Y_j$$

und es gilt

$$\sum_j y_j A_j = \sum_j f Y_j A_j = \sum_j f X_j = f$$

für jede Normierungskonstante f .

Für atomares Silizium (alle Isotope) in Meteoriten ist $Y_{\text{Si}} = 2.529 \cdot 10^{-5}$ oder $\log Y_{\text{Si}} = -4.5970$ und damit $\log f_{\text{Si}} = 10.5970$.

Die *astronomische* Normierung findet meist relativ zu Wasserstoff mit $\log H = 12$ statt; daraus folgt für $Y_{\text{H}} = 0.7057$ $\log f_{\text{H}} = 12.1514$. Man beachte, dass bei dieser Art von relativen Häufigkeiten jede Neubestimmung der Vergleichs-Häufigkeiten (hier: der solare Wasserstoffgehalt) eine Veränderung der relativen Werte nach sich zieht. Allerdings sind die Veränderungen in den (solaren) Bezugswerten meist kleiner als die Unsicherheiten in der Bestimmung anderer Elemente in anderen astronomischen Objekten. Klar ist aber: *alle Elementhäufigkeiten in der Astronomie sind mit einer gewissen Unsicherheit behaftet*. Die Neubestimmung von Häufigkeiten mit immer kleineren Unsicherheiten ist eine wesentliche Aufgabe der *Spektroskopie*.

Eine andere Alternative stellt die Normierung eines jeden Elementes relativ zu seiner Häufigkeit in der solaren Mischung dar. Diese *spektroskopische Schreibweise* lautet

$$\log(N_i/N_{i,\odot}) - \log(N_j/N_{j,\odot}) = \log(N_i/N_j) - \log(N_{i,\odot}/N_{j,\odot}) \equiv [i, j]. \quad (2.9)$$

$N_{i,\odot}$ symbolisiert die Häufigkeit dieses Elements in der Sonne. Häufig findet man $[X/H]$ oder $[X/Fe]$, also die relative logarithmische Häufigkeit von Element X bezogen auf Wasserstoff oder Eisen, im Vergleich zum selben Verhältnis in der Sonne. Ein Wert von 0 hieße z.B., dass das Element X relativ zu H oder Fe genauso häufig ist wie in der Sonne, wogegen -2 bedeutet, dass man pro H oder Fe Atom nur 1/100 so viele X-Atome findet wie in der Sonne. Der Metallgehalt von Sternen wird oft durch $[Fe/H]$ ausgedrückt (Eisen ist also ein Stellvertreter für alle Elemente schwerer als Helium). Sterne wie die Sonne haben dann $[Fe/H] \approx 0$, und alte Sterne im galaktischen Halo eher $[Fe/H] \approx -2$.

2.1.1 Die solaren Häufigkeiten der Elemente

Abbildung 2.1 zeigt die solaren Elementhäufigkeiten auf der Si-Skala. Man beachte den enormen Bereich, über den sich die relativen Häufigkeiten erstrecken. Die Abbildungen¹ 2.2 bis 2.5 zeigen die gleichen Häufigkeiten, diesmal aber relativ zur Wasserstoffhäufigkeit, und aufgeteilt in vier Massenbereiche.

Die erste Abbildung umfasst die leichteren Elemente von Wasserstoff bis zur Massenzahl 60, also bis zum Ende der *Eisengruppe*. Man beachte die relativ höheren Häufigkeiten bei den Elementen, bei denen Z und $N = A - Z$ gerade ist, und außerdem $Z = N$. Vom Sauerstoff aufwärts nennt man diese Elemente die α -Elemente, da sie durch Einfang von α -Teilchen (also ${}^4\text{He}$ -Kernen) auf ${}^{16}\text{O}$ entstehen. Außerdem stellen wir fest, dass Fe sehr häufig ist, und die Eisengruppe dominiert. Dazu werden wir noch kommen. Zuletzt fällt ins Auge, dass die leichten Elemente zwischen Helium und Kohlenstoff extrem selten sind. Auch die Gründe dafür werden wir noch kennen lernen.

Abbildung 2.3 umfasst den Massenbereich von 50 bis 100, von Chrom bis Molybden. Jenseits der Eisengruppe nehmen die Häufigkeiten weiter kontinuierlich ab, und die Erzeugung geschieht vor allem über *Neutronen-Einfänge* in den sogenannten *s*- und *r*-Prozessen (dazu später mehr). Ein ähnliches Bild zeigt sich im Massenbereich bis 160 (Abb. 2.4), wobei bei $N = 82$ (bei Barium) ein lokales Häufigkeitsmaximum vorliegt. Die Häufigkeiten nehmen nun nur noch wenig ab, ebenso wie im darüber liegenden Massenbereich (Abb. 2.5), der ein Maximum beim Blei ($N = 126$) zeigt. Deutlich ist hier eine relative Unterhäufigkeit in Elementen mit gerader Kernladungszahl zu sehen, z.B. bei Hafnium (Hf, $Z = 72$). Obwohl die Abbildungen beim Wismut (Bi) enden, wurden in Sternen auch noch schwerere Elemente bis zum Uran gefunden.

Die Tabelle 2.1 umfasst die 25 häufigsten Elemente in der solaren Zusammensetzung (Massenanteile). Die Zahlen sind nicht auf dem allerneuesten Stand, aber die Rangliste ändert sich nicht mehr. Die Referenzarbeit dazu ist Anders & Grevesse, *Geochim. Cosmochim. Acta* **53**, 197 (1989). Eine Aktualisierung ist von Grevesse & Sauval, *Space Sci. Rev.* **85**, 161 (1998). Seit 2004 werden vor allem die Häufigkeiten von C, N und O wieder diskutiert, die nach neuesten Analysen des solaren Spektrums deutlich niedriger sein sollen als in der gezeigten Tabelle (Stand ca. 1993). Insbesondere der Massenanteil von Sauerstoff soll nur noch $5.3 \cdot 10^{-3}$ sein, und der von Stickstoff $7.6 \cdot 10^{-4}$. Insgesamt könnte der Anteil schwerer Elemente in der Sonne statt 1.9% (s. Tabelle) nur 1.3% betragen (Asplund, Grevesse & Sauval: *The solar*

¹Entnommen dem Buch von D. Arnett: *Supernovae and Nucleosynthesis*, Princeton University Press (1996)

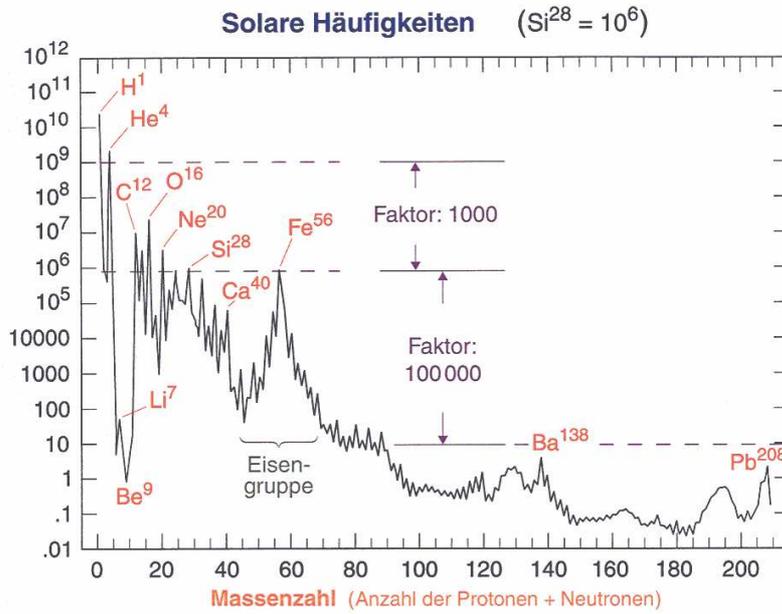


Abbildung 2.1: Elementhäufigkeiten in der Sonne

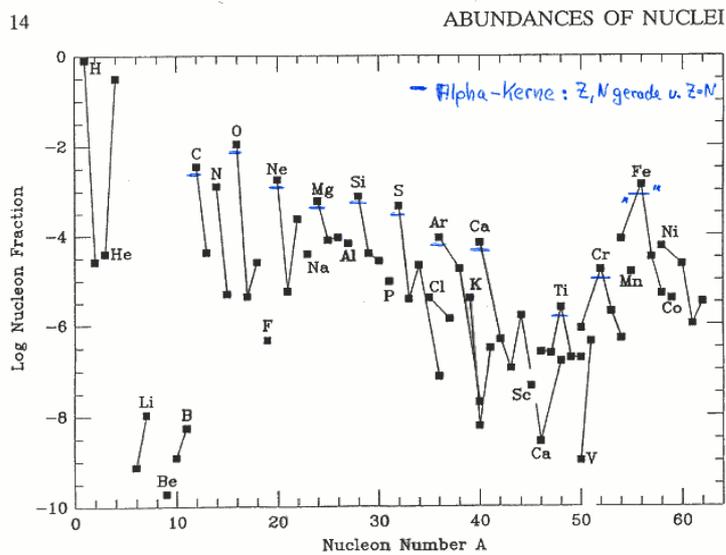


Abbildung 2.2: Elementhäufigkeiten in der Sonne, relativ zu Wasserstoff, im Massenbereich bis Nickel

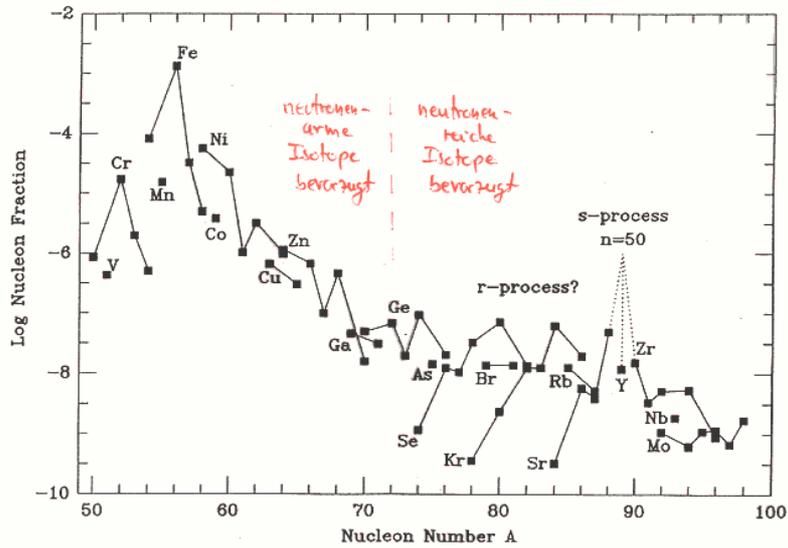


Fig. 2.3. Abundance ($A = 50, 100$)

Abbildung 2.3: Wie Abbildung 2.2, aber im Bereich $A = 50 \dots 100$

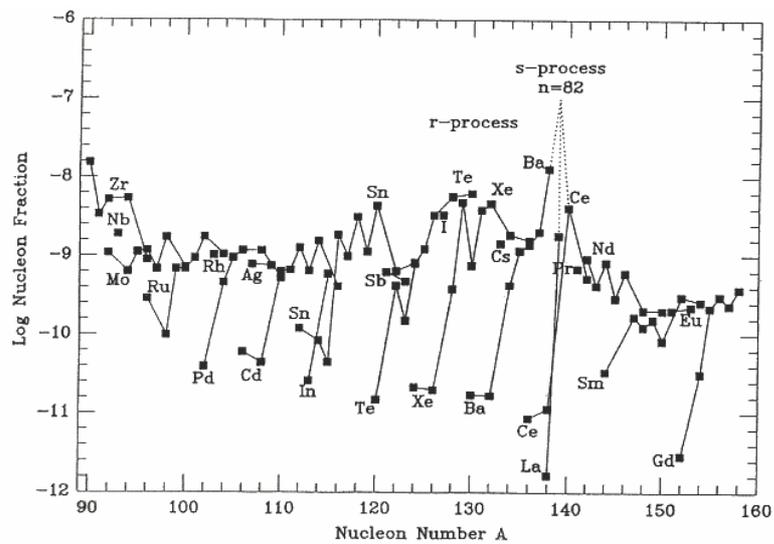


Fig. 2.4. Abundance ($A = 90, 160$)

Abbildung 2.4: Wie Abbildung 2.2, aber im Bereich $A = 90 \dots 160$

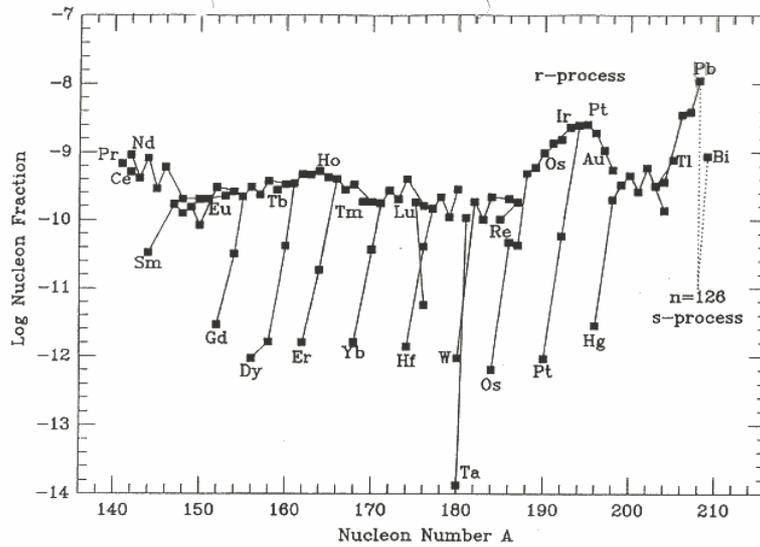


Fig. 2.5. Abundance ($A = 140, 210$)

Abbildung 2.5: Wie Abbildung 2.2, aber im Bereich $A = 140 \dots 210$

composition, 2005; und Asplund et al., 2009 – der neueste und komplette Update mit wieder leicht erhöhten Werten für C, N, O). Es gibt aber auch widersprüchliche Analysen von anderen Gruppen (z.B. Cafau, Bonifacio, u.a.), die höhere Werte erhalten. Allerdings nie mehr so hoch wie noch in den 90er-Jahren.

Für die Bestimmung der solaren Häufigkeiten gibt es zwei Quellen (im Unterschied zu allen anderen astronomischen Objekten):

1. **Spektrum der Sonne:** aus dem Absorptionsspektrum werden durch Spektralanalyse die *photosphärischen*, d.h. Oberflächen-Häufigkeiten bestimmt. Die Spektralanalyse versucht im Wesentlichen durch Variieren der Oberflächen- oder *Effektiv*-Temperatur, der Oberflächenbeschleunigung (aus Masse und Radius der Sonne), und eben der Elementhäufigkeiten ein theoretisches Spektrum zu erzeugen, das im Einklang mit dem beobachteten (s. Abb. 2.6) steht. ²
2. **Meteoriten:** Meteoriten sind kompakte Materiebrocken aus dem interplanetaren Raum, die den Durchgang durch die Atmosphäre überstanden haben, und auf die Oberfläche aufprallen. Sie stellen Relikte aus der Frühzeit unseres Sonnensystems dar und entstanden aus interstellarem Gas gemeinsam mit Sonne und Planeten. Daher teilen sie uns mit, woraus die Urmaterie unseres Sonnensystems einst bestanden hat. Man verwendet zur Isotopen-Analyse vor allem sogenannte C1-kohlige Chondriten.
3. **Übereinstimmung:** bei den meisten Elementen findet man eine gute Übereinstimmung zwischen photosphärischen und meteoritischen Häufigkeiten. Ausnahmen sind die flüchtigen Elemente wie C, O und N, oder die Edelgase Ar, Kr, Xe, die leichten Elemente Li, Be, B, und, bis vor kurzem auch Fe, das aber auch photosphärisch aus verschiedenen Eisen-Ionen nicht eindeutig bestimmt war. Mittlerweile sind die meisten Werte gut im Einklang, der meteoritische Wert wurde meist bestätigt.

²Hinweis: Unter http://mesola.obspm.fr/solar_spect.php kann man sich beliebige Bereiche interaktiv anschauen.

Tabelle 2.1: Die 25 häufigsten Elemente in der solaren Mischung; ihr relativer Massenanteil und ein Hinweis auf den primären Ursprungsprozess. Unter “e-Prozess” seien explosive Prozesse wie in Supernova-Explosionen verstanden.

Rang	Z	Element	A	Häufigkeit	Ursprung
1	1	H	1	$7.057 \cdot 10^{-1}$	Big Bang
2	2	He	4	$2.752 \cdot 10^{-1}$	Big Bang, pp, CNO
3	8	O	16	$9.592 \cdot 10^{-3}$	Helium
4	6	C	12	$3.032 \cdot 10^{-3}$	Helium
5	10	Ne	20	$1.548 \cdot 10^{-3}$	Kohlenstoff
6	26	Fe	56	$1.169 \cdot 10^{-3}$	e-Prozess
7	7	N	14	$1.105 \cdot 10^{-3}$	CNO
8	14	Si	28	$6.530 \cdot 10^{-4}$	Sauerstoff
9	12	Mg	24	$5.130 \cdot 10^{-4}$	Kohlenstoff
10	16	S	28	$6.530 \cdot 10^{-4}$	Sauerstoff
11	10	Ne	22	$2.076 \cdot 10^{-4}$	Helium
12	12	Mg	26	$7.892 \cdot 10^{-5}$	Kohlenstoff
13	18	Ar	36	$7.740 \cdot 10^{-5}$	Silizium, Sauerstoff
14	26	Fe	54	$7.158 \cdot 10^{-5}$	e-Prozess, Silizium
15	12	Mg	25	$6.893 \cdot 10^{-5}$	Kohlenstoff
16	20	Ca	40	$5.990 \cdot 10^{-5}$	Silizium, Sauerstoff
17	13	Al	27	$5.798 \cdot 10^{-5}$	Kohlenstoff
18	28	Ni	58	$4.915 \cdot 10^{-5}$	Silizium, e-Prozess
19	6	C	13	$3.683 \cdot 10^{-5}$	CNO
20	2	He	3	$3.453 \cdot 10^{-5}$	Big Bang, pp
21	14	Si	29	$3.448 \cdot 10^{-5}$	Kohlenstoff, Neon
22	11	Na	23	$3.339 \cdot 10^{-5}$	Kohlenstoff
23	26	Fe	57	$2.840 \cdot 10^{-5}$	e-Prozess
24	14	Si	30	$2.345 \cdot 10^{-5}$	Kohlenstoff, Neon
25	1	H	2	$2.317 \cdot 10^{-5}$	Big Bang

Auch die Isotopenhäufigkeiten stimmen in allen irdischen Proben, aber auch ebenso im Mondgestein, mit den Meteoriten-Werten überein (auf $10^{-3} \dots 10^{-4}$). Das deutet auf eine gute Durchmischung des präsolaren Nebels hin, und bekräftigt damit die Annahme, dass meteoritische und photosphärische Häufigkeiten übereinstimmen sollten.

Detaillierte Diskussion der solaren Häufigkeiten:

1. $\gtrsim 98\%$ der solaren Materie bestehen aus H und He (Massenanteile werden mit X bzw. Y bezeichnet);
2. da $X(\text{Fe}) \ll Y < X$, handelt es sich nicht um Gleichgewichts-Anteile (dann würde Fe bevorzugt), sondern reflektieren die Geschichte/Quellen der Nukleosynthese bis zur Entstehung des Sonnensystems;
3. $\approx 1.5\%$ werden von allen anderen Elementen gebildet (astronomisch “Metalle” genannt; Massenanteil heißt $Z = 1 - X - Y$)
4. schwerere Kerne sind seltener; erstens wegen der höheren Temperaturen, die notwendig sind, die höheren Coulomb-Kräfte zu überwinden, und zweitens, da Sterne, bei denen dies möglich ist, selbst wieder sehr kompakt sind (Weiße

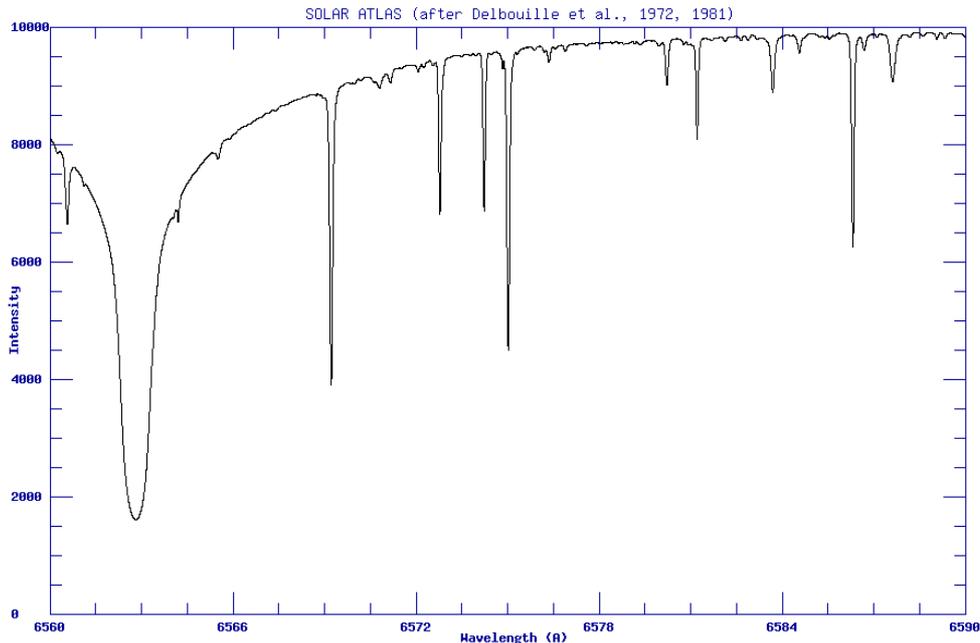


Abbildung 2.6: Details des Sonnenspektrums im Bereich der $H\alpha$ (Balmer) Linie ($\lambda = 6563 \text{ \AA}$). Das Spektrum ist insgesamt in einem Bereich von vielen tausend \AA bis ins kleinste Detail bekannt.

Zwerge, Neutronensterne), und die Materie nicht so einfach aus dem Gravitations-Potential dieser Objekte entweichen kann

5. relative Häufigkeiten spiegeln auch Kerneigenschaften wider:

- Kerne mit geradem A häufiger als solche mit ungeradem
- Kerne mit geradem Z und $N = A - Z$ und, noch besser $Z = N$ häufiger (außer ^{56}Fe); das sind insbesondere die α -Kerne ^{12}C , ^{16}O , ^{20}Ne , etc.
- “doppelt-magische” Kerne (Neutronen- und Protonen-Schalen gleichzeitig geschlossen) sind besonders häufig (^4He , ^{16}O , ^{40}Ca , ^{56}Ni , das aber zu ^{56}Fe zerfällt)
- Häufigkeitsmaximum bei ^{56}Fe , wo Bindungsenergie/Nukleon nahezu maximal ist
- geringe Häufigkeiten bei Kernen mit geringer Bindungsenergie ($A = 5 \dots 11, 45$), z.B. ^{19}F , wo $A = \text{magisch} + 1$ ist.
- Kerne mit ungeradem A seltener als mit geradem (Ausnahme ^1H und $^2\text{H} = D$)
- für $Z \leq 20$ sind die häufigsten Isotope neutronenarm
- für $20 < Z < 30$: $N = Z + 2$ häufiger, z.B. ^{48}Ti (entstanden durch Zerfall aus ^{48}Cr), ^{56}Fe (aus ^{56}Ni)
- für $Z > 30$ sind die häufigsten Isotope neutronenreich

Bemerkungen zu Meteoriten

- Durchmesser ab 10 cm aufwärts; ab ca. 1 km Gefahr für irdisches Leben (etwa alle $1/10^5$ Jahre); 10 m Meteoriten haben eine Einschlagsenergie von 400 kt TNT

- Geschwindigkeit 12-72 km/s
- ca. 3000 katalogisierte Funde; benannt nach Fundort; sehr viele und wichtige Meteoriten stammen aus der Antarktis; pro Jahr ca. 700 mit $M \geq 10$ kg
- Typen³:
 1. Stein-Meteoriten (93% aller Funde): unterteilt in *Chondriten* (86%) mit *körnigen*, sphärischen Silikat-Einschlüssen ($\varnothing \leq$ mm), die nur in Meteoriten bekannt sind, sowie in Achondrite (7%), ähnlich irdischem Gestein, ohne Einschlüsse;
Stein-Meteorite gelten als besonders primitiv oder undifferenziert
 2. kohlige Chondrite (C1, ..., C3); am bekanntesten der *Allende*-Meteorit mit über 2 t, wo erstmals *Isotopen-Anomalien* gefunden wurden
- Herkunft: stammen aus Asteroidengürtel ("differenzierte" M.) oder ähnlich Kometen aus der *Oort'schen Wolke*, die sich in etwa $6 \cdot 10^4$ AU \approx 1 LJ Entfernung um das Sonnensystem befindet (primitive M.);
gelangen durch Kollision oder Bahnstörungen ins Gravitationsfeld der Erde; einige M. stammen wohl direkt vom Mars, wo sie durch großen Einschlag hochgeschleudert wurden
- Zusammensetzung in guter Übereinstimmung mit Sonnenhäufigkeiten;
es gibt aber Variationen in Isotopen-Häufigkeiten in einzelnen Chondren; Vermutung, dass wir hier Kondensationen von individuellen Sternwinden oder -explosionen sehen

2.1.2 Meteoritenalter und Kosmochronologie

In Meteoriten finden sich auch langlebige radioaktive Isotope wie ^{235}U , ^{238}U , ^{232}Th , ^{40}K , ^{87}Rb . Deren Zerfall spiegelt das *Bildungsalter* t_B des Meteoriten wieder. Dabei nimmt man an, dass das radioaktive Material praktisch instantan nach Bildung eingeschlossen wurde. Allerdings ist es auch möglich, dass nach dem Einschuss, z.B. durch Bestrahlung durch *kosmische Strahlung* von außen die Häufigkeit modifiziert wurde, und zwar über ein *Bestrahlungsalter* t_{KS} hinweg. Nach dem Einschlag sind möglicherweise terrestrische Einflüsse eingetreten (*terrestrisches Alter*) t_T .

t_B ist im Prinzip durch die langlebigen Isotope messbar. Ein instabiler Kern mit Bildungsrate $R(t)$ und Lebensdauer $\tau = 1/\lambda$ ($\tau_{1/2} = \tau \ln 2$) hat eine zeitabhängige Anzahldichte (Häufigkeit) von

$$\frac{dN}{dt} = R(t) - \frac{N}{\tau} \quad (2.10)$$

Sei $N = \Phi \exp(-t/\tau)$ (Zerfallsgesetz mit zeitlich variabler Startdichte $\Phi(t)$), so ergibt sich

$$\frac{d\Phi}{dt} = R(t) \exp(t/\tau) \quad (2.11)$$

Sei $t = 0$ der Zeitpunkt des Beginns der Kernentstehung ($N(t = 0) = 0$, $\Phi(0) = 0$), so folgt für Φ zum Zeitpunkt Δ

$$\Phi(\Delta) = \int_0^\Delta \exp(t/\tau) R(t) dt$$

³s. Heide & Wlotzka, Meteoriten, Springer-Verlag 1995

und

$$N(\Delta) = \exp(-\Delta/\tau) \int_0^\Delta \exp(t/\tau) R(t) dt \quad (2.12)$$

Im Spezialfall eines stabilen Kerns $1/\tau = 0$ ergibt sich

$$\frac{dN}{dt} = R(t) \quad \text{bzw.} \quad N(\Delta) = \int_0^\Delta R(t) dt \quad (2.13)$$

Für konstante Produktion $R = \text{const}$ eines instabilen Kerns folgt

$$N(\Delta) = R\tau [1 - \exp(-\Delta/\tau)] \quad (2.14)$$

N eines stabilen Kerns wächst (für konstantes R) linear mit der Zeit, während ein instabiler das erst für Zeiten $\Delta \gg \tau$ tut. Sei Y ein stabiler Kern mit konstanter Produktionsrate R_Y und N ein instabiler mit ebenfalls konstanter Bildungsrate R_N , folgt aus (2.14) für das Verhältnis

$$\frac{N(\Delta)}{Y(\Delta)} = \frac{R_N \tau}{R_Y \Delta} (1 - \exp(-\Delta/\tau)) \quad (2.15)$$

Asymptotisch geht der letzte Term gegen 1, dann spricht man vom *hyperbolischen Zerfall*.

Instantane Produktion ($R(t) = \delta(t) \times \text{const}$) liefert sofort $N_0 = \Phi(0)$, die Anfangshäufigkeit, und man hat reinen Zerfall

$$N(\Delta) = N_0 \exp(-\Delta/\tau) \quad (2.16)$$

Für den obigen Fall eines stabilen Kerns, jetzt mit instantaner Produktion ist $Y \equiv Y_0$, und somit ist auch das Isotopenverhältnis vom exponentiellen Zerfall geprägt:

$$\frac{N(\Delta)}{Y(\Delta)} = \frac{N_0}{Y_0} (\exp(-\Delta/\tau)) = \frac{R_N}{R_Y} (\exp(-\Delta/\tau)) \quad (2.17)$$

Das Bildungsalter erhält man durch Auflösen nach Δ bei bekannten Isotopenhäufigkeiten und Bildungsraten. Die Produktionsverhältnisse müssen aber bekannt sein. Da diese meist Vorgänge in Sternen und Explosionen betreffen, liegt hier die Limitierung der Genauigkeit.

Eine Anwendung für den freien Zerfall sei das Isotopenverhältnis von $^{235}\text{U}/^{238}\text{U}$ im Sonnensystem. Heute ist es (in Meteoriten) 0.0072. Die Zeit seit der Isolierung vom Rest der Galaxie, also die Zeit seit der Entstehung von Meteoriten bzw. Sonne ist $t_\odot = 4.57 \cdot 10^9$ a. Das Verhältnis der beiden Uran-Isotope zu dieser Zeit (Index E) war somit nach (2.16)

$$\left(\frac{^{235}\text{U}}{^{238}\text{U}} \right)_E = \left(\frac{^{235}\text{U}}{^{238}\text{U}} \right)_\odot \cdot \exp \left[t_\odot \left(\frac{1}{\tau_{235}} - \frac{1}{\tau_{238}} \right) \right] \quad (2.18)$$

Mit $\tau_{235} = 1.0157 \cdot 10^9$ und $\tau_{238} = 6.4469 \cdot 10^9$ ergibt sich als Ergebnis 0.319.

Umgekehrt kann man dann den **Zeitpunkt der Entstehung des Sonnensystems** (seit Geburt der Galaxie) bestimmen. Man misst die Isotopenhäufigkeiten von zwei radioaktiven, verwandten Isotopen, um sicher zu stellen, dass man die gleiche Ursprungsquelle vorliegen hat, wie eben z.B. ^{235}U und ^{238}U . Da man die Produktionsraten auch benötigt, muss man alle Zerfallsketten (α -Zerfälle) berücksichtigen, die zu den beiden Isotopen führen könnten. Daraus ergibt sich ein Produktionsratenverhältnis im Bereich 1-2. Aus Beobachtungen von metallarmen Sternen, die die Nukleosynthese der galaktischen Frühgeschichte repräsentieren sollten, schließt man,

Tabelle 2.2: Langlebige Isotope, die zur Bestimmung kosmologischer Alter geeignet sind. Beachte, dass die Halbwertszeit mit der Lebensdauer τ über $\tau_{1/2} = \tau \ln 2$ verwandt ist.

Isotop	Zerfallsprodukt	Halbwertszeit (Jahre)
^{87}Rb	^{87}Sr	$4.982 \cdot 10^{10}$
^{187}Re	^{187}Os	$4.297 \cdot 10^{10}$
^{232}Th	^{208}Pb	$1.389 \cdot 10^{10}$
^{238}U	^{206}Pb	$4.468 \cdot 10^9$
^{235}U	^{207}Pb	$0.704 \cdot 10^9$
^{129}I	^{129}Xe	$1.57 \cdot 10^7$

dass die Produktion von U-Isotopen (im r-Prozess) immer gleich und *konstant* verlaufen ist. D.h., wir können die Formel (2.14) für konstantes R von $t = 0$ bis t_E anwenden. Das ergibt

$$\left(\frac{^{235}\text{U}}{^{238}\text{U}}\right)_E = \frac{\tau_{235} R_{235} (1 - \exp(-t_E/\tau_{235}))}{\tau_{238} R_{238} (1 - \exp(-t_E/\tau_{238}))}$$

Für etwa 10^{10} Jahre ergibt sich dann der Wert $\left(\frac{^{235}\text{U}}{^{238}\text{U}}\right)_E = 0.32$ von oben.

Wie aber bestimmt man nun das **Alter des Sonnensystems**? Eine Methode ist, die Isotopenverhältnisse stabiler Tochterkerne zu betrachten, z.B. ^{204}Pb und ^{206}Pb . Das letztere entsteht als stabiles Endprodukt der ^{238}U -Zerfallskette mit Halbwertszeit $4.508 \cdot 10^9$ Jahren, s. auch Tabelle 2.2 und Abb. 2.7⁴.

Das Zerfallsgesetz sei hier wiederholt und lautet $^{238}\text{U}(t) = ^{238}\text{U}(0) \exp(-t/\tau)$; für den stabilen Tochterkern ergibt sich

$$^{206}\text{Pb}(t) = ^{206}\text{Pb}(0) + ^{238}\text{U}(0) [1 - \exp(-t/\tau)]$$

oder, wenn man das Zerfallsgesetz nach $^{238}\text{U}(0)$ auflöst

$$^{206}\text{Pb}(t) = ^{206}\text{Pb}(0) + ^{238}\text{U}(t) [\exp(t/\tau) - 1] \quad (2.19)$$

Man normiert jetzt alle Häufigkeiten auf ^{204}Pb . Unter der Annahme, dass ursprünglich das Blei-Isotopenverhältnis in zwei Meteoriten a und b identisch war, sind Unterschiede auf unterschiedliche Häufigkeiten der Ausgangsisotope zurückzuführen, also

$$\left(\frac{^{206}\text{Pb}}{^{204}\text{Pb}}\right)_a - \left(\frac{^{206}\text{Pb}}{^{204}\text{Pb}}\right)_b = \left[\left(\frac{^{238}\text{U}}{^{204}\text{Pb}}\right)_a - \left(\frac{^{238}\text{U}}{^{204}\text{Pb}}\right)_b \right] [\exp(t/\tau_{238}) - 1] \quad (2.20)$$

Dabei gilt für das Isotopenverhältnis in einem Meteoriten

$$\left(\frac{^{206}\text{Pb}}{^{204}\text{Pb}}\right)_t = \left(\frac{^{238}\text{U}}{^{204}\text{Pb}}\right)_t [\exp(t/\tau_{238}) - 1] + \left(\frac{^{206}\text{Pb}}{^{204}\text{Pb}}\right)_0 \quad (2.21)$$

Da alle Meteoriten ursprünglich dasselbe $^{206}\text{Pb}/^{204}\text{Pb}$ -Verhältnis hatten, aber eben nicht dieselbe ^{238}U -Häufigkeit, ergibt sich eine Gerade mit Steigung $[\exp(t/\tau_{238}) - 1]$, wenn man für viele Meteoriten-Einschlüsse das Blei-Isotopen-Verhältnis gegen $^{238}\text{U}/^{204}\text{Pb}$ (beides messbar) aufträgt. Daraus kann t_\odot bestimmt werden. Man hat dies für mehrere Zerfallsketten und Tochterisotope gemacht, und erhält mit minimaler Abweichung als Alter des Sonnensystems

$$t_\odot = 4.57 \pm 0.02 \cdot 10^9 \text{ a}$$

⁴Man muss selbstverständlich Zerfallsketten betrachten, deren Halbwertszeit vergleichbar ist mit dem zu bestimmenden Alter.

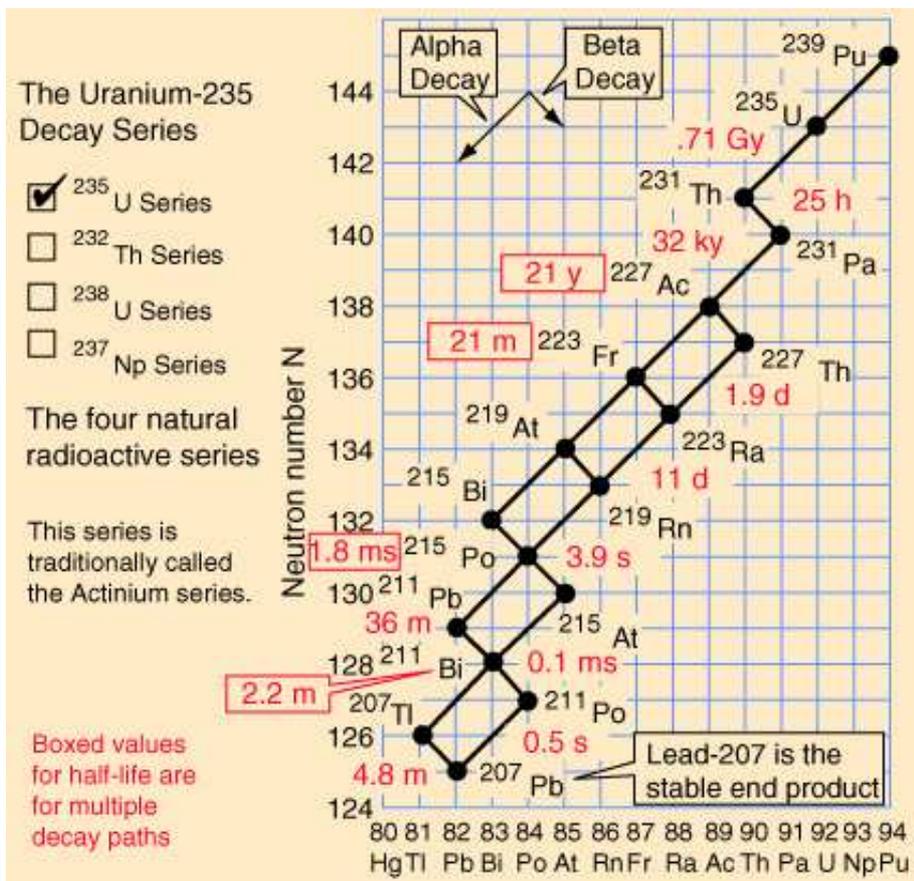


Abbildung 2.7: Beispiel für eine der natürlichen Zerfallsketten (^{235}U , die in ^{207}Pb endet).

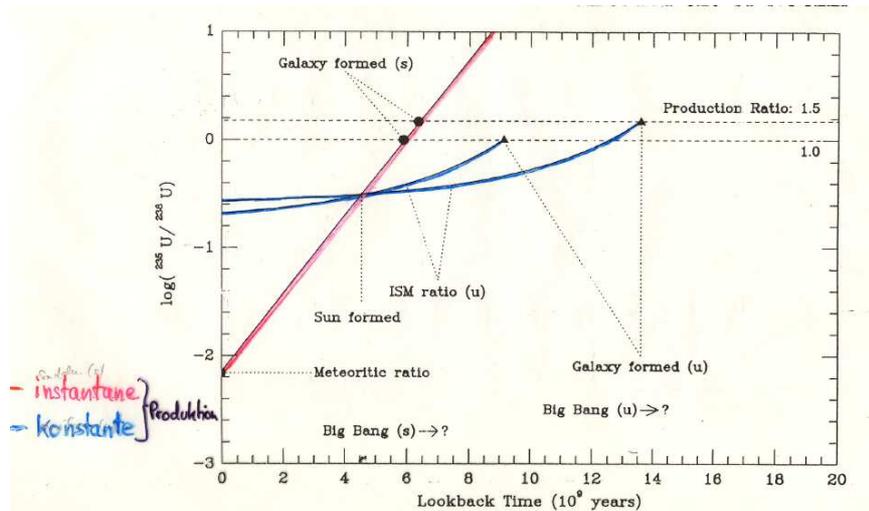


Abbildung 2.8: Bestimmung des Alters des Sonnensystems und des Beginns der nuklearen Synthese in der Galaxie für verschiedene Annahmen über den zeitlichen Verlauf der Produktionsraten (einschl. freier Zerfall eines ungestörten Systems). Die rote Linie entspricht der Rückrechnung des $\frac{^{235}\text{U}}{^{238}\text{U}}$ -Verhältnisses in Meteoriteneinschlüssen. Ab dann folgt man der blauen Linie ("u"; uniform=gleichmäßige Erzeugungsrate) zurück, bis man das Verhältnis in den Quellobjekten, das zwischen 1 und 1.5 liegen sollte erreicht. Folgt man dagegen der "s"-Kurve (sudden=instantane Erzeugung), ergäben sich viel zu kleine Alter.

Allgemein sind die Unsicherheiten in radiologischen Datierungen

- die Produktionsstätten
- die Produktionsraten und ihre Geschichte (instantan, konstant, exponentiell abfallend, ...). Abbildung 2.8 skizziert solare und galaktische Altersbestimmungen für das Uran-Isotopenverhältnis unter verschiedenen Annahmen.
- Zuführung bzw. Verlust von weiterer Materie (wie abgeschlossen ist/war das System?)

2.1.3 Kosmische Häufigkeiten

Vergleicht man nun Element-Häufigkeiten in anderen astronomischen Objekten mit denen in der Sonne, findet man eine Reihe bemerkenswerter Übereinstimmungen (zu all diesen gibt es aber auch immer völlig orthogonale Ausnahmen):

1. H ist immer das häufigste Element, mit einem Anteil um 70%
2. He ist immer das zweithäufigste Element; sein Anteil schwankt zwischen 24% (sehr unterentwickelte Zwerggalaxien) und 30% (junge Sterne)
3. daher ist der Anteil der Metalle (Z) immer $\lesssim 0.06$, mit einer klaren, aber nicht scharfen Untergrenze von $Z \approx 0.0001$
4. innerhalb der Metalle liegen zunächst solare Relativhäufigkeiten vor, also in erster Näherung für das beliebige Element X $[X/Fe] \approx 0$

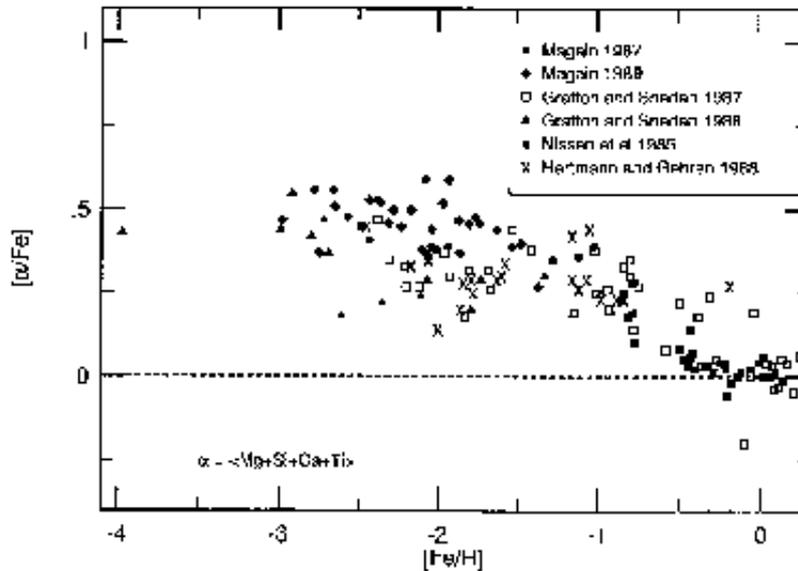


Abbildung 2.9: Häufigkeiten der α -Elemente relativ zu den solaren Häufigkeiten für galaktische Sterne als Funktion der Eisenhäufigkeit. Der klar sichtbare Trend spiegelt die Veränderung im Beitrag der Nukleosynthese-Quellen wieder.

5. die α -Elementgruppe sticht heraus: man findet, dass ihre relativen Häufigkeiten entweder solar sind, oder, $[\alpha/\text{Fe}] \approx 0.3 \Rightarrow$ zwei verschiedene *Populationen* (Abb. 2.9)
6. die sehr schweren Elemente (r-Prozess) liegen in zum Teil unglaublich genau solaren relativen Häufigkeiten vor, auch in den metallärmsten Sternen (Abb. 2.10)
7. auch in anderen Galaxien scheinen, mit geringen Abweichungen, sehr ähnliche Elementhäufigkeiten vorzuliegen

Daraus können wir schließen, dass

1. die Entstehungsgeschichte der Elemente innerhalb der Galaxis weitgehend ortsunabhängig ist
2. dasselbe auch für andere Galaxien gilt
3. einige Elemente offensichtlich von sehr wenigen Quellen herrühren und diese ebenfalls weitgehend homogen funktionieren
4. die gesamte Produktion von schwereren Elementen bisher über das galaktische Alter (= Weltalter = ca. 13 Mrd. Jahre) nur maximal einige Prozent an Metallen hervorgebracht hat
5. dass Wasserstoff und Helium, die Grundbausteine für alle weiteren Elemente, im Prinzip schon immer da waren, also primordial sind und aus dem Urknall stammen

Wegen der relativ geringen Variationen der Elementhäufigkeiten sind die solaren Werte also ein guter Referenzwert und Anhaltspunkt, wenn wir über kosmische

r-Process Abundances in BD+17 3248

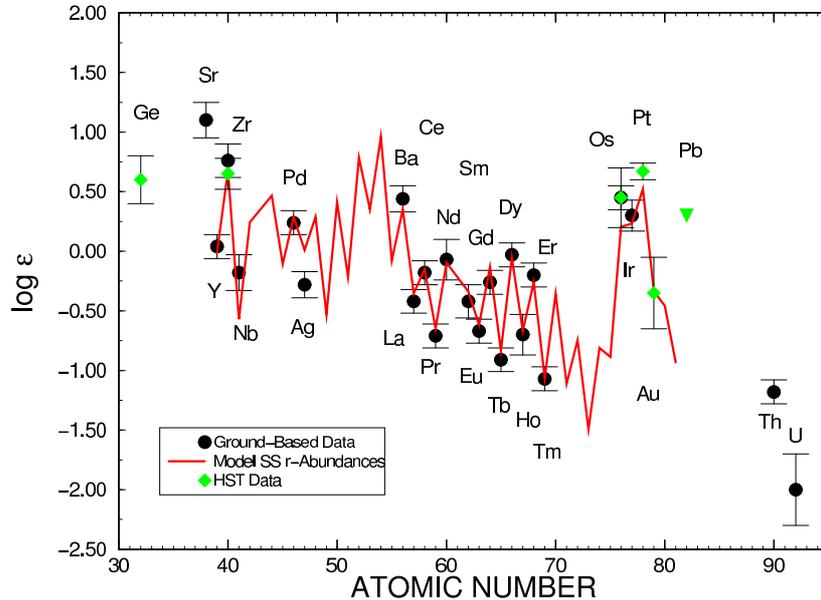


Abbildung 2.10: Häufigkeiten der schweren Elemente in dem sehr metallarmen Stern BD 17 3248 ($[\text{Fe}/\text{H}] = -2.1$). Zum Vergleich (Linie) die solaren Verhältnisse, verschoben um die globale Unter-Häufigkeit dieser Elemente in dem Objekt.

Häufigkeiten sprechen. Nur bei immer genauerem Hinsehen stellt man Abweichungen fest, die dann im Detail erklärt werden müssen, und wichtige Erkenntnisse über die Zustände am und im Produktionsort oder über die Produktionsgeschichte liefern.

2.1.4 Die Elementmaschine Stern

Sterne strahlen Energie von der Oberfläche in Form von Photonen ab. Die solare Leuchtkraft beträgt z.B. $L_{\odot} = 3.85 \cdot 10^{33} \text{ erg/s} = 3.85 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Woher kommt diese Energie? Einfache Abschätzungen, die auch schon im 19. Jahrhundert gemacht wurden, schlossen die damals bekannten Energiequellen (Holz, Kohle) aus. Auch der thermische Energieinhalt der Sonne reicht nur für etwa 10^7 Jahre, aber fossile Funde und Entwicklungsgeschichte der Erde deuteten auf Zeitskalen von Milliarden Jahren hin. Erst nach Einsteins $E = mc^2$ -Relation wurde langsam klar, dass die kernphysikalische Umwandlung von Masse in Energie *die* stellare und kosmische Energiequelle sein könnte. Es dauerte aber noch bis in die dreißiger Jahre des 20. Jahrhunderts, bis Kernphysiker wie Bethe und von Weizsäcker die Prozesse identifizierten, aus denen die Sonne (und damit alle anderen Sterne) ihre Energie gewinnen.

Eine erste Abschätzung zeigt die langen Lebenszeiten, die man auf kernphysikalischem Weg erreichen könnte:

1. Umwandlung der gesamten Sternmasse ($1M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{33} \text{ g}$) in Energie:

$$E_{\text{nuc}} = M_{\odot}c^2 = 2 \cdot 10^{54} \text{ erg}$$

Lebenszeit ergibt sich dann aus $\tau = E_{\text{nuc}}/L_{\odot} \approx 10^{13}$ Jahre

2. Umwandlung des gesamten Wasserstoffs ($\approx 0.7 \times M_{\odot}$) zu Helium, wobei die Energieausbeute aus dem Massendefekt $(4m_{\text{H}} - m_{\text{He}})c^2 = 26.73 \text{ MeV}$ /erzeugter He-Kern ($= 6.4 \cdot 10^{18} \text{ erg/gm}$) beträgt. Das ist, relativ zur Ruhemasse, nur $26.73/3724 = 0.007$. Daraus folgt eine entsprechend kürzere Lebenszeit von etwa 10^{11} Jahren.
3. Da aber nur etwa 40% der gesamten Masse an der Wasserstoff-Fusion teilnehmen werden, und die Leuchtkraft in der Zukunft noch kräftig (Faktor 100...1000) ansteigen wird, wird nur etwa 10% dieser Lebenszeit erreicht, also etwa 10^{10} Jahre (genauere Rechnungen zeigen, dass die Sonne etwa 13 Mrd. Jahre alt werden wird; sie ist also jetzt in den besten Jahren).

In Sternen laufen verschiedene Brennphasen ab, und zwar in der Reihenfolge der Brenntemperaturen, die dafür nötig sind. Ein Sternleben beginnt immer damit, dass eine Gaswolke kontrahiert, sich dabei erhitzt und von der Oberfläche Energie abstrahlt. Zunächst wird diese Energie aus Gravitationsenergie bzw. thermischer Energie bezogen.

Der *Virialsatz* für selbst-gravitierende Gaskugeln besagt, dass die Gesamtenergie eines Sterns nicht nur die Summe aus Gravitations- (E_G) und thermischer Energie (E_i) ist, sondern diese beide auch in einem festen Zusammenhang stehen, und zwar (für ideales mono-atomares Gas) $2E_i = -E_g$, also

$$W = E_i + E_g = -E_i = (1/2)E_g \quad (2.22)$$

Die abgestrahlte Energie L speist sich aus W und damit

$$L = -\dot{W} = -\frac{\dot{E}_g}{2} = \dot{E}_i \quad (2.23)$$

Das bedeutet, dass *die Tatsache, dass Sterne Energie von der Oberfläche verlieren, dazu führt, dass sie kontrahieren (E_g wird immer negativer, der Stern immer mehr gebunden), sich aber gleichzeitig aufheizen (E_i wächst immer weiter an).*

Das Virial-Theorem gilt nur für Phasen ohne nukleare Energieerzeugung. Allerdings gilt auch in diesen, dass das Sterninnere kompakter wird. Hier aber wegen der Erhöhung des molekularen Gewichts (leichte Kerne werden zu schwereren fusioniert) und damit der Dichte. Somit ist die innere Entwicklung eines Sterns von einer Abfolge von Phasen gekennzeichnet, die nach dem folgenden Schema verlaufen:

1. Kontraktion und Aufheizung des Sterninnern nach (2.23), bis im Zentrum Temperaturen erreicht werden, die eine energiereiche nukleare Brennphase erlauben.
2. Das ist als erstes die Phase des *Wasserstoffbrennens*, deren Zeitskala, wie oben berechnet, bis zu Milliarden Jahren beträgt (Brenntemperatur etwa 10^7 K oder darüber). Am Ende dieser Phase erlischt das nukleare Brennen und der Stern kontrahiert (insbesondere der Kern) entsprechend dem Virial-Theorem und heizt sich dabei auf.
3. Er erreicht schließlich die notwendige Temperatur (ca. 10^8 K), um die nächste Brennphase (Helium zu Kohlenstoff) zu beginnen. Da die Energieausbeute hier nur 7.27 MeV/Reaktion beträgt, und die Leuchtkraft höher ist, dauert diese Phase nur ca. 1/10 solange wie die des Wasserstoffbrennens. Wichtig ist, dass der Teil des Kerns, der Helium verbrennt, *innerhalb* des Teils des Sterns liegt, der vorher Wasserstoff zu Helium fusioniert hat.

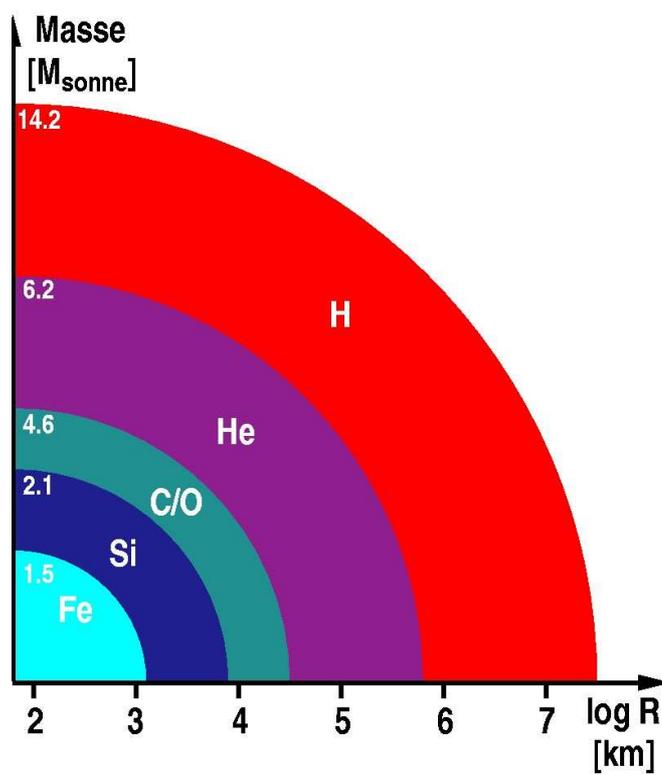


Abbildung 2.11: Schematische Struktur eines massereichen Sterns (Anfangsmasse: $15 M_{\odot}$), nachdem alle Phasen des ruhigen Kernbrennens vorüber sind.

4. Der weitere Fortgang ist analog: Erlöschen des (Helium-)Brennens, Kontraktion und Erhitzen der inneren Bereiche, Erreichen der nächsten Brenntemperatur, neue Brennphase von schwereren Elementen, usw.
5. Wie weit diese Abfolge geht, hängt von der Masse des Sterns ab: je höher die Masse, desto höher die erreichbaren Zentraltemperaturen. Sterne ab etwa $8 M_{\odot}$ entwickeln sich bis zur Eisen-Erzeugung.
6. Aufgrund der Tatsache, dass jedes Kernbrennen innerhalb des vorhergehenden Brennbereichs stattfindet, erhält man am Ende eine *Zwiebelschalenstruktur* der Zusammensetzung, wie in Abb. 2.11 schematisch für einen Stern mit anfänglich $15 M_{\odot}$ dargestellt.

2.1.5 Der kosmische Materiekreislauf

Sterne erzeugen also schwerere Elemente aus leichteren. Sie behalten die Fusionsprodukte aber nicht, sondern verlieren einen Teil (manchmal auch den Großteil) durch *Sternwinde* in ruhigen Entwicklungsphasen oder *Explosionen*, wie z.B. in Supernovae, und reichern damit die interstellare Materie an. Wie aus Abb. 2.11 ersichtlich wird, werden die leichteren Elemente eher an das interstellare Medium abgegeben, da sie sich weiter außen befinden, und somit entweder die Höhe oder Dauer des Massenverlustes nicht extrem sein muss.

Einige Beispiele:

- Die Sonne verliert etwa $10^{-14} M_{\odot}/\text{yr}$, über ihre Lebenszeit im Wasserstoffbrennen, also insgesamt nur etwa $10^{-4} M_{\odot}$. Da der brennende Kern nur die inneren $\approx 10\%$ umfasst, wird dadurch also das interstellare Medium nicht verändert.
- In einer späteren Phase allerdings folgt der Massenverlust der Relation (*Reimers Formel*)

$$\frac{dM}{dt} = -4 \cdot 10^{-13} \eta \frac{L}{gR} \quad (M_{\odot} \text{ yr}^{-1})$$

L , g (Oberflächen-Schwerebeschleunigung) und R sind dabei in solaren Einheiten zu nehmen; η ist ein Parameter der Größe $\approx 0.1 \dots 0.6$. In dieser Phase ist $L \approx 10^3$, $g \approx 10^{-3}$ und $R \approx 100$, so dass $\frac{dM}{dt} \approx 10^{-9} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ erreicht. Damit kann in 10^8 Jahren (Dauer dieser *Riesen-Phase*) immerhin 10% der Masse verloren gehen, und Produkte des Wasserstoffbrennens an das interstellare Medium gegeben werden.

- massereichere Sterne ($\approx 2 \dots 7 M_{\odot}$) können in einer noch späteren Entwicklungsphase Massenverlusten von bis zu $10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ erreichen, und verlieren dabei $> 80\%$ ihrer Masse; dadurch können sie sogar Produkte des Heliumbrennens abgeben
- die massereichsten Sterne, die in einer (Supernova-)Explosion enden, verlieren ebenfalls den größten Teil ihrer Materie und geben Elemente aus allen Bereichen (s. Abb. 2.11) und damit auch Si, Fe und weitere Produkte an das umgebende Gas ab.

Aus dem so angereicherten Gas, das sich schnell durchmischt, entstehen neue Sterne mit entsprechend höherem Metallanteil Z (und reduziertem Wasserstoffanteil X), usw. Abb. 2.12 zeigt schematisch diesen Materiekreislauf. Ein Teil der erzeugten Elemente geht dieser *Elementmaschine* verloren, da er in kompakten Sternresten (Weiße Zwerge, Neutronensterne, Schwarze Löcher) gebunden bleibt.

Die kosmische "Elementmaschine"

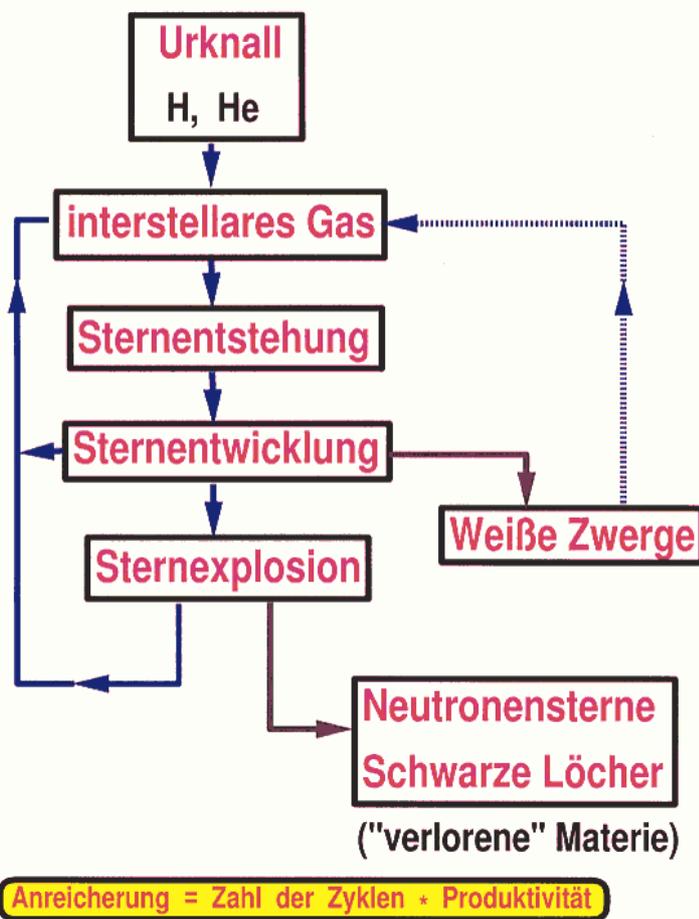


Abbildung 2.12: Der galaktische Materiekreislauf

2.1.6 Primäre und sekundäre Elemente

Einige Elemente können direkt aus Wasserstoff und Helium erzeugt werden, andere dagegen benötigen erst “Vorläufer-Elemente”, die in einer vorherigen Stern- generation erzeugt werden müssen. Ein Beispiel für die erste Gruppe, die *primäre* Elemente genannt werden, ist Kohlenstoff, der folgendermaßen entsteht:

1. Wasserstoffbrennen: $4p \rightarrow {}^4\text{He}$
2. Heliumbrennen: $3{}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$,

wobei beide Reaktionen nacheinander in einem Stern stattfinden. Da diese Produktion in allen Sternen gleich abläuft, ist

$$\frac{dX({}^{12}\text{C})}{dt} = \text{const}$$

und somit für eine Galaxie

$$X({}^{12}\text{C}) \propto t.$$

Dagegen wird das zweite wichtige Isotop des Kohlenstoffs, ${}^{13}\text{C}$, in der Reaktionskette



erzeugt, benötigt also bereits ${}^{12}\text{C}$, welches früher und an anderer Stelle im Heliumbrennen entstanden sein muss. Somit ist

$$\frac{dX({}^{13}\text{C})}{dt} \propto X({}^{12}\text{C}) \propto t$$

und daher

$$X({}^{13}\text{C}) \propto t^2.$$

Solche Elemente (Isotope) werden entsprechend sekundär genannt. Die Häufigkeit der verschiedenen Elemente und Isotope als Funktion der Zeit (z.B. Alter der Sterne) zeigt, ob sie primär (linearer Anstieg) oder sekundär (parabolisch) sind. Wie man sieht, sollte auch der Stickstoff sekundär sein. Allerdings gibt es bei ihm wohl auch eine primäre Komponente während des Heliumbrennens.

Kapitel 3

Kernphysik

3.1 Grundlagen

3.1.1 Kernstruktur

Atomkerne bestehen aus Neutronen und Protonen (*Nukleonen*), die durch die starke Wechselwirkung (Kernkraft) zusammengehalten werden (s. auch Kapitel 2). Atome mit gleichen Kernen heißen *Nuklide*; Nuklide mit gleichem Z (Kernladungszahl = Protonenzahl) sind *Isotope*, solche mit gleichem A (Nukleonen- oder Massenzahl), aber verschiedenem Z sind *Isobare*. Der Zerfall des freien Protons ist noch nicht beobachtet worden, daher gibt es nur eine untere Grenze für seine Lebenszeit, die über 10^{30} Jahren liegt. Das freie Neutron zerfällt durch Emission eines Elektrons und eines Anti-Elektron-Neutrinos in ein Proton mit der Halbwertszeit $\tau_{1/2} = 10.6$ min

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e.$$

Die Massen von p und n sind in Einheiten von M_u : 1.007280 und 1.008665; ihre Massenziffern 7.28899 und 8.07144 (MeV). Alle drei Teilchen (p , n , e^-) sind Fermionen mit Spin $1/2$. Proton und Neutron sind *Baryonen* (3 Quarks, uud und udd), das Elektron ein *Lepton*.

Die Bindungsenergie (s. Kapitel 2) $B(A, Z)$ pro Nukleon folgt dem Verlauf aus Abb. 3.1. Besonders stark gebundene Kerne sind ${}^4\text{He}$, ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$ und ${}^{20}\text{Ne}$, also Kerne mit $Z = N$. Die Kerne mit der höchsten Bindungsenergie pro Nukleon haben $A = 50 - 65$, und die Maximalwerte werden bei ${}^{62}\text{Ni}$ (8.795 MeV), ${}^{58}\text{Fe}$ (8.792 MeV) und ${}^{56}\text{Fe}$ (8.790 MeV) erreicht. Aus der Fusion bzw. Spaltung von Kernen leichter bzw. schwerer als ${}^{56}\text{Fe}$ (das am stärksten gebundene astrophysikalisch stabile Nukleon) kann Energie gewonnen werden. Die Tatsache, dass B/A nahezu konstant ist, weist darauf hin, dass die Kernkraft eine *Austauschkraft* ist, d.h. die Bindung wird durch Austausch von Elementarteilchen zwischen 2 Partnern vermittelt. Das sind in diesem Fall nach Yukawa die *Pionen* (auch: π -Meson; Bosonen endlicher Ruhemasse). Diese bestehen aus einem $u\bar{d}$ -Paar, das nach der Quantenchromodynamik eine der (notwendigen) Manifestationen der Gluon-Wechselwirkung außerhalb des Nukleons ist (da Quarks außerhalb des Nukleons nicht einzeln existieren können).

Das *Yukawa-Potential* (s. Abb. 3.2) hat etwa die funktionelle Form

$$V(r) = \frac{g}{r} \exp\left[-\frac{m_\pi c}{\hbar} r\right],$$

wobei der konstante Faktor in der Exponentialform als *Compton-Wellenlänge des π -Mesons* bezeichnet wird. Aus der Unschärferelation kann man mit der Annahme, dass die Masse des Pions, das das leichteste Meson (Quark-Antiquark-Teilchen)

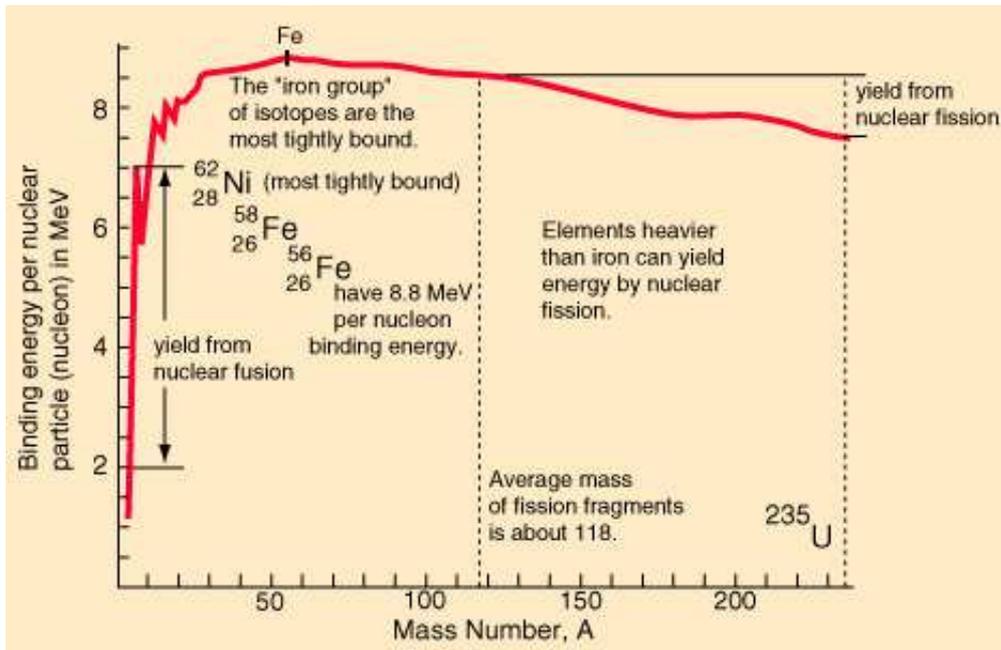


Abbildung 3.1: Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Kernladungszahl A

ist, der Energieunschärfe entspricht, eine zeitliche Unschärfe ausrechnen. Da das Pion sich mit maximal Lichtgeschwindigkeit bewegen kann, folgt eine maximale Reichweite, die bei 1.4 fm liegt, also der Konstanten r_0 in der Gleichung für den Kernradius (Kapitel 2) entspricht.

Die Kernmaterie wird in Modellen oft als ein *Fermi-Gas* behandelt, bei dem sich die Nukleonen frei und ohne Stöße in einem mittleren Kern-Potential bewegen, das durch alle Nukleonen gegeben ist, und das sie aufgrund eines scharfen “Randes” nicht verlassen können. Innerhalb dieses Potentials werden die Energiezustände dann durch die Wechselwirkung zwischen einzelnen Nukleonenpaaren definiert. Dieser Ansatz führt über ein *Hartree-Fock*-Verfahren zum *Schalenmodell*, das ähnlich konzipiert ist wie das Modell der Atomhülle und recht erfolgreich ist.

Betrachtet man die *Separationsenergie*, das ist die Energie, um ein Proton oder Neutron aus dem Kern zu entfernen, so findet man empirisch und auch aus dem Schalenmodell, dass in beiden Fällen besonders hohe Werte vorliegen, wenn die Anzahl der Protonen bzw. Neutronen 2, 8, 20, 28, 50, 82 oder 126 ist (*magische Zahlen*), und einen besonders niedrigen Wert, wenn die Anzahl um Eins größer ist. Wie im Elektronenhülle-Modell ergeben sich im Schalenmodell Energiezustände, die mit einer bestimmten Anzahl von Fermionen mit halbzahligem Spin und Quantenzahlen n (radiale Quantenzahl), l (Bahndrehimpuls), m (magnetischer Quantenzahl) und s (Spin) besetzt werden können (Schalen). Eine abgeschlossene Schale ist besonders stabil (s. Edelgase). Die Energieniveaus und der Abstand der Schalen hängt von der Form des Kernpotentials ab und beim Kernpotential vor allem von der Spin-Bahndrehimpuls-Wechselwirkung (der gekoppelte Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ wird durch die Quantenzahl j gekennzeichnet), die bei der Elektronenhülle nur zur Feinstruktur führt, hier aber wesentlich wichtiger ist. Die Energieaufspaltung ΔE für Zustände mit Gesamtimpuls $l + 1/2$ und $l - 1/2$ ist proportional $2l + 1$, ist also von der gleichen Größenordnung wie der Energieterm, der sich nur aus dem Bahndrehimpuls ergibt. Die sich ergebende Niveaustruktur ist in Abb. 3.3 gezeigt. Links die Niveaus ohne Spin-Bahn-Kopplung Aufspaltung. Die Niveaus sind wegen der

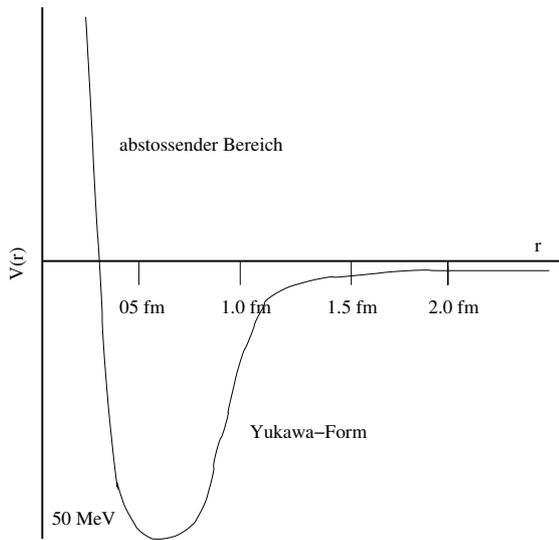


Abbildung 3.2: schematische Form des Yukawa-Potentials

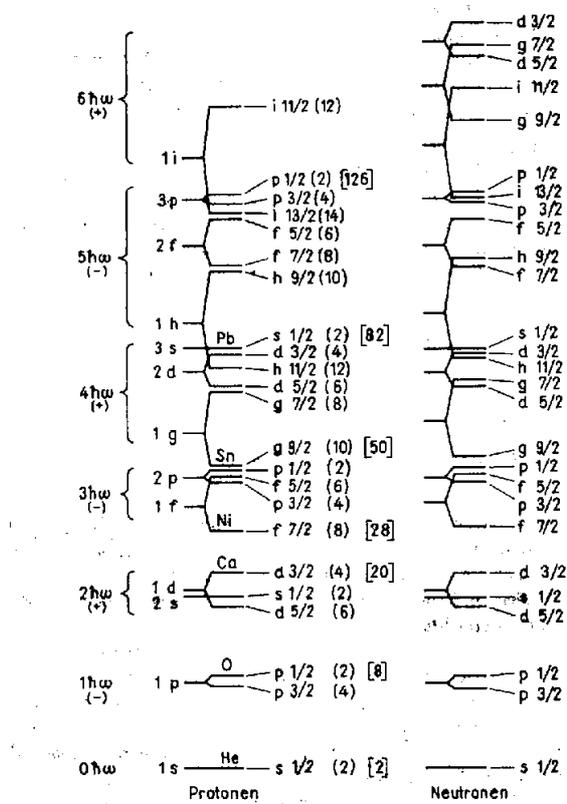


Abbildung 3.3: Energieschema aus dem Schalenmodell

Coloumbterme im Kernpotential für Protonen und Neutronen unterschiedlich. Die Notation bedeutet (Beispiel): $2p\ 3/2$: $n = 2$, $l = 1$ (p), $j = l + 1/2 = 1 + 1/2 = 3/2$. In runden Klammern die Anzahl der Nukleonen, mit denen ein Niveau mit Gesamtdrehimpuls j besetzt werden kann, naemlich $2j + 1$ ($m_j = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$) und in eckigen Klammern die bis dorthin aufsummierte Zahl.

3.1.2 Bindungsenergie und Massenformel

Man möchte gerne theoretisch die Kernmassen gut vorhersagen. Dazu ist es offensichtlich nötig, die Bindungsenergie gut zu kennen. Ein einfaches Modell ist das *Tröpfchenmodell*, auf das hier nicht näher eingegangen wird, bei dem aber die Bindungsenergie aus verschiedenen Termen zusammengesetzt wird, die sich aus der Betrachtung des Kerns als Flüssigkeitströpfchen ergibt.

Sei die gesamte Bindungsenergie

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5. \quad (3.1)$$

Der erste Term (Hauptbeitrag) wird Kondensations- oder Volumenenergie genannt, und ist

$$B_1 = a_V A$$

proportional zum Volumen, also A . Der zweite Term sagt aus, dass die Nukleonen an der Oberfläche weniger gebunden sind,

$$B_2 = -a_S A^{2/3}.$$

Der nächste Term berücksichtigt die erniedrigte Bindung durch die Coulomb-Abstoßung:

$$B_3 = -a_C Z^2 A^{-1/3}.$$

Dann folgt der Term B_4 , der der Tatsache Rechnung tragen soll, dass unsymmetrische Z und N -Zahlen zu einer niedrigeren Bindung führen,

$$B_4 = -a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A},$$

und schließlich wird noch ein (ebenfalls nur empirisch begründeter) Paarungs-Energie-Term eingeführt, der gerade-gerade-Kerne (A und Z gerade) über ungerade-ungerade Kerne favorisiert

$$B_5 = \begin{cases} +\delta & \text{gg - Kerne} \\ 0 & \text{sonst} \\ -\delta & \text{uu - Kerne} \end{cases}$$

wobei $\delta \approx a_p A^{-1/2}$ ist.

Diese Terme in 3.1 eingesetzt und B entsprechend in 2.1 verwendet, ergibt die Weizsäckersche Massenformel. Die Konstanten wurden aus gemessenen Kernmassen einiger Kerne bestimmt und betragen (von Quelle zu Quelle leicht unterschiedliche Zahlenwerte)

$$\begin{aligned} a_v &= 17.011 M_u = 15.85 \text{ MeV}/c^2 \\ a_S &= 19.691 M_u = 18.34 \text{ MeV}/c^2 \\ a_C &= 0.767 M_u = 0.71 \text{ MeV}/c^2 \\ a_A &= 99.692 M_u = 92.86 \text{ MeV}/c^2 \\ a_p &= 12.3 M_u = 11.46 \text{ MeV}/c^2 \end{aligned}$$

Das Maximum der Bindungsenergie bei $A \approx 60$ wird durch die Abnahme des Term B_2 und die Zunahme von B_3 erklärt.

Es gibt natürlich mittlerweile wesentlich genauere Massenformel, aber diese ist relativ einsichtig, wenn auch sehr empirisch fundiert.

[Bemerkung zu den Einheiten: Da die Konstanten a_i in atomaren Masseneinheiten gegeben sind, Gleichung 3.1 aber fuer die Bindungsenergie aufgestellt ist, ist auf der rechten Seite noch ein Faktor c^2 dazu zu denken.]

3.1.3 Stabilität

Es ist immer möglich, durch Zuführung von Energie Kerne wieder aufzubrechen. Ist die Bindungsenergie aber gering, kann das auch spontan geschehen, wenn dadurch ein günstigerer Energiezustand erreichbar ist. Sehr schwere Kerne zerfallen oft in 2 ähnlich große Produkte. Beim Zerfall werden aber Zwischenzustände durchlaufen, deren Energie höher als Ausgangs- und Endzustand sind (Coulomb-Wall ist auch von innen erst einmal zu überwinden). Auch hier helfen quantenmechanische Tunneleffekte. Auch "stabile" Kerne können zerfallen, allerdings mögen die Halbwertszeiten sehr lange sein. Der "letzte stabile Kern", ^{209}Bi , hat eine α -Zerfallszeit von $2 \cdot 10^{18}$ Jahren.

Ein Maß für die Stabilität eines Kerns ist die *Separationsenergie* gegen Entfernung eines Protons, Neutrons, oder α -Teilchens, die einfach die Differenz der Massen (oder Bindungsenergien) von Ausgangskern und seiner Produkte ist. Zum Beispiel für α -Zerfall von $^{16}\text{O} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^4\text{He}$:

$$S_\alpha(^{16}\text{O}) = m(^{12}\text{C}) + m(^4\text{He}) - m(^{16}\text{O}) = 7.16 \text{ MeV}$$

Zum Vergleich, die Separationsenergie für Protonen ($^{16}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{N} + p$) ist $S_p = 12.13 \text{ MeV}$ und die für Neutronen $^{16}\text{O} \rightarrow ^{15}\text{O} + n$ ist $S_n = 15.67 \text{ MeV}$. Diese Energien sind groß im Vergleich zur Bindungsenergie/Nukleons (8 MeV), wie man das für den "doppelt-magischen" ^{16}O -Kern erwarten sollte.

Allgemein kann man die Separationsenergien für p , n , und α schreiben als Funktion der Massenexzesse oder Bindungsenergien:

$$\begin{aligned} S_p &= \Delta M(A-1, Z-1) + \Delta M(1, 1) - \Delta M(A, Z) \\ &= B(A, Z) - B(A-1, Z-1) \\ S_n &= \Delta M(A-1, Z) + \Delta M(1, 0) - \Delta M(A, Z) \\ &= B(A, Z) - B(A-1, Z) \\ S_\alpha &= \Delta M(A-4, Z-2) + \Delta M(4, 2) - \Delta M(A, Z) \\ &= B(A, Z) - B(A-4, Z-2) - B(4, 2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ist S_i negativ, kann spontane Emission eines Nukleon oder Kerns stattfinden. Protonen und Neutronen werden entweder nahezu instantan emittiert, oder nach einem β -Zerfall (z.B. Emission eines β^+ zur Umwandlung $p \rightarrow n$), wenn der Kern sich noch in einem energetisch angeregten Zustand befindet. Aufgrund des Symmetrieterms B_4 in 3.1 sind nur Kerne in der näheren Umgebung der symmetrischen Kerne stabil.

Spontaner Kernzerfall (*Kernspaltung*) findet statt wegen der mit Z wachsenden Coulomb-Abstoßung (s. 3.1). Sei $E_{\text{sym}} = \Delta M(A, Z) - 2\Delta M(A/2, Z/2)$ der Energiegewinn bei symmetrischer Spaltung ($E_{\text{sym}} = -S_{\text{sym}}$, analog zu S_p , etc.). Betrachte nun zwei sich berührende Kugeln mit Ladung $Z/2$ im Abstand $2R = 2r_0(A/2)^{1/3}$.

Das Coulombpotential ist

$$\begin{aligned}
E_{\text{Coul}} &= \frac{(Ze/2)^2}{2r_0} \left(\frac{A}{2}\right)^{-1/3} \\
&= \frac{2^{1/3} e^2 \hbar c}{8 \hbar c r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} \\
&= 0.157 \frac{1}{137} \frac{197}{1.2} \frac{Z^2}{A^{1/3}} [\text{MeV}] \\
&= 0.188 \frac{Z^2}{A^{1/3}} [\text{MeV}] \\
&= 0.265 a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} [\text{MeV}]
\end{aligned}$$

Spaltung findet statt (aus 3.1 unter Vernachlässigung des Terms B_5) für $E_{\text{sym}} > E_{\text{Coul}}$ oder

$$\frac{Z^2}{A} > \frac{2.4a_S}{a_C} \approx 54$$

(s. Abb. 3.4). Eine etwas bessere Abschätzung ergibt einen Zahlenwert von 45. Die Halbwertszeiten liegen für $Z^2/A = 37$ bei $\approx 10^{10}$ Jahren, und für $Z^2/A = 40$ nur noch bei 1 Jahr.

Weitere Zerfälle: *Gamma-Zerfall*, also die Emission eines Photons geschieht aus angeregten Zuständen heraus, z.B. nach Kernspaltung. Außerdem folgt einer β^+ -Emission (s.u.) sofort ein γ durch die Materie-Antimaterie-Annihilation. Im Fall Positron-Elektron-Annihilation (ohne weitere kinetische Energien) sind das die bekannten 0.511 MeV Photonen.

Beta-Zerfall ist ein Zerfall, der durch die *schwache Wechselwirkung* stattfindet. Die schwachen Prozesse sind ($\beta^+ = e^+$ bezeichnet das Positron, e^- das Elektron):

- Positron-Emission: $(A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) + \beta^+ + \nu$
- Elektron-Einfang: $e^- + (A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) + \nu$
- Elektron-Emission: $(A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + e^- + \bar{\nu}$
- Positron-Einfang: $\beta^+ + (A, Z) \rightarrow (A, Z + 1) + \bar{\nu}$

Die Zerfälle sind Temperatur unabhängig, und somit in gewisser Weise eingebaute Uhren. A bleibt erhalten bei diesen Reaktionen. Sehen wir uns die Formel für den Massendefekt und Gleichung 3.1 an, sortiert nach ladungsun- und -abhängigen Termen:

$$m(A, Z) - Am_n + a_V A - a_S A^{2/3} - \delta(A) = Z(m_p + m_e - m_n) + a_A \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

Die rechte Seite hängt von Z ab. Das stabilste Isobar findet man, wenn man das Minimum der linken Seite sucht:

$$\left(\frac{\partial m(A, Z)}{\partial Z}\right)_A = (m_p + m_e - m_n) - 2a_A \frac{(A/2 - Z)}{A} + 2a_C \frac{Z}{A^{1/3}} = 0$$

Das ist die Linie der *betastabilen Kerne*, auch ‘‘Tal der betastabilen Kerne’’ genannt. Dort liegen die stabilsten Nuklide, die in der Natur vorkommen. Die Gleichung dafür lautet

$$N \approx Z + 0.0015 A^{2/3} Z \tag{3.3}$$

Einen Überblick über die verschiedenen Grenzen der Stabilität gibt Abb. 3.4.

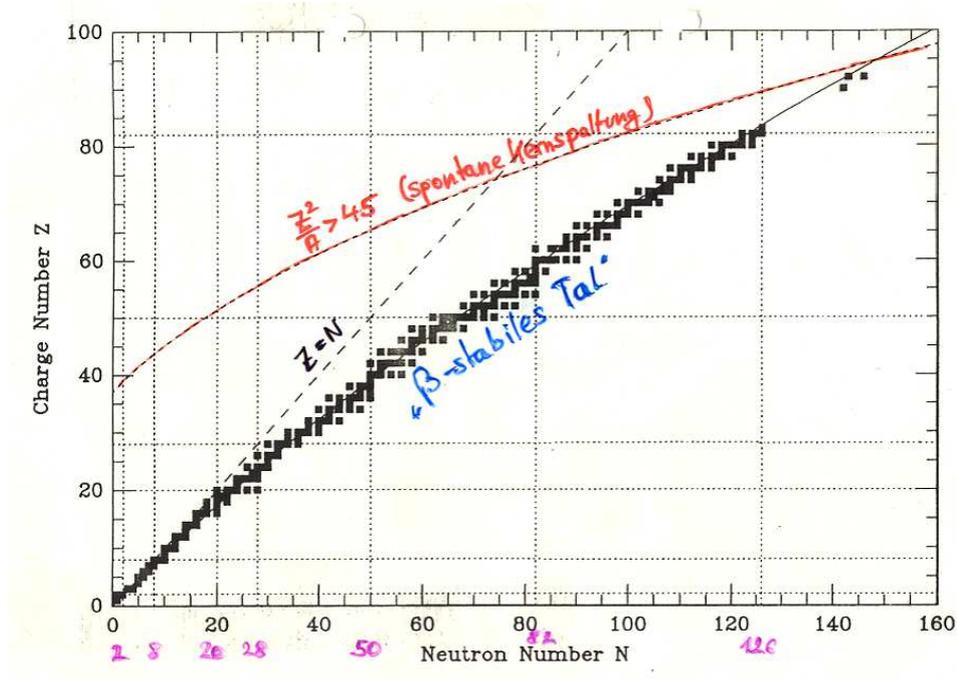
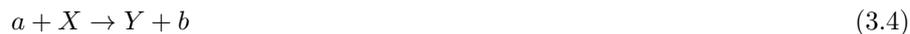


Abbildung 3.4: Das β -stabile Tal, die magischen Protonen- und Neutronen-Zahlen (gestricheltes Gitter), die $Z = N$ -Linie und die Grenze für spontane Kernspaltung

3.2 Kernreaktionen und -reaktionsraten

3.2.1 Kinematik und Energetik

Wir betrachten den Standardfall einer nuklearen Reaktion: zwei Ausgangspartner reagieren zu zwei Produkten; eine symbolhafte Beschreibung ist



zum Beispiel für $d + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{13}\text{C} + p$ ($d = {}^2\text{H}$). Alternativ wird auch verwendet $X(a, b)Y$. Die Unterscheidung zwischen a, b einerseits und X, Y andererseits stammt aus dem Labor: a wird auf X geschossen, das in Y umgewandelt wird, und b nimmt den Impuls mit und verlässt das *Target*. In den Reaktionen wird natürlich Gesamtenergie und Impuls (und Drehimpuls) erhalten. Es bietet sich an, die Kinetik im System des Massenzentrums zu betrachten. Die Bewegung des Massenzentrums bleibt wegen der Impulserhaltung unbeeinflusst, lediglich die Kinematik der Reaktionsteilnehmer relativ dazu verändert sich.

Impuls:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{V} \quad (3.5)$$

wobei \vec{v}_i die Geschwindigkeiten der Reaktionspartner und \vec{V} die des Schwerpunktes ist; diese lässt sich aus 3.5 berechnen. Der Impuls eines Teilchens relativ zum Schwerpunkt ist

$$m_1 (\vec{v}_1 - \vec{V}) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \equiv \mu \vec{v} \quad (3.6)$$

mit der Definition von *reduzierter Masse* μ und *Relativgeschwindigkeit* \vec{v} . Für Teilchen 2 geht das natürlich analog, allerdings mit einem “-” vor der rechten Seite, da ja die Summe der Relativimpulse Null sein muss.

Die gesamte **kinetische Energie** vor der Kollision ist

$$E_{k,i} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 \quad (3.7)$$

Die zweite Formulierung spaltet die kinetische Energie in die des Schwerpunktes und die relativ dazu auf. Der erste Term muss auch nach der Reaktion dieselbe sein. Der zweite ist der für die Reaktionsenergetik interessante. Allerdings gelten diese Aussagen nur im nicht-relativistischen Fall und wenn die Gesamtmasse in der Kollision (Reaktion) erhalten bleibt. Für unsere Reaktionen gilt das nicht, weil ja $\Delta M \neq 0$ (s. die Betrachtung der Nukleonenmassen und der Bindungsenergien; diese tauchen in irgendeiner Form wieder in der Energiegleichung auf, z.B. als $\Delta E_k = \Delta M c^2$). In typisch nieder-energetischen Kernreaktionen ist $\Delta M/M \approx 10^{-2} \dots 10^{-4}$, und die Annahme konstanter Masse relativ gut erfüllt. Daher kann angenommen werden, dass die kinetische Energie des Schwerpunktsystems erhalten bleibt. Es ergibt sich als Energiegleichung

$$E_{aX} + (m_a + m_X)c^2 = E_{bY} + (m_b + m_Y)c^2 \quad (3.8)$$

wobei E_{aX} die kinetische Energie von a und X im Schwerpunktssystem ist. Ob man in dieser Gleichung Kern- oder Atommassen nimmt, beeinflusst die Energien nur um einige eV, relativ zu typischen Reaktionsenergien von MeV. In allen Reaktionen bleiben erhalten:

1. elektrische Ladung
2. Zahl der Nukleonen
3. Zahl der Leptonen
4. Gesamtenergie

Wegen der Gesamt-Nukleonenzahl-Erhaltung kann man von beiden Seiten der Gleichung 3.8 die Atomzahlen $\times M_u$ abziehen, wodurch die Massen durch die Massenexzesse (2.2) ersetzt werden:

$$E_{aX} + (\Delta M_a + \Delta M_X) = E_{bY} + (\Delta M_b + \Delta M_Y) \quad (3.9)$$

wobei diese gleich in Energie-Einheiten (also ohne c^2) zu verstehen sind.

Für die Beispiel-Reaktion von oben ergibt sich:

$$E_{d,^{12}\text{C}} + 13.1359 + 0 = E_{p,^{13}\text{C}} + 3.1246 + 7.2890$$

oder

$$E_{p,^{13}\text{C}} = E_{d,^{12}\text{C}} + 2.7223 \text{ MeV}$$

(zur Erinnerung: $\Delta M(^{12}\text{C}) = 0$ per definitionem).

3.2.2 Wirkungsquerschnitt und Reaktionsrate

Der Begriff *Wirkungsquerschnitt* stammt aus Streuexperimenten (z.B. von Rutherford) und ist die geometrische Veranschaulichung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Projektil mit dem Ziel (Target) streut bzw. wechselwirkt. Die Einheit ist daher die einer Fläche (cm^2). In diesem Bild ist die Definition des Wirkungsquerschnitts σ

$$\sigma[\text{cm}^2] = \frac{\text{Zahl der Reaktionen/Targetkern/Zeit}}{\text{Zahl der einfallenden Teilchen/cm}^2/\text{Zeit}}$$

Der Nenner in dieser Gleichung ist der Fluss der einfallenden Teilchen, der von der Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen abhängt, und daher ist $\sigma = \sigma(v)$.

Hat das Target-Gas eine Teilchendichte N_X , ist die gesamte Zahl der Reaktionen pro Volumeneinheit $\sigma(v)N_X$ (Gesamtwirkungsquerschnitt) mal dem Fluss der Teilchen a . Dieser ist bei konstanter Teilchendichte N_a und der Relativgeschwindigkeit v zu X gleich vN_a . Damit wird die

Zahl der Reaktionen pro Volumen- und Zeiteinheit

$$r_{aX} = \sigma(v)vN_aN_X \quad (3.10)$$

Mittlere Lebenszeit Wir betrachten $\tau_a(X)$, die mittlere Lebenszeit von X gegen Reaktionen mit a im Sinne von

$$\left(\frac{\partial N_X}{\partial t}\right)_a = -\frac{N_X}{\tau_a(X)},$$

wobei die partielle Ableitung hier symbolisch zu verstehen ist als die Änderung von N_X aufgrund von Reaktionen mit a . Diese Änderung ist aber gleichzeitig $-r_{aX}$ (Glg. 3.10), so dass

$$\tau_a(X) = \frac{N_X}{r_{aX}} = (\sigma(v)vN_a)^{-1} \quad (3.11)$$

Klassische Abschätzung für σ : Für klassische, nicht wechselwirkende Teilchen ist der Wirkungsquerschnitt einfach gleich der Querschnittsfläche. Für zwei Sorten 1 und 2 findet eine "Reaktion" statt, wenn ihr Abstand kleiner als die Summe ihrer Radien ist, also $< r_1 + r_2$. Atomkerne haben (nach Kapitel 2) $r = r_0A^{1/3}$, also ist der klassische Wirkungsquerschnitt σ_k

$$\sigma_k = \pi r_0^2 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})^2$$

Der Vorfaktor hat den numerischen Wert $4.5 \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$. Die Flächeneinheit 10^{-24} cm^2 wird auch *1 barn* genannt.

Im Schwerpunktsystem ist

$$v = \left(\frac{2E}{\mu}\right)^{1/2} = \left(\frac{2E(A_1 + A_2)}{A_1 A_2 M_u}\right)^{1/2}$$

wenn wir für die Massen m_i näherungsweise $A_i M_u$ setzen. Und daraus

$$\sigma_k v = 3.8 \cdot 10^7 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})^2 \left(E [\text{MeV}] \frac{A_1 + A_2}{A_1 A_2}\right)^{1/2} [\text{cm}^3/\text{s}]$$

Wenn wir das klassische Bild um die Coulomb-Wechselwirkung ergänzen, so muss E_k (kinetische Energie) größer als die Coulomb-Abstoßung sein. Dann findet Wechselwirkung statt, sonst nicht (also entweder-oder).

$$E_{\text{Coul}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

und $r < r_0(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$. Der klassische Umkehrpunkt (UP) bei Energie E_k ist

$$r_{\text{UP}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{E_k}$$

Thermische Gase und Geschwindigkeitsverteilung: In astrophysikalischen Umgebungen haben wir keine Kontrolle über v wie im Labor/Beschleuniger. Stattdessen finden wir ein Gas (Plasma) mit kennzeichnender Temperatur vor. Aus der Thermodynamik wissen wir, dass für klassische Teilchen ($T \gg T_{\text{Fermi}}$) die *Maxwell-Boltzmann-Statistik* die Verteilung im Impulsraum beschreibt:

$$N(p) dp = N \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right), \quad (3.12)$$

wobei k die *Boltzmann-Konstante*, m die Masse des Teilchens, und $N(p)dp$ die Anzahldichte aller Teilchen mit Impuls zwischen p und $p + dp$ ist.

Der Übergang von p zu v ist trivial, da $p = mv$. Betrachten wir nicht den Betrag, sondern die drei Vektorkomponenten v_i der Geschwindigkeit, so gilt (wegen $4\pi v^2 dv = dv_x dv_y dv_z$ und $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$) für die Teilchendichte mit einer (vektoriellen) Geschwindigkeit zwischen (v_x, v_y, v_z) und $(v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$

$$N(\vec{v}) dv_x dv_y dv_z = N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z \quad (3.13)$$

Damit wird in 3.10 statt einer konstanten eine mittlere Geschwindigkeit auftauchen, die sich aus dem Integral über das Produkt von 3.13 für a und X mit ihren jeweiligen Geschwindigkeitsverteilungen ergibt. Mit Hilfe von Gleichung 3.6 zerlegt man die Geschwindigkeiten wieder in Schwerpunkts- und Relativgeschwindigkeiten

$$N_a(\vec{v}_a) d^3 v_a N_X(\vec{v}_X) d^3 v_X = N_a N_X \frac{(m_a m_X)^{3/2}}{(2\pi kT)^3} \exp\left[-\frac{(m_a + m_X)V^2}{2kT} - \frac{\mu v^2}{2kT}\right] d^3 v_a d^3 v_X \quad (3.14)$$

Wir müssen jetzt noch die Variablentransformation von $d^3 v_a d^3 v_X$ nach $d^3 v d^3 V$ mit Hilfe der Jacobi-Determinanten durchführen, was aber einen Faktor 1 ergibt. Somit erhalten wir aus 3.14

$$\begin{aligned} N_a(\vec{v}_a) d^3 v_a N_X(\vec{v}_X) d^3 v_X &= N_a N_X \cdot \\ &\cdot \left\{ \left(\frac{m_a + m_X}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{(m_a + m_X)V^2}{2kT}\right] d^3 V \right\} \cdot \\ &\cdot \left\{ \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\mu v^2}{2kT}\right] d^3 v \right\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Der erste Term ist die Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Schwerpunktsystem, die wie immer normiert ist, und damit — physikalisch verständlich, weil es die Geschwindigkeitsverteilung des Schwerpunktes darstellt — bei Integration “1” ergibt. Die Integration kann über $d^3 V$ getrennt durchgeführt werden, da das mittlere $\sigma(v)$ nur von den Relativgeschwindigkeiten v abhängt. Damit erhalten wir für r_{aX} :

$$\begin{aligned} r_{aX} &= \int N_a(\vec{v}_a) N_X(\vec{v}_X) v \sigma(v) d^3 v_a d^3 v_X \\ &= N_a N_X \int v \sigma(v) \left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) d^3 v \end{aligned} \quad (3.16)$$

$d^3 v = 4\pi v^2 dv$ kann hier wieder gesetzt werden, wenn man sich nur um den Betrag der Relativgeschwindigkeit kümmern will, wie das ja wegen $\sigma(v)$ sinnvoll ist.

¹Wir haben hier $d^3 v_i$ für $dv_{i,x} dv_{i,y} dv_{i,z}$ geschrieben

Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned}
r_{aX} &= N_a N_X \int v \sigma(v) \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv \\
&\equiv N_a N_X \int v \sigma(v) \phi(v) dv \\
&\equiv N_a N_X \langle \sigma(v)v \rangle
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Gleichung 3.17 beinhaltet die Definition der Größe $\langle \sigma(v)v \rangle$, die auch geschrieben werden kann als

$$\lambda \equiv \langle \sigma(v)v \rangle = 4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 \sigma(v) \exp\left(-\frac{\mu v^2}{2kT}\right) dv \tag{3.18}$$

Gleichungen 3.16 und 3.18 können noch verallgemeinert werden für den Fall, dass a und X (oder Teilchensorte 1 und 2) identisch sind, wie z.B. bei der Proton-Proton-Reaktion; in diesem Fall dürfen die Dichten nicht doppelt gezählt werden. Wir berücksichtigen das durch Einführen des *Kronecker-Symbols* δ_{12} , welches den Wert 1 hat, wenn Sorte 1 und 2 identisch sind, und 0 sonst:

$$r_{12} = (1 + \delta_{12})^{-1} N_1 N_2 \langle \sigma(v)v \rangle \tag{3.19}$$

Wir kehren kurz zur Lebenszeit (von Sorte 2 gegen Reaktionen mit Sorte 1) $\tau_1(2)$ zurück. Diese ist jetzt entsprechend 3.11

$$\tau_1(2) = (1 + \delta_{12})^{-1} \frac{N_2}{r_{12}} = (\lambda_{12} N_1)^{-1} \tag{3.20}$$

Man beachte, dass der Term $(1 + \delta_{12})^{-1}$ weggefallen ist. Das ist auch richtig, da im Falle identischer Reaktionspartner zwar nur halb so viele Reaktionen/Sekunde gezählt werden sollten, aber gleichzeitig jede Reaktion zwei Kerne verbraucht.

Wenn mehrere Reaktionen Kerne der Sorte X verbrauchen, so ist

$$\frac{1}{\tau(X)} = \sum_i \frac{1}{\tau_i(X)}.$$

3.2.3 Nicht-resonante Reaktionen und der quantenmechanische Wirkungsquerschnitt

Wir haben bisher nur die Geschwindigkeits- oder Energieverteilung der Teilchen in einem Gas der Temperatur T explizit betrachtet, nicht aber den Wirkungsquerschnitt (mit Ausnahme der klassischen Abschätzung zu Beginn des letzten Abschnittes). Wir wenden uns jetzt $\langle \sigma(v)v \rangle$ für nicht-resonante Reaktionen zu.

Das zu überwindende Coulompotential ("Coulomb-Wall") zwischen zwei geladenen Teilchen ist

$$V = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} = \frac{1.44 Z_1 Z_2}{R(\text{fm})} [\text{MeV}]. \tag{3.21}$$

Die thermische Energie ist $kT = 8.62 \cdot 10^{-8} T [\text{keV}]$ (T in Kelvin). Für Temperaturen im Bereich $10^7 \dots 10^8$ K ist kT immer noch im Bereich weniger keV. Berechnet man in 3.13 das Verhältnis der Teilchen mit kinetischer Energie gleich der thermischen zu dem mit 100-mal höherer Energie, so ergibt sich ein Wert von 10^{43} . Das zeigt, dass fast keine Teilchen eine kinetische Energie haben, die ausreichen würde, den Coulombwall zu überwinden.

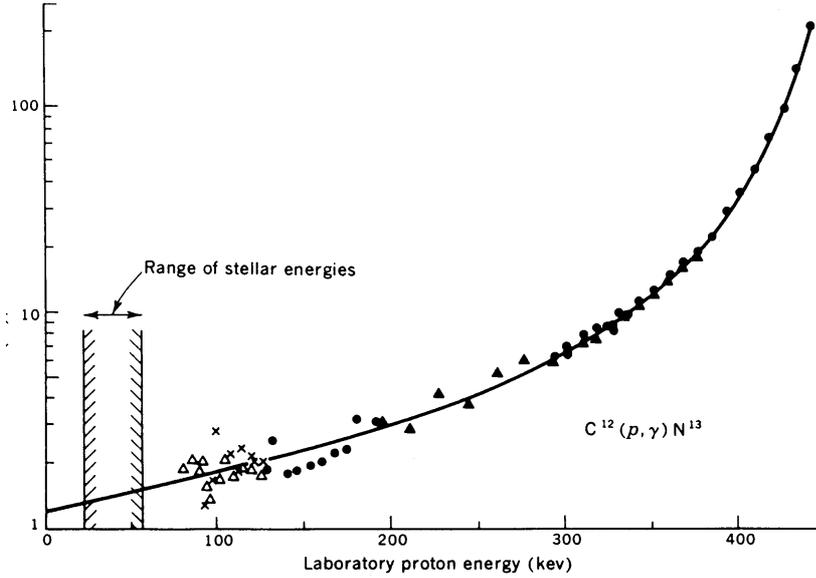


Abbildung 3.5: $S(E)$ für die nicht-resonante Reaktion $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$ als Funktion der Labor-Energie. $\log S(E)$ ist im Bereich stellarer Energien nur schwach und nahezu linear von E abhängig. Allerdings ist der Bereich für Experiments fast nicht zugänglich, daher fehlen verlässliche Messwerte.

Gamow hat aber gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeit P_p , dass zwei geladene Teilchen mit beliebiger Relativgeschwindigkeit v die Coloumb-Abstoßung überwinden, quantenmechanisch gegeben ist durch die Proportionalität

$$P_p \propto \exp\left(-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right) \quad (3.22)$$

Außerdem ist der quantenmechanische Wirkungsquerschnitt noch proportional zu einem “geometrischen” Faktor $\pi\lambda^2$ mit der *de Broglie-Wellenlänge* λ , die umgekehrt proportional zum Quadrat des Impulses ist

$$\pi\lambda^2 \propto p^{-2} \propto E^{-1}.$$

Diese beiden quantenmechanischen Terme variieren stark bei niedrigen Energien. Insgesamt ist es günstig, den unbekanntten Proportionalitätsfaktor in eine Größe $S(E)$ zu schieben, so dass

$$\sigma(E) = S(E) \frac{1}{E} \exp\left(-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right) \quad (3.23)$$

E hängt mit v über die kinetische Energie $mv^2/2$ und den Impuls mv zusammen (nicht-relativistische Teilchen).

Der Vorteil dieser Definition von $S(E)$ ist, dass die stark energieabhängigen Faktoren herausgenommen sind, und die unbekanntere Größe $S(E)$ relativ schwach von E abhängt. Das ist in Abb. 3.5 im Fall der Reaktion $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$ dargestellt. Die Einheit von $S(E)$ ist keV barn; die de Broglie Wellenlänge ist in praktischen Einheiten $\lambda^2 = (657 \cdot 4\pi)/(mE) 10^{-24} \text{ cm}^2$ (also barn), wobei die Masse m in Einheiten von M_u und die Energie E in keV zu nehmen sind. In der Abbildung wird die Laborenergie der einfallenden Protonen auf ruhende Targets verwendet, im stellaren Plasma muss es die Energie relativ zum Massenschwerpunkt sein, also $E = \mu v^2/2$.

Der Wirkungsquerschnitt für diese Reaktion (als Beispiel) liegt für $E \approx 0.05$ MeV bei 10^{-12} barn, steigt rapide an bis 10^{-6} barn bei 0.3 MeV und hat ein Maximum (allerdings in einer Resonanz) um 10^{-4} bei 0.5 MeV. Eine Extrapolation des Wirkungsquerschnitts von $E \approx 0.05$ MeV zu 0.025 MeV (stellarer Bereich) ist sehr unsicher. Dagegen erscheint die Extrapolation von $S(E)$ nach Abb. 3.5 relativ zuverlässig möglich.

Umformungen:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-bE^{-1/2}\right)$$

mit

$$b = 31.28 Z_1 Z_2 A^{1/2} \text{ keV}^{1/2}$$

wobei A das *reduzierte Atomgewicht* ist:

$$A \equiv \frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\mu}{M_u}$$

Wir können noch $\phi(v)dv$ umschreiben als Funktion der Energie:

$$\psi(E)dE = \phi(v)dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E}{kT} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{dE}{(kTE)^{1/2}}$$

und damit ergibt sich für $\lambda = \langle \sigma(v)v \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \sigma(v)v \rangle &= \int_0^\infty \sigma(E)v(E)\psi(E)dE & (3.24) \\ &= \int_0^\infty \frac{S(E)}{E} \exp(-bE^{-1/2}) \sqrt{\frac{2E}{\mu}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{E}{kT} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \frac{dE}{(kTE)^{1/2}} \\ &= \left(\frac{8}{\mu\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp\left(-\frac{E}{kT} - bE^{-1/2}\right) dE \end{aligned}$$

Das Integral wird von den exponentiellen Faktoren bestimmt; dabei geht der erste Term schnell gegen Null für große E , während der zweite für kleine E schnell verschwindet. Insgesamt ergibt sich also ein Maximum für das Produkt; dieses Maximum wird *Gamow-Peak* genannt. Dort finden die nuklearen Reaktionen statt. Abb. 3.6 illustriert typische Verhältnisse. Die Breite Δ des Peaks ist nur einige keV; über diesen Bereich kann nach Abb. 3.5 $S(E)$ sogar als konstant angenommen werden, so dass sich 3.24 vereinfacht zu

$$\lambda = \left(\frac{8}{\mu\pi}\right)^{1/2} \frac{S(E)}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E}{kT} - bE^{-1/2}\right) dE \quad (3.25)$$

und der Integrand approximiert werden kann, und zwar durch eine Gauss-Funktion. Man erhält dann für den Integranden

$$\exp\left(-\frac{E}{kT} - bE^{-1/2}\right) \approx C \exp\left[-\left(\frac{E - E_0}{\Delta/2}\right)^2\right] \quad (3.26)$$

wobei

$$C = \exp\left(-\frac{E_0}{kT} - bE_0^{-1/2}\right) = \exp\left(-\frac{3E_0}{kT}\right) \equiv \exp(-\tau),$$

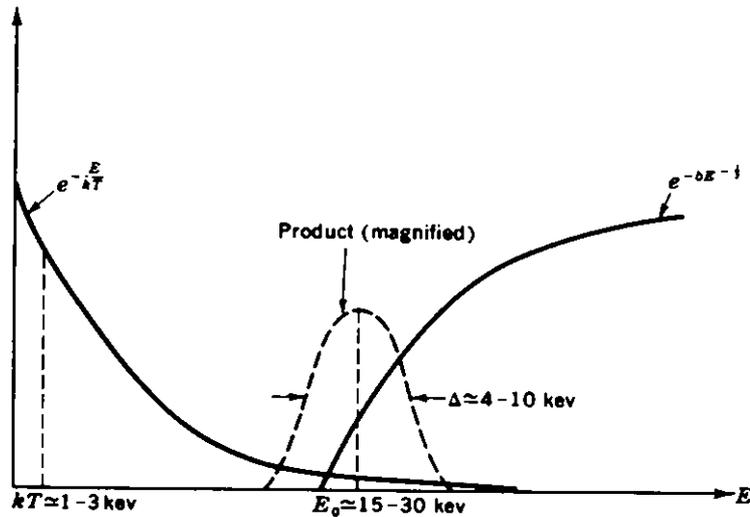


Abbildung 3.6: Die beiden Exponentialfaktoren in 3.24 und der resultierende “Gamow-Peak”. Die Temperatur in diesem Beispiel liegt bei 1–3 keV, der Peak aber um 15–20 keV.

$$\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} (E_0 kT)^{1/2} = 0.75 (Z_1^2 Z_2^2 A T_6^5)^{1/2},$$

und

$$E_0 = \left(\frac{bkT}{2} \right)^{2/3} = 1.220 (Z_1^2 Z_2^2 A T_6^2)^{1/3}.$$

($T_n \equiv T/10^n$ K). E_0 ist die *effektivste Energie für thermonukleare Reaktionen* und wird aus der Suche nach einem Maximum des ursprünglichen Integranden gewonnen. C ergibt sich aus der Forderung, dass die Gauss-Funktion genau diesen Maximalwert reproduziert, und Δ aus der Forderung, dass die zweite Ableitung an dieser Stelle der der ursprünglichen Funktion entspricht.

Mit der Definition von τ in letzter Gleichung (von C) lässt sich 3.24 noch kompakter und die Temperatur-Abhängigkeit als eine τ -Abhängigkeit schreiben. Mit der Integration über die Gauss-Funktion erhält man am Ende

$$\lambda \propto \frac{S(E_0)}{AZ_1 Z_2} \tau^2 \exp -\tau$$

wobei der Proportionalitätsfaktor von den gewählten Einheiten (cgs, oder keV barn, etc.) abhängt.

Außerdem erhält man in der Nähe einer beliebigen Temperatur T_1 , dass

$$r_{12}(T) \approx r_{12}(T_1) \left(\frac{T}{T_1} \right)^n$$

wobei $n = (\tau - 2)/3$ ist. Diese Art der Näherung der Temperaturabhängigkeit wird uns noch öfters begegnen. Der Wert von n kann für wichtige Reaktionen zwischen 2 und 60 liegen!

Reaktionsrate für den praktischen Gebrauch: Dafür lohnt es sich, die Dichte der Materie explizit einzuführen. Mit

$$N_j = \rho N_A \frac{X_j}{A_j}$$

ergibt sich

$$r_{12} = \frac{2.62 \cdot 10^{29}}{(1 + \delta_{12})AZ_1Z_2} \rho^2 \frac{X_1X_2}{A_1A_2} S_0 [\text{keV barn}] \tau^2 e^{-\tau} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (3.27)$$

Korrekturen und Ergänzungen zu 3.27:

1. verbesserte Näherung für

$$S(E) = S(E_0) + \left(\frac{dS}{dE} \right)_{E_0} (E - E_0)$$

2. verbesserte Berechnung des ursprünglichen Integrals
3. Berücksichtigung, dass andere freie Ladungen (z.B. Elektronen) das Coulomb-Potential ändern (schächen) können; Stichwort: *Elektronen-Abschirmung*, s. 3.2.5.

3.2.4 Kernresonanzen

Bisher haben wir angenommen, dass $S(E)$, also der Faktor, der die Kernstruktur beschreibt, nur langsam mit E variiert. Das ist weitgehend äquivalent mit der Annahme, dass die Kernniveau-Dichte sehr hoch, fast kontinuierlich ist. Tatsächlich aber kann diese Annahme völlig falsch sein, falls ein diskreter Kernzustand mit einer Energie $E \approx E_0$, also in der Nähe des Gamow-Peaks liegt. Das kommt in der Tat relativ häufig vor.

In diesem Fall betrachtet man die Reaktion, als geschehe sie in 2 klar voneinander unterscheidbaren Schritten:



Es wird also ein zwischen Ausgangs- und Endprodukten liegender *Compound-Kern* angenommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass X zu Y reagiert, ist dann

$$P(X \rightarrow Y) = P(X \rightarrow C) \times P(C \rightarrow Y)$$

Die Reaktionsrate für einen Prozess mit mittlerer Lebensdauer τ ist

$$r_i = \frac{1}{\tau_i} = \frac{\Gamma_i}{\hbar}$$

wobei Γ_i die "Breite" der Resonanz ist. Die Zerstörungsrate des Compound-Kerns C durch i unabhängige Prozesse ist

$$r = \sum_i r_i = \frac{1}{\hbar} \sum_i \Gamma_i =: \frac{\Gamma}{\hbar}$$

Wird eine Reaktion durch Teilchen a ausgelöst, so ist $\sigma \sim \Gamma_a$, und die Wahrscheinlichkeit für Zerfall in den Ausgangskanal b somit $\sim \Gamma_b/\Gamma$, und daher

$$\sigma \sim \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} P(E)$$

Dabei ist der *Formfaktor* in dieser *Breit-Wigner-Resonanzformel*

$$P(E) = \frac{\Gamma/2\pi}{(E - E_r)^2 + (\Gamma/2)^2}$$

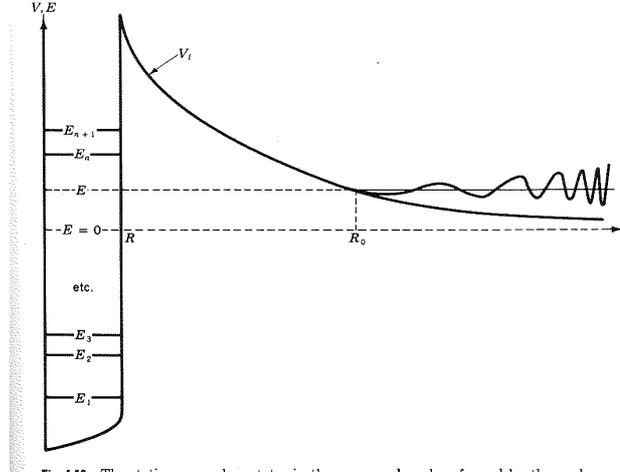


Abbildung 3.7: Ein Compound-Kern mit seinen Energieniveaus und einer einfallenden Teilchenwelle (s. Text).

wobei E_r die Resonanzenergie sei. Dieser Faktor beschreibt im Wesentlichen die Form der Resonanz, und taucht direkt wieder in der von σ auf.

Für schmale Resonanzen ($\Gamma \ll E_r$), die sich nicht überlappen, gilt

$$N_A \langle \sigma(v)v \rangle = 4.88 \cdot 10^{12} \frac{2l+1}{(AT_6)^{3/2}} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{\Gamma} \exp \left[-11.61 \frac{E_r}{T_6} \right] \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1} \quad (3.28)$$

wobei E_r in keV anzugeben ist. [Dieses Ergebnis erhält man aus der Breit-Wigner-Formel², wenn man die Gleichung für σ mit dem quasi-geometrischen Wirkungsquerschnitt einer planparallelen Teilchenwelle multipliziert und über v mittelt (hier: Deltafunktion wegen schmaler Resonanz).]

Befindet sich die Resonanz weit weg vom Gamow-Peak ($(E - E_r)^2 \gg \Gamma^2$), resultiert ihr Beitrag in einer additiven Konstante zur nicht-resonanten Rate.

Tatsächlich muss man bei resonanten Reaktionen auch die Erhaltung des Drehimpuls von einfallender Welle und Ausgangs- und Endnuklids ebenso berücksichtigen wie Paritäten und weitere quantenmechanische Auswahlregeln. Abbildung 3.7 zeigt die typische Situation: eine einfallende Welle, deren Wellenlänge immer größer wird (Energie nimmt ab), da Arbeit gegen den Coulomb-Wall geleistet wird. Klassisch würde die Welle bei R_0 umdrehen, aber quantenmechanisch kann sie durchtunneln und endet bei E . In diesem Beispiel liegt E im Flügel der Resonanz mit E_n . $E = 0$ wird definiert durch den Grundzustand des Compound-Kerns, E_1 plus der Masse der kollidierenden Teilchen.

Im Gegensatz zu früheren Bildern, die ähnlich aussahen, zeigt Abb. 3.7 das Potential V_l , das auch die Bewegung eines Kerns relativ zu einem anderen berücksichtigt. Daher sind auch Drehimpulse von Bedeutung, die erhalten bleiben müssen, und V_l beinhaltet im äußeren Bereich neben dem Coulomb-Potential auch einen Zentrifugal-Term:

$$V_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$$

Abb. 3.8 zeigt nochmals die Energieabhängigkeiten des Wirkungsquerschnitts für die einzelnen Beiträge. Neben den bekannten Termen (Abb. 3.6), die den Gamow-Peak ergeben, ist eine (entfernte) Resonanz mit eingeschlossen.

²s. Arnett, Supernovae and Nucleosynthesis; Princeton Univ. Press 1997; Seite 70ff.

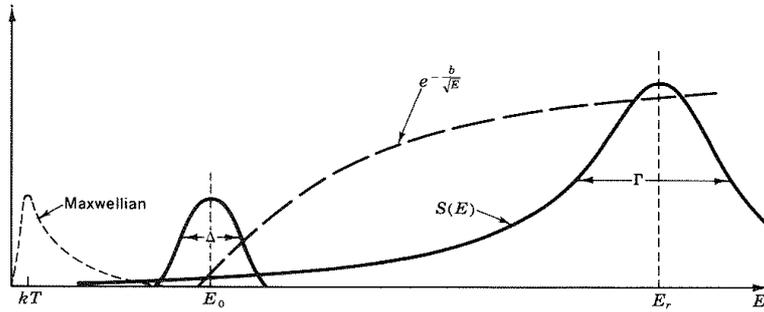


Abbildung 3.8: Hauptanteile des Wirkungsquerschnitt einer Reaktion mit nicht-resonantem und resonantem Anteil als Funktion der Energie.

Schließlich ist als Beispiel für eine resonante Reaktion der Fall $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$ in Abb. 3.9 gezeigt, wobei dieser Kern nur durch einen γ -Zerfall zum endgültigen Produkt wird. Der experimentell interessante Aspekt der gezeigten Situation ist, dass der Wirkungsquerschnitt von einer Resonanz definiert wird, die bei Energien liegt, bei denen gut gemessen werden kann. Die Massen von $^{12}\text{C} + p$ sind 1.943 MeV höher als der Grundzustand von ^{13}N (Definition der Nullpunktsenergie).

Es ist klar, dass die Kenntnis der Energieniveaus und der Resonanzbreiten, entweder aus einem guten Kernmodell oder aus Experimenten, essentiell ist für genaue Kernreaktionsraten. Die beschränkte Genauigkeit der Raten ist meistens eine direkte Folge mangelnder Kenntnis der Energieniveaus. Eine sehr detaillierte Behandlung dieses Problems findet sich in Clayton (1983), Kapitel 4.7.

3.2.5 Elektronen-Abschirmung

Ein letzter Beitrag zur effektiven Reaktionsrate wird durch die Elektronen-Abschirmung (auch: elektrostatische Abschirmung, Coulomb-Abschirmung) geleistet. Hintergrund ist die Tatsache, dass die Reaktionspartner kein reines Coulombpotential sehen, das durch ihre Ladungen alleine bestimmt ist, sondern dass sich im Plasma auch noch andere Ladungen befinden und bewegen. Im Mittel wird wegen der Ladungserhaltung zu erwarten sein, dass sich um die positiven Kerne Ladungswolken aus Elektronen befinden. Dies führt zu einer reduzierten Coulombabstoßung, solange sich das einfliegende Teilchen außerhalb dieser Wolke befindet, und führt zu einer tendenziell erhöhten Reaktionsrate gegenüber Laborbedingungen. Der Effekt ist typischerweise in der Größenordnung von 10%.

$$U_{\text{tot}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{12}} + U(r_{12})$$

wobei offensichtlich der zweite Summand das Abschirm- (Screening-)Potential beschreiben soll. Der klassische Umkehrradius ist typischerweise sehr viel größer als der Kernradius, aber auch viel kleiner als der Radius der Abschirmwolke. Das Potential $U(r_{12})$ ist näherungsweise konstant zwischen Kern- und Umkehrradius. Es ist aber dieser Bereich der entscheidende für die Tunnelwahrscheinlichkeit. Es wird daher meist $U(r_{12}) = U(0) = U_0$ in diesem Bereich gesetzt (gute Näherung), und der "Penetration-Faktor" ($\sim \int (U_{\text{tot}} - E)^{1/2} dE$) mit dieser Annahme berechnet.

Wir führen die Berechnung des neuen Penetration-Faktors hier nicht durch, sondern erwähnen lediglich, dass die Berücksichtigung von U_0 äquivalent zu einer Verschiebung der Energieskala ist. Im entscheidenden Integral³ findet sich ein

³s. Clayton (1983), Kapitel 4.8

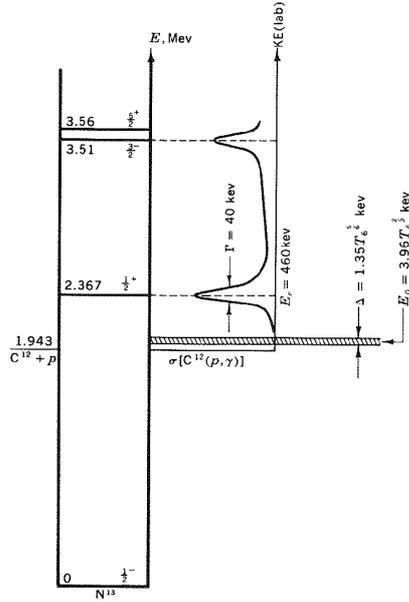


Abbildung 3.9: Energieschema des ^{13}N -Compoundkerns der Reaktion $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$. Die Energie der Ausgangskerne ist 1.943 MeV, das nächste Energieniveau liegt bei 2.367 MeV. Die stellare Energie (25 keV) ist durch den schraffierten Bereich gekennzeichnet. Das resonante Energieniveau kann besser vermessen werden als bei diesen stellaren Energien, und wird durch 3.28 beschrieben.

Term $(E' + U_0)^{1/2}$, in dem U_0 gegenüber der verschobenen Energievariablen E' vernachlässigt werden kann, sowie ein Exponentialfaktor $\exp(-(E' + U_0)/kT)$; hier kann der zweite Term $\exp(-U_0/kT)$ vor das Integral gezogen werden. Außerdem hatte sich die untere Integrationsgrenze von 0 nach $-U_0$ verschoben, doch ist der Integrand dort so klein, dass wieder 0 gesetzt werden darf. Als Ergebnis erhält man somit

$$r'_{12} = f r_{12} = \exp(-U_0/kT) r_{12} \quad (3.29)$$

d.h., dass die ursprüngliche Rate r_{12} um einen konstanten Faktor f , der U_0 enthält, erhöht wird.

Berechnung von U_0 Wenn kT groß gegen die durchschnittliche Coulombabstoßung zwischen den Ionen und Elektronen ist (in stellaren Plasmen zutreffend), kann man den *Debye-Hückel-Ansatz* für das abgeschirmte Potential um Teilchen 1 verwenden:

$$V_1 \approx \frac{eZ_1}{r} \exp\left(-\frac{r}{R_D}\right) \quad (3.30)$$

wobei R_D der *Debye-Radius* ist:

$$R_D = \left(\frac{kT}{4\pi e^2 \rho N_0 \zeta}\right)^{1/2} \quad (3.31)$$

ζ ist eine Ladungssumme über Teilchen mit Ladungen Z_i :

$$\zeta = \sum_i \frac{(Z_i^2 + Z_i) X_i}{A_i}$$

Die Wechselwirkung eines Teilchens 2 nahe bei 1 ist dann

$$eZ_2V_1 \approx \frac{Z_1Z_2e^2}{r} - \frac{Z_1Z_2e^2}{R_D} + \dots \quad (3.32)$$

d.h., dass man das abschirmende Potential mit dem zweiten Term näherungsweise identifiziert:

$$-\frac{U_0}{kT} = \frac{Z_1Z_2e^2}{kTR_D} = 0.188Z_1Z_2\sqrt{\frac{\rho\zeta}{T^3}} \quad (3.33)$$

Dieses Ergebnis gilt, solange $U_0 \ll kT$ (Voraussetzung für Debye-Hückel-Ansatz). Dann kann f auch als

$$f \approx 1 - \frac{U_0}{kT} + \dots$$

genähert werden. Meist ist dies in Sternen zulässig; dieser Limit heißt auch “weak screening limit” (Salpeter 1954).

Im gegensätzlichen Fall ($U_0 \gg kT$; “strong screening”) ist die Situation auch relativ einfach, weil man dann eine reine Elektronen-Sphäre hat, deren Energie abgeschätzt werden kann zu

$$U = -\frac{9}{10} \frac{(Ze)^2}{R_Z} \quad (3.34)$$

wobei

$$R_Z = \left(\frac{3Z}{4\pi n_e} \right)^{1/2}$$

Der schwierigste Fall ist natürlich der zwischen den beiden Grenzfällen, für den es kaum Lösungen gibt. Selbst das Screening im schwachen Grenzfall ist umstritten, doch gibt es bisher keine überzeugende Alternative zum *Salpeter-Screening* 3.33, die richtig oder auch nur besser zu sein scheint.

3.2.6 Reaktionsgleichgewicht und Rückreaktion

Die Reaktionsraten von $A + B \rightarrow C$ und der Rückreaktion $C \rightarrow A + B$ sind durch thermodynamische und statistische Bedingungen miteinander verknüpft. Sind alle Beteiligten Maxwell-Boltzmann-Teilchen, so gilt für ihr *chemisches Potential*

$$\mu_i = kT \ln \left[\frac{N_i}{g_i} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_i kT} \right)^{3/2} \right] + m_i c^2 \quad (3.35)$$

Im *chemischen Gleichgewicht* gilt ($i = \{A, B, C\}$)

$$\mu_A + \mu_B = \mu_C$$

und somit (Q : Energietönung der Reaktion)

$$\left(\frac{N_A N_B}{N_C} \right)_{GG} = \frac{g_A g_B}{g_C} \left(\frac{m_A m_B}{m_C} \right)^{3/2} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp(-Q/kT) \quad (3.36)$$

Außerdem gelten die Ratengleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dN_{(AB)}}{dt} &= -N_A N_B \langle \sigma(v)v \rangle_{AB} \\ \frac{dN_C}{dt} &= -\lambda_C N_C \end{aligned} \quad (3.37)$$

wo λ_C die Zerfälle von C bezeichnen soll. Aufgrund der Nukleonenzahl-Erhaltung müssen die beiden linken Seiten gleich sein, womit wir erhalten

$$\frac{N_A N_B}{N_C} = \frac{\lambda_C}{\langle \sigma(v)v \rangle_{AB}} \quad (3.38)$$

Beachte, dass die rechte Seite nicht von den Häufigkeiten abhängt und somit auch im Fall des chemischen Gleichgewichts gilt. Für diesen Fall können wir die Gleichung 3.36 verwenden und erhalten somit für die Rückreaktionsrate

$$\lambda_C = \langle \sigma(v)v \rangle_{AB} \cdot \frac{g_A g_B}{g_C} \left(\frac{m_A m_B}{m_C} \right)^{3/2} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp(-Q/kT) \quad (3.39)$$

bzw.

$$\frac{\lambda_C}{\rho N_A \langle \sigma(v)v \rangle_{AB}} = 9.8678 \cdot 10^9 \frac{g_A g_B}{g_C} \left(\frac{A_A A_B}{A_C} \right)^{3/2} \cdot \frac{T_9^{3/2}}{\rho} \exp \left[-11.605 \frac{Q \text{ MeV}}{T_9} \right] \quad (3.40)$$

Mit anderen Worten: die Rate der Rückreaktion kann aus der Wärmetönung Q der Hinreaktion und dem thermischen Gleichgewicht hergeleitet werden.

Für den Fall $A + B \rightarrow C + D$ ergibt sich eine zu 3.40 analoge Gleichung, nur dass bei den statistischen Gewichten g_i und den Massenzahlen A_i im Nenner jeweils C und D stehen müssen.

3.2.7 Reaktionstypen

Die folgenden Typen von Reaktionen treten in der Astrophysik auf

1. Standard Reaktionen mit Protonen, Neutronen, Helium-Kernen. Diese sind wegen der niedrigen Coulombabstoßung und der hohen Häufigkeiten bevorzugt, vor allem in den Hauptbrennphasen in Sternen:
 - (p, γ) , (γ, p) (Photo-Desintegration)
 - (n, γ) , (γ, n)
 - (α, γ) , (γ, α)
 - (p, n) , (n, p)
 - (α, n) , (n, α)
 - (α, p) , (p, α)
 - e^- - ($\bar{\nu}_e$!) und β^+ (ν_e) -Zerfall und -Einfang
2. Pycnonukleare Reaktionen bei hohen Dichten und niedrigen Temperaturen; diese sind selten und nur in Extremfällen von Bedeutung.
3. Mehrteilchen-Reaktionen: Wegen der stark abnehmenden Wahrscheinlichkeit für Mehrteilchen-Wechselwirkung ohne Bedeutung mit Ausnahme des 3α -Processes, der sehr wichtig ist (Kohlenstoff-Fusion)
4. Ion-Ion Reaktionen: z.B. $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, \gamma)^{24}\text{Mg}$ oder $^{12}\text{C}(^{12}\text{C}, p)^{23}\text{Ne}$; wichtig in späteren Brennphasen; stets unterschiedliche Ausgangskanäle (s. 3.1.3).
5. URCA-Prozess: $e^- + (Z, A) \rightarrow (Z-1, A) + \nu_e \rightarrow (Z, A) + e^- + \bar{\nu}_e$ (A ungerade); ein Prozess, bei dem vor allem Energie verloren geht.

3.2.8 Reaktionsraten: Quellen

Was in der Astrophysik hauptsächlich interessiert, sind natürlich die Reaktionsraten, also die Zahl der Reaktionen pro Sekunde und Gramm, am besten als analytische Funktion von Dichte und Temperatur. Es gibt mehrere umfassende Zusammenstellungen von solchen Reaktionsraten. Beispiele sind:

1. Coughlan & Fowler, 1988 (Atomic Data and Nuclear Data Tables, **40**, 283), für Kerne mit $Z \leq 14$.

Gegeben sind hier die Reaktionsraten in der Form

$$N_A \langle \sigma(v)v \rangle$$

mit Q_6 -Wert (Netto-Energie-Tönung einschließlich Energieverluste durch Neutrinos; in MeV) und dem Faktor zur Berechnung der inversen Reaktion (Rückreaktion).

$N_A \langle \sigma(v)v \rangle \rho N_1$ ist dann die Anzahl der Interaktionen/Sekunde oder das Inverse der Lebenszeit.

$N_A \langle \sigma(v)v \rangle \rho N_1 N_2 N_A / (1 + \delta_{12})$ gibt dann die Zahl der Reaktionen pro Gramm und Sekunde, und

multipliziert mit $1.66022 \cdot 10^{-6} Q_6$ die erg/gs.

Es handelt sich um Fitformeln der Art $(p, \beta^+)d$:

$$N_A \langle \sigma(v)v \rangle = 4 \cdot 10^{-15} T_9^{-2/3} \cdot \exp(-3.380/T_9^{1/3}) \cdot (1 + 0.123 T_9^{1/3} + 1.09 T_9^{2/3} + 0.938 T_9)$$

2. Adelberger et al., 2010 (Reviews Modern Physics, **93**, 195); behandelt besonders die Reaktionen des Wasserstoffbrennens, unter besonderer Berücksichtigung der Sonne
3. NACRE-Bibliothek (Angulo et al., 1999, Nuclear Physics A, **656**, 3), ebenfalls für $Z \leq 14$.
4. Daneben noch Spezialliteratur für einzelne Reaktionen

Die Genauigkeit der Reaktionsraten schwankt. Die meisten sind wohl auf 10-30% genau, es gibt aber einige (auch wichtige), die nur auf Faktoren 2-5 genau sind, und sogar einige, wo wegen unklarer Resonanzverhältnisse Unsicherheiten von bis zu einem Faktor 1000 bei bestimmten Temperaturen möglich sind.

Für β -Zerfälle werden die Reaktionsraten als $\log 2/\tau_{1/2}$ angegeben.

3.2.9 Reaktionsgleichungen

Die allgemeinen Gleichungen für die Häufigkeitsänderung chemischer Elemente sind

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{m_i}{\rho} \left[\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik} \right]$$

oder

$$\frac{dY_i}{dt} = - \sum_{j,k} Y_j Y_k N_A \langle \sigma(v)v \rangle_{jk}(i) + \sum_{l,m} Y_l Y_m N_A \langle \sigma(v)v \rangle_{mn}(l) \quad (3.41)$$

wobei $n = l + m - i$ sein muss. Der erste Term umfasst alle Reaktionen, die i in Reaktionen mit j zerstören, wobei k entsteht, der zweite diejenigen, die i aus l und m zusammen mit n erzeugen. (Zur Erinnerung: $Y_i \equiv N_i/(\rho N_A)$)

Diese Gleichungen muss man für alle beteiligten Isotope aufstellen und simultan (konkurrierende Reaktionen!) lösen. Das geschieht numerisch in sogenannten Reaktions-Netzwerken, die nur einige wenige oder viele hundert Spezies umfassen können. Für die Energieerzeugung reicht es im Allgemeinen aus, nur die wichtigsten Reaktionen zu berücksichtigen.

Kapitel 4

Elementsynthese im Urknall

4.1 Kosmologischer Hintergrund

Aus Beobachtungen von Galaxien, Galaxienhaufen und Quasaren, sowie aus der Analyse des Kosmischen Mikrowellenhintergrundes wissen wir über die großräumige Struktur des Universums, dass es auf Skalen von 200 Mpc und darüber *homogen und isotrop* ist. Die dann einzig noch maßgebliche Kraft ist die Gravitation. Ein solches Universum muss im Rahmen der *Allgemeinen Relativitätstheorie* beschrieben werden, weil die Krümmung des Raumes durch die darin befindliche Materie bestimmt wird (es gibt kein "äußeres" Schwerefeld). Die Metrik (Raum-Zeit-Geometrie) des Universum wird durch die *Robertson-Walker-Metrik* beschrieben. Die Dynamik eines isotropen Universums folgt aus den Eigenschaften des Energie-Impuls-Tensors in den Einsteinschen Feldgleichungen, die dann auf die Friedmann-Robertson-Walker Gleichungen zurückgeführt werden können. Diese beschreiben also die dynamischen Eigenschaften unseres Universums auf großen Skalen, oder auf solchen, auf denen das Universum homogen und isotrop ist. Sie lauten:

$$\begin{aligned}\ddot{R} &= -\frac{4\pi GR}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2} \right) + \frac{1}{3}\Lambda R \\ \dot{R}^2 &= \frac{8\pi G\rho}{3} R^2 + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - \frac{c^2}{R_{c,0}^2}\end{aligned}$$

wobei $R = R(t)$ ein "kosmischer Skalenfaktor" ist, der auf $R(t_0) = 1$ (heute) normiert ist. $R_{c,0}$ ist der heutige Krümmungsradius (die Geometrie muss nicht euklidisch, also flach, sein); ρ ist die Materiedichte und p der Druck (Druck hat die Dimension einer Energiedichte). Λ ist eine zunächst formale Konstante, die die Gleichungen erlauben, und wird mit der Einsteinschen *kosmischen Konstanten* oder heute mit *Dunkler Energie* identifiziert.

FRW-Modelle werden durch wenige Größen beschrieben:

1. die Expansionsrate (*Hubble-Konstante*) $H_0 := H(t_0)$, wobei $H(t) = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{x}}{x}$; $x(t) = R(t)r$ (r mitbewegte Koordinate); $H_0 = 72 \pm 7$ km/s/Mpc
2. die mittlere Materiedichte im Universum ρ_0 , die die baryonische und die *Dunkle Materie* beinhaltet; daraus abgeleitet der *Dichteparameter*

$$\Omega_0 := \frac{\rho_0}{\rho_{c,0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0$$

in Abhängigkeit der kritischen Dichte $\rho_{c,0} \approx 1.9 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}$; wobei $h = H_0/100 \text{ km/s/Mpc}$

3. die kosmische Konstante Λ (Dichte der Vakuum-Energie?) und daraus

$$\Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H^2}$$

Ω_0 und Ω_Λ liegen beide zwischen 0.1 (0.0) und 1

Da das Universum jetzt expandiert, kann man die Expansion zurückrechnen und folgert daraus, dass vor etwa 14 Milliarden Jahren das Universum in einem einzigen singulären Punkt existierte, der mit dem Beginn des Universums identifiziert wird.

4.1.1 Rotverschiebung

Aus den FRW-Gleichungen folgt auch, dass die Wellenlänge von Licht mit dem Skalenfaktor wächst, und zwar nach (t_e : Zeitpunkt der Emission)

$$\frac{R(t_0)}{R(t_e)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} \equiv 1 + z$$

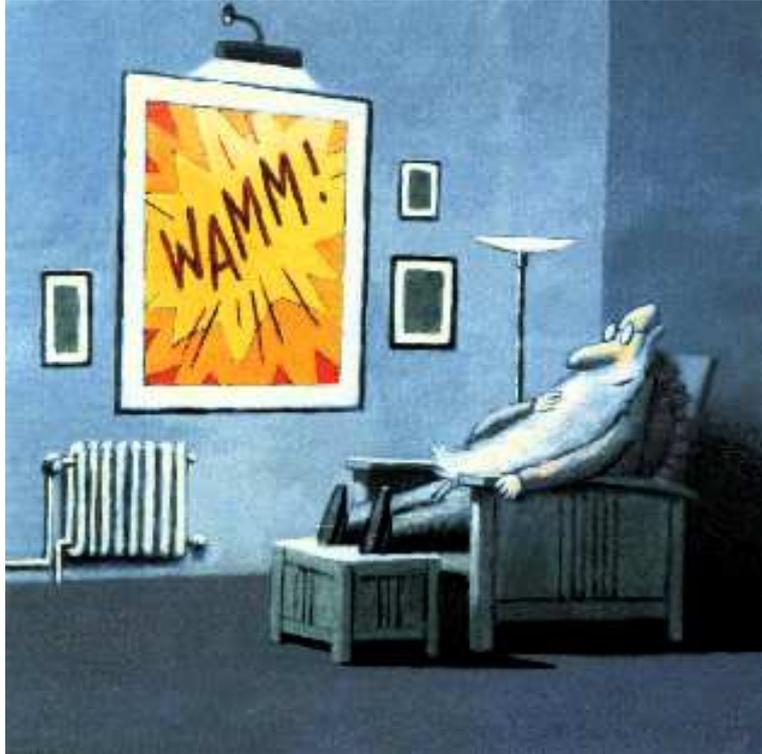
Die Folge ist, dass Licht, das jetzt (t_0) erst bei uns ankommt, eine um den Faktor $(1+z)$ größere Wellenlänge hat (*kosmische Rotverschiebung*; ein Maß für kosmologische Entfernungen). $z = 0$ ist heute (t_0), $z \rightarrow \infty$ ist $t = 0$.

Damit skalieren auch viele andere physikalische Größen mit z , z.B.

- lineare Dimensionen $\sim (1+z)^{-1}$ — *früher kleiner*
- Photonenenergie $h\nu = hc/\lambda \sim (1+z)$ — *früher mehr*
- Energiedichten (E/V) $\rho(t) = (1+z)^n \rho(t_0)$ — *früher dichter*, wobei
 - $n = 3$ für Staub ($p = 0$; keine Wechselwirkung)
 - $n = 4$ für relativistische Materie (Neutrinos, Photonen; $p = \rho c^2/3$)
 - für diese gilt $E \sim T^4$, daher $T \sim (1+z)$ — *früher heißer*

Heute dominiert zwar die Energiedichte der Materie über die der Strahlung, aber wegen der unterschiedlichen z -Potenzen gab es früher einen Zeitpunkt, wo die Verhältnisse umgekehrt waren. Beide Komponenten waren bei $z \approx 40,000$ oder $T \approx 10^5$ K gleich wichtig; das entspricht $t \approx 600$ a nach dem *Urknall*. So wird der Ursprung des Universums bezeichnet, weil damals formal alle Energie auf unendlich kleinem Raum bei unendlich hoher Energiedichte und somit Temperatur konzentriert war. Unsere physikalischen Gesetze können das Universum aber nur bis zu $t \approx 10^{-43}$ s nach dem *Big Bang* beschreiben.

4.1.2 Der Urknall



Mit großer Geistesgegenwärtigkeit war es Gott damals gelungen, einen Schnappschuss vom Urknall zu machen, welchen er immer noch sehr beeindruckend fand (B. Pfarr)

4.1.3 Zum Gleichgewicht

Grundlegende Effekte Es findet ein Wettbewerb statt zwischen *Gleichgewichten* (thermisch, kinetisch, chemisch, beschrieben durch Reaktionsraten Γ) und *Expansion* (Kühlung, beschrieben durch H).

Wechselwirkende Teilchen/Kerne folgen Gleichgewichtswerten, solange $\Gamma/H > 1$; bei abnehmendem T werden die vermittelnden Reaktionen drastisch langsamer und somit $\Gamma/H < 1$; daraus resultieren Abweichungen vom Gleichgewicht. In grober Näherung sind die endgültigen Häufigkeiten ähnlich denen zum Zeitpunkt dieses "Ausfrierens" der Reaktionen und Häufigkeiten. Die Expansionsgeschichte ist also entscheidend für die primordialen Häufigkeiten.

Gleichgewichte Die Teilchendichte einer nicht-relativistischen Teilchensorte A mit Masse m_A , chemischem Potential μ_A und statistischem Gewicht g_A im kinetischen Gleichgewicht ist

$$N_A = \frac{g_A}{c^3 h^3} \left(\frac{m_A k T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_A - m_A c^2}{k T} \right) \quad (4.1)$$

Im chemischen Gleichgewicht ($\Gamma/H > 1$) mit Protonen und Neutronen gilt für die chemischen Potentiale:

$$\mu_A = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n \quad (4.2)$$

Verwenden wir dies und 4.1 für n und p , sowie die Definition der Bindungsenergie $B_A = c^2[Zm_p + (A - Z)m_n - m_A]$, so ergibt sich¹

$$N_A = g_A N_p^Z N_n^{(A-Z)} 2^{-A} A^{3/2} \left(\frac{2\pi}{m_N kT} \right)^{3(A-1)/2} \exp(B_A/kT), \quad (4.3)$$

wobei wir die Massen von Protonen und Neutronen gleich gesetzt haben (m_N). Mit

$$\begin{aligned} N_N &= N_p + N_n + \sum_i (AN_A)_i \\ X_A &\equiv \frac{N_A A}{N_N} \quad \left(\sum_i X_i = 1 \right) \\ N_\gamma &= \left(\frac{\zeta(3)}{\pi^2} \right) g(kT)^3 \quad (\text{Bose; rel. Teilchen}) \\ &\quad \zeta(3) = 1.20206 \dots \\ &\rightarrow N_\gamma = 422 \text{ cm}^{-3} \quad (T(t_0) = 2.735 \text{ K}) \\ \eta &\equiv \frac{N_N}{N_\gamma} = 2.68 \cdot 10^{-8} (\Omega_B h^2) \\ \Omega_B &= 3.53 \cdot 10^{-3} h^{-2} \left(\frac{kT}{2.7 \text{ K}} \right) \eta_{10} \quad (\eta_{10} = \eta \times 10^{10}) \end{aligned}$$

wird daraus für die Gleichgewichtsmassenanteile in Abhängigkeit von Protonen- und Neutronen-Dichten:

$$\begin{aligned} X_A &= g_A [\zeta(3)^{A-1} \pi^{(1-A)/2} 2^{(3A-5)/2}] A^{5/2} (kT/m_N)^{3(A-1)/2} \cdot \\ &\cdot \eta^{A-1} X_p^Z X_n^{(A-Z)} \exp(B_A/kT) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} X_n/X_p &= \exp(-1.293/kT) \\ X_2 &= 16.3 (kT/m_N)^{3/2} \eta \exp(B_2/kT) X_n X_p \\ X_3 &= 57.4 (kT/m_N)^3 \eta^2 \exp(B_3/kT) X_n X_p^2 \\ X_4 &= 113. (kT/m_N)^{9/2} \eta^3 \exp(B_4/kT) X_n^2 X_p^2 \\ X_{12} &= 3.22 \cdot 10^5 (kT/m_N)^{33/2} \eta^{11} \exp(B_{12}/kT) X_n^6 X_p^6 \end{aligned}$$

$$1 = X_n + X_p + X_2 + X_3 + X_4 + X_{12}$$

Die Energetik (Bindungsenergie) favorisiert zwar die massereicheren Kerne, aber die Entropie ($\eta \approx 10^{-10}$) die leichteren.

4.1.4 Thermodynamik des expandierenden Universums

Die Energiedichte von Strahlung sei $\epsilon = \rho_r = \int h\nu n(h\nu) d\nu$, wobei $n(h\nu)$ die mitbewegte Teilchendichte der Strahlung ist, welche $n(h\nu) \sim R^{-3} \sim (1+z)^3$. Da auch die Frequenz von z wie $\nu = \nu_0(1+z)$ abhängt, ergibt sich

$$\epsilon = \epsilon_0 R^{-4} \quad (4.5)$$

¹Terme mit h können fehlen! Hier ist mit h das Wirkungsquantum gemeint, ansonsten ist $h = H_0/100$ in diesem Kapitel.

Dagegen gilt für die Dichte der Materie

$$\rho = \rho_0 R^{-3} \quad (4.6)$$

Daraus folgt z.B., dass man die Temperatur des kosmischen Mikrowellenhintergrundes (CMB; $T(t_0) = 2.73 \text{ K}$) zurückrechnen kann; da es sich um einen Schwarzkörper (“Blackbody”; mit $\epsilon = aT^4$) handelt, gilt also $T(z) = T_0(1+z)$. Außerdem muss, wie schon gesehen, irgendwann im frühen Universum die Strahlung dominiert haben. In diesem Fall reduziert sich die Friedmann-Gleichung auf

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} R^2 \quad (4.7)$$

(sog. Einstein-de Sitter Universum; $p = 0$, $\Omega_\Lambda = 0$ und $\Omega = 1$) und es folgt wegen $\rho R^4 = \text{const}$, dass $(\dot{R}R)^2 = \text{const}$ oder

$$R \propto t^{1/2}$$

Aus der Thermodynamik übernehmen wir, dass die Energiedichte relativistischer Teilchen (Strahlung)

$$\epsilon = \frac{\pi^2}{30} g_\star \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} \quad (4.8)$$

ist, wobei g_\star die Zahl der effektiven relativistischen Freiheitsgrade ist:

$$g_\star = \sum_{\text{Bosonen}} g_i (T_i/T)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{Fermionen}} g_i (T_i/T)^4 \quad (4.9)$$

g_i sind die *inneren Freiheitsgrade*, hier der Spin; g_\star ist T -abhängig, wenn T_i nicht im Gleichgewicht mit $T = T_\gamma$ ist, also, wenn Teilchen nicht mit den dominierenden Photonen im Gleichgewicht sind. Der Faktor $7/8$ kommt aus dem Unterschied von Bose- und Fermi-Statistik. Für die Entropie s gibt es die analoge Gleichung:

$$s \sim g_{\star,S} T^3 \quad (4.10)$$

wobei $g_{\star,S}$ analog (aber $\sim (T_i/T)^3$) für die Entropie definiert ist.

Zunächst liegt starke Kopplung zwischen Strahlung und Materie vor, vor allem durch Compton-Streuung von Photonen an Elektronen. Durch Expansion und Kühlung können irgendwann, etwa bei $T \approx 3000 \text{ K}$, Elektronen an Protonen gebunden werden (*Rekombination*; die Ionisationsenergie von Wasserstoff ist etwa 13 eV); dadurch können sich die Photonen plötzlich frei bewegen, und das Universum wird durchsichtig. Dieser Zeitpunkt liegt bei $(z_{\text{rec}} + 1) \approx 1100$ und bezeichnet die *Entkopplung* von Strahlung und Materie. Zur Erinnerung: das Universum ist zu diesem Zeitpunkt (etwa 400.000 Jahre) schon Materie dominiert. Das Universum ist also optisch dicht für $z \gtrsim 1100$ und wir können keine Photonen aus früheren Epochen sehen.

4.1.5 Expansionsgeschichte des frühen Universums

Die frühe Expansionsphase

- $t = 10^{-43} \dots 10^{-5} \text{ s}$; $T = 10^{32} \dots 10^{13} \text{ K}$:

Die Materie liegt als “Ursuppe” aus Elementarteilchen (Quark-Gluon Plasma, Neutrinos, Elektronen, Photonen) vor; die Konstituenten sind in ständiger Wechselwirkung und im thermischen Gleichgewicht miteinander und mit Strahlung. Eine Unterscheidung ist fast nicht sinnvoll.

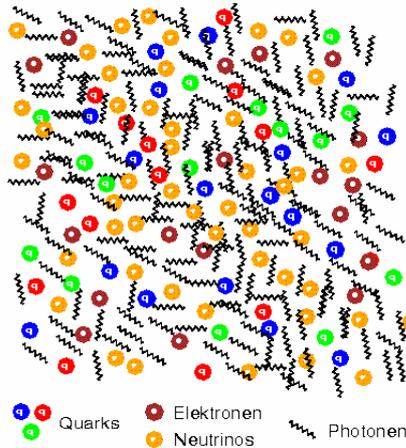
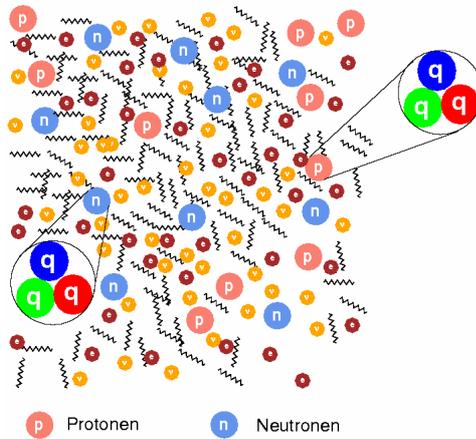


Illustration der Ursuppe

Entstehung der Nukleonen

- $t = 10^{-5}$ s; $T = 10^{13}$ K:

die thermische Energie liegt bei 10^9 eV, also etwa der Ruhemasse von Protonen und Neutronen. Sinkt die Temperatur darunter, können keine neuen Nukleonen aus dem Strahlungsfeld erzeugt bzw. zerstört werden. Die Nukleonen entstehen (*Baryogenese*).



Bei $kT \lesssim 1$ GeV werden die Quarks in Nukleonen gebunden

- solange $T > 10^{10}$ K, stehen p und n miteinander im Gleichgewicht und für ihr Häufigkeitsverhältnis gilt:

$$\frac{N_n}{N_p} = \exp[-c^2(m_n - m_p)/kT]$$

wobei $c^2(m_n - m_p) = 1.293$ MeV = $2.07 \cdot 10^{-6}$ erg

Das Universum im Alter von 0.01 sec

- $T \approx 10^{11}$ K ≈ 10 MeV; $t \approx 10^{-2}$ sec

- immer noch ist $N_n/N_p \approx 1 : 1$
- und das Universum ist noch strahlungsdominiert
- an relativistischen Teilchen liegen vor: $\gamma, e^\pm, \nu_{e,\mu,\tau}$
- diese sind alle noch gekoppelt (vor allem durch die schwache Wechselwirkung)
- $T_\gamma = T_\nu = T_e$
- die Nukleonen sind nicht-relativistisch
- $g_\star = 10.75$ (ergibt sich aus: $g_\gamma = 2, g_{e^\pm} = 2, g_\nu = 1$, wobei 3 Neutrinofamilien angenommen wurden, entweder zusammen mit ihren Antiteilchen [*Dirac-Teilchen*], oder als *Majorana-Teilchen*, die dann ihre eigenen Antiteilchen sind, und $g_\nu = 2$ besitzen.)
- einige Häufigkeiten (nach 4.4): $X_2 \approx 6 \cdot 10^{-12}, X_3 \approx 2 \cdot 10^{-23}, X_4 \approx 2 \cdot 10^{-34}, X_{12} \approx 2 \cdot 10^{-126}$

Beginn der Nukleosynthese

- $T \approx 10^{10} \text{ K} \approx 1 \text{ MeV}; t \approx 1 \text{ sec}$
- kritische Temperatur, da schwache Wechselwirkungen ausfrieren, d.h. dass die Umwandlung zwischen Leptonen nicht mehr stattfindet
- ν entkoppeln
- e^\pm annihilieren etwas später bei ca. $5 \cdot 10^9 \text{ K}$, weil keine Paarerzeugung (Energie!) mehr möglich ist
- Entropie der $e^\pm \rightarrow$ geht ins Strahlungsfeld (Aufheizung!)
- vor Annullierung trugen noch γ und e^\pm zu $g_\star = 11/2$ bei, danach nur noch γ und $g_\star = 2$, weil die verbleibenden Elektronen auch schnell nicht-relativistisch werden; da Entropie erhalten bleibt (adiabatische Expansion), steigt T im Verhältnis $\left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}$ an
- relativ dazu: ν kühlen schneller und $T_\nu = \left(\frac{11}{4}\right)^{-1/3} T_\gamma$ (heute: 1.9 K)
- Energiedichten-Entwicklung in dieser Phase: siehe Abb. 4.1
- n/p verlassen das Gleichgewicht bei $\approx 1 : 6$, weil schwache WW nicht mehr stark genug (s.u.)
- weitere Häufigkeiten: $X_2 \approx 6 \cdot 10^{-12}, X_3 \approx 2 \cdot 10^{-23}, X_4 \approx 2 \cdot 10^{-28}, X_{12} \approx 2 \cdot 10^{-108}$

Neutronen und Protonen Zunächst wird das Gleichgewicht durch Reaktionen der Art



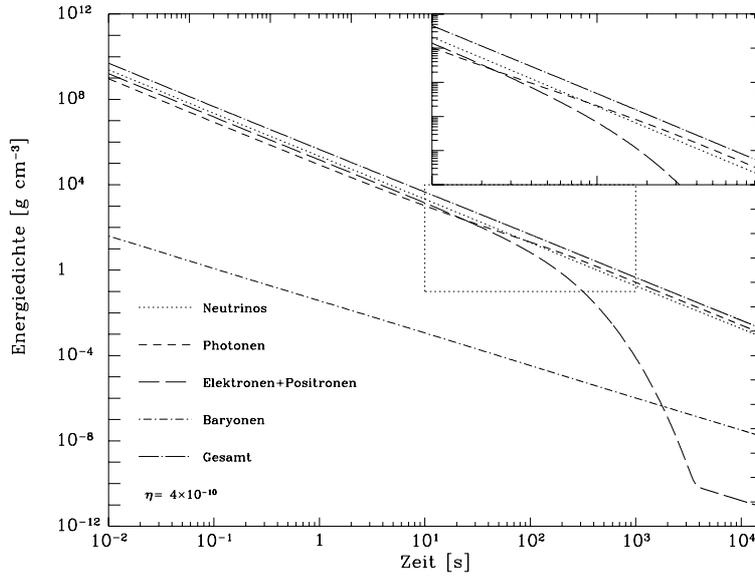


Abbildung 4.1: Entwicklung der Energiedichten verschiedener Konstituenten der kosmischen Materie und Strahlung in den ersten 10.000 Sekunden nach dem Urknall. Der Einsatz vergrößert die Phase der Annihilation von e^- und e^+ ; man beachte den Anstieg der Photonen-Energie durch die daraus resultierenden Zerstrahlungsphotonen. Außerdem sind die unterschiedlichen Steigungen der Kurven für Baryonen und relativistische Teilchen zu sehen, und daraus die Materiedominanz in ferner Zukunft abzusehen.

aufrecht erhalten. Aber bei $T \approx 0.8 \text{ MeV}$ können diese GGW-Reaktionen nicht mehr der Expansion folgen, weil die schwache Wechselwirkung nicht mehr effektiv genug ist: die Neutronen “frieren aus”. Allerdings findet der freie Neutronenzerfall (letzte Reaktionsgleichung) immer und unabhängig von T statt. Dies stellt eine “geeichte” Uhr für die Nukleosynthese im Urknall (engl. *Big Bang Nukleosynthesis*; BBN) dar: erfolgt sie zu langsam, sind alle Neutronen bereits zerfallen, und weniger schwerere Elemente können gebildet werden. Die Lebensdauer freier Neutronen ist also ein wichtiger Parameter für die BBN ($\tau_n = 889 \pm 2 \text{ s}$). Abb. 4.2 zeigt den Verlauf der GGW-Anteile, den, wenn nur noch Zerfall stattfinden würde, und den Anteil von Neutronen, die in schwereren Kernen gebunden sind.

Verhältnisse während der Nukleosynthese

- $T \approx 0.3 \dots 0.1 \text{ MeV}$; $t \approx 1 \dots 3 \text{ min}$
- $g_\star = 3.36$ (abgesunken, weil Elektronen und Positronen verschwunden sind, und weil Elektronen nicht mehr relativistisch sind)

$$\text{ergibt sich aus } g_\star = 2 + \frac{7}{8} \cdot 6 \cdot \left[\left(\frac{11}{4} \right)^{-1/3} \right]^4.$$

- $n/p \approx 1/7$ (wäre im GGW $1/74$; etwas abgesunken wegen n -Zerfall)
- X_4 sollte im GGW ≈ 1 sein,
- aber bei 0.5 MeV : $\text{D} \rightarrow {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He}$ Kette zu langsam (Coulomb-Wall und niedrige NSE-Anteile)

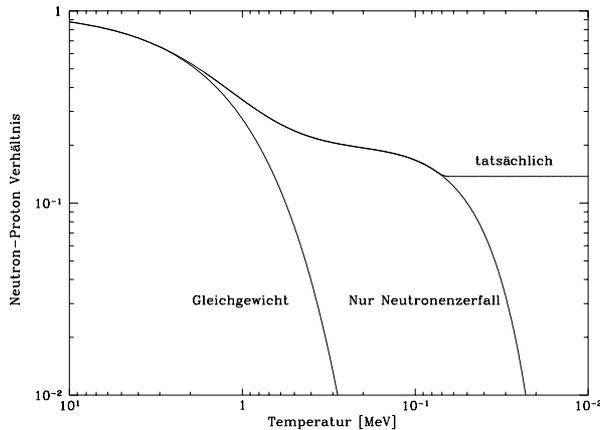


Abbildung 4.2: Entwicklung des Neutron-Proton-Verhältnisses als Funktion der fallenden Temperatur im frühen Universum. Gezeigt sind die Gleichgewichtskurve, die nach Ausfrieren und freiem n -Zerfall, sowie der tatsächliche Wert durch Neutronen, die in Kernen gebunden werden.

- n -Einfänge sehr schnell, sobald D und ${}^3\text{He}$ -Anteile groß (bei 0.1 MeV)
- \Rightarrow **fast alle Neutronen enden in ${}^4\text{He}$!**
Abschätzung:

$$X_4 = \frac{4N_4}{N_N} = \frac{4(N_n/2)}{(N_n + N_p)} = \frac{2N_n/N_p}{(N_n/N_p + 1)} = \frac{2 \cdot 1/7}{1/7 + 1} = 0.25 \quad (4.14)$$

- D und ${}^3\text{He}$ -Häufigkeit am Ende etwa 10^{-5}
- da Raten $\sim \eta^n \rightarrow$ höheres η : weniger D und ${}^3\text{He}$; dafür mehr ${}^4\text{He}$

4.2 Die Nukleosynthese

Obwohl man mit reinen Gleichgewichtsannahmen plus dem Effekt des Ausfrierens schon relativ gute Vorhersagen über das Ergebnis der BBN machen kann, sind in der Praxis numerische nukleare Netzwerke die Methode zur Berechnung. Abb. 4.3 zeigt ein solches, das aus D, ${}^3\text{H}$, ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Li}$ und ${}^7\text{Be}$ besteht. Auch gezeigt sind die 12 für die Synthese wichtigsten Reaktionen; allerdings sind insgesamt 43 Reaktionen nötig, um die Aufrechterhaltung des *Nuklearen Statistischen Gleichgewichts*, vor allem bei hohen Temperaturen, genau verfolgen zu können. Die experimentellen Unsicherheiten in den Reaktionsraten sind relativ gering ($\lesssim 10\%$), da man die BBN-Energien auch im Labor gut erreichen kann. Durch Monte Carlo Simulationen wurde ihr Einfluss untersucht; er ist weitgehend unerheblich.

Das Ergebnis der BBN hängt im Prinzip von drei Parametern ab:

1. der Halbwertszeit freier Neutronen, weil dies eine geeichte Uhr darstellt, gegen die die Expansion abläuft;
2. die Anzahl der Neutrino-Familien, weil dies nach der Paar-Annihilation das g_\star und damit die Energiedichte und die Expansion beeinflusst
3. die Baryondichte, weil diese über η die Temperatur bei gegebener Energiedichte bestimmt.

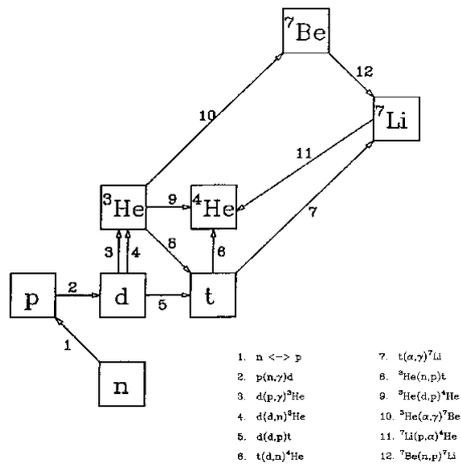


Abbildung 4.3: Das nukleare Netzwerk, das man zur Berechnung der primordialen Nukleosynthese braucht.

Die ersten beiden Parameter sind seit einigen Jahren aus Laborexperimenten gut bekannt, und somit fixiert. Daher bleibt nur noch die Baryonendichte, das heisst die Dichte “gewöhnlicher” Materie als freier Parameter übrig.

Die Abhängigkeit von diesen Parametern ist (oder wäre):

- τ_n : länger $\rightarrow n$ zerfallen langsamer \rightarrow mehr n bei gegebenem $T \rightarrow$ mehr ${}^4\text{He}$
- N_ν : mehr \rightarrow schnellere Expansion $\rightarrow n$ -Zerfall relativ dazu langsamer \rightarrow mehr ${}^4\text{He}$
- η : höher $\rightarrow D, {}^3\text{He}$ Reaktionen zu ${}^4\text{He}$ werden häufiger \rightarrow mehr ${}^4\text{He}$ und weniger D und ${}^3\text{He}$ werden produziert

Abbildung 4.4 zeigt, wie die Nukleosynthese abläuft. Die Rechnungen starten im Allgemeinen bei einigen MeV (hier ab 1 MeV dargestellt), so dass Protonen, Neutronen, Deuterium und ${}^3\text{He}$ im GGW zueinander stehen (Anteile, siehe oben). Mit abnehmender Temperatur steigt der ${}^4\text{He}$ -Anteil stärker an als die der anderen Elemente. Bei etwa 0.6 MeV allerdings fällt ${}^4\text{He}$ unter die GGW-Linie, weil die Reaktionskette über ${}^2\text{H}$ und ${}^3\text{He}$ bei den gegebenen NSE-Anteilen zu langsam sind (beachte, dass die Linien fast parallel laufen). Wenn dann bei ca. 0.2 MeV auch noch ${}^3\text{He}$ und ${}^3\text{H}$ unter das NSW-GGW fallen, wird die Produktion von ${}^4\text{He}$ noch weiter gebremst. Lediglich ${}^2\text{H}$ bleibt noch im GGW. Bei etwa 0.1 MeV beginnt dann die letzte starke Phase der He-Synthese, weil die Anteile von ${}^3\text{He}$ und ${}^2\text{H}$ hoch sind. Die letzten freien Neutronen werden schnell weggefangen und in Helium gebunden (Antikorrelation der Kurven). ${}^2\text{H}$ wird kaum mehr produziert, sondern nur noch verbrannt (zu ${}^3\text{He}$) bevor auch diese Reaktionen der Expansion nicht mehr folgen können. Bis auf die n -Kurve sind jetzt alle nur noch horizontal; das Ende der Nukleosynthese im Urknall ist erreicht. Die schwereren Elemente Li und Be können erst fusioniert werden, wenn genügend ${}^4\text{He}$ vorhanden ist, daher treten sie erst am Ende der BBN ins Bild.

4.3 Beobachtung der primordialen Häufigkeiten

Es wäre schön, könnte man direkt die primordialen Häufigkeiten beobachten. Leider gibt es solche Objekte nicht (mehr). Daher kann man in vielen Fällen nur Grenzen

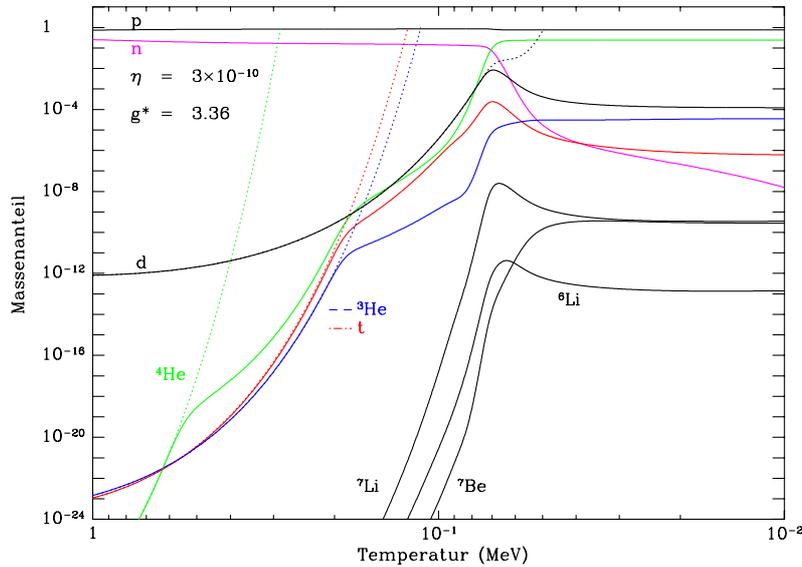


Abbildung 4.4: Ergebnis einer Rechnung zur Nukleosynthese: Aufbau der Elemente als Funktion der fallenden Temperatur. Die gepunkteten Linien wären die Gleichgewichtsanteile, die aber zu bestimmten Zeiten nicht mehr eingenommen werden können. Die durchgezogenen, tatsächlichen Kurven bleiben dann darunter. Die Rechnung wurde für einen Wert der kosmischen Baryondichte gemacht (durch η gekennzeichnet).

angeben.

4.3.1 ^4He

- wird in Sternen erzeugt (gemeinsam mit Metallen)
- primordiale Werte nur in metall-“freien” Gebieten
- ideal: extragalaktische HII-Regionen (heiß, daher kann man He-Linien im Spektrum sehen) mit niedriger Metallizität Z
- Z -Korrelation mit O und N, d.h. aus O und N schließt man auf Z insgesamt
- man erhält eine Kurve ^4He als Funktion von O und N, und extrapoliert nach $X_{\text{O}} = 0$ (also $Z = 0$)
- das Resultat war lange zweideutig: $X_{4,p} = 0.239 \pm 0.002$ oder 0.242 ± 0.002 , in den letzten Jahren kristallisierte sich aber ein Wert von 0.246 ± 0.004 heraus

4.3.2 Deuterium ^2H

- wird in Sternen *vollständig* zu ^3He verbrannt
- und kaum irgendwo im Universum dauerhaft erzeugt
- daher jede Messung nur *Untergrenze* an den primordialen Wert
- D/H: $1.8 \cdot 10^{-5}$ (im interstellaren Medium); $2.5 \cdot 10^{-5}$ (in Meteoriten)
- ähnliche Werte in Atmosphären von Jupiter und Saturnen

- wichtigste Quelle: Quasar-Absorptionslinien in weit entfernten, daher vermutlich wenig entwickelten Materiewolken: $D/H = (2.78 \pm 0.4) \cdot 10^{-5}$
neueste Zahl (Cooke et al. 2018): $(2.53 \pm 0.03) \cdot 10^{-5}$

4.3.3 ^3He

- wird in Sternen erzeugt (aus D und im pp-Zyklus) und verbrannt (ebenda)
- Nettorate abhängig von Sternmasse
- unklar, ob netto Erzeugung oder Zerstörung
- also sehr vage Ergebnisse bzgl. des primordialen Gehalts
- Messungen im Sonnensystem und in Planetarischen Nebeln

4.3.4 ^7Li

- wird in Sternen erzeugt und zerstört
- komplizierte Prozesse
- welche Sterne geben uns die beste Näherung für ^7Li ?
- möglicherweise sehr alte, metallarme Sterne in der Galaxis
- tatsächlich ist dort die ^7Li -Häufigkeit so erstaunlich konstant (Abb. 4.5), dass man annimmt, dass keine stellaren Prozesse wirksam waren, und man also den BBN-Wert direkt sieht.
- Stand 2018: klare Diskrepanz zwischen Kosmologie und stellarer Physik; “Lithium-Problem” (s.u.)

4.4 Vergleich zwischen Beobachtungen und Rechnungen

Da das Resultat der Rechnungen noch von η abhängt (also von Ω_B , der Baryonendichte im Universum), macht man Rechnungen für verschiedene Werte von η . Abbildung 4.6 zeigt, wie die primordialen Häufigkeiten der besprochenen Elemente von η abhängen (s. auch weiter oben). Wenn BBN so arbeitet, wie man denkt, sollte es mindestens einen Bereich für η geben, in dem Theorie und Beobachtungen übereinstimmen.

Abbildung 4.6 zeigt, dass es in der Tat ein η gibt, mit dem alle Beobachtungen übereinstimmen. Man sieht auch, dass derzeit ^2H die stärksten Einschränkungen liefert². Allerdings muss betont werden, dass der Li-Bereich *alle* möglichen Unsicherheiten einschließt. Nimmt man nur die Häufigkeit und ihre Streuung am Spite-Plateau (wie gemessen), erhält man einen ganz engen Streifen von $1 \dots 2 \cdot 10^{-10}$, der eine um fast einen Faktor 2 zu niedrige Baryonendichte ergäbe. Damit wäre der *Konkordanz-Bereich* (vertikaler Streifen) nicht im Einklang mit Ω_B , wie er aus anderen Beobachtungen (CMB mit dem Satelliten WMAP) bestimmt ist.

Obwohl also die BBN zeigt, dass es Konkordanz-Bereiche gibt (die sehr von den aus Beobachtungen gewonnenen Grenzen für die primordialen Häufigkeiten abhängen), haben wir derzeit das Problem, dass das daraus bestimmte Ω_B nicht

²gezeigt ist hier der ^2H -Anteil wie gemessen. Streng genommen ist das auch nur eine Untergrenze

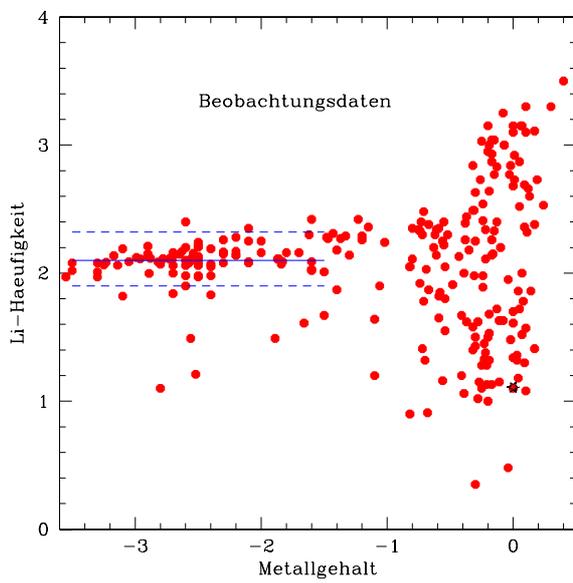


Abbildung 4.5: Beobachtete Lithium-Häufigkeit $[Li]$ gegen Gesamt-Metallgehalt $[Fe]$ für galaktische Sterne. Rechts sind die unterschiedlichen Ergebnisse der Li-Produktion und -Zerstörung in Sternen klar in der großen Variationsbreite der Daten erkennbar. Links aber, in unterentwickelten Sternen, liegt ein erstaunlich konstanter Wert vor. Dieser Teil der Abbildung wird nach den Entdeckern dieses Plateaus *Spite-Plateau* genannt.

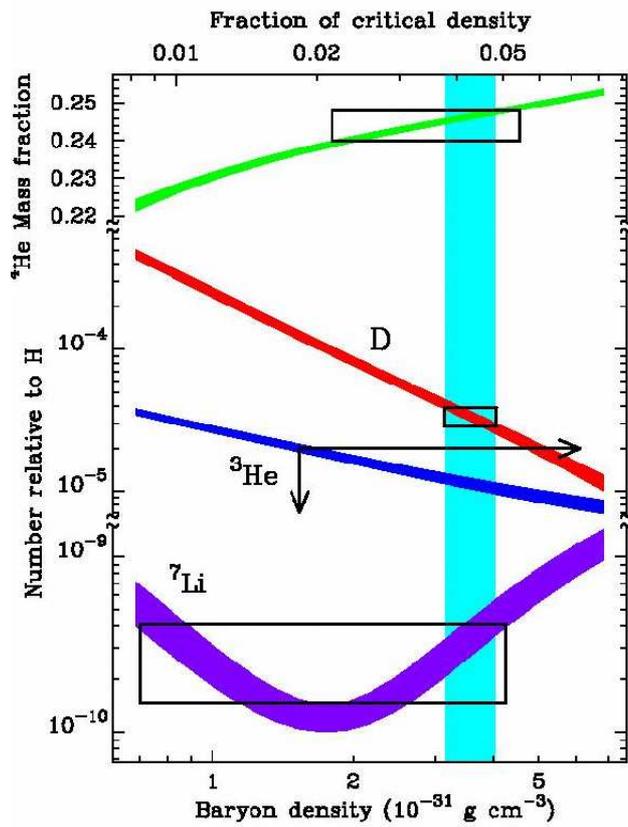


Abbildung 4.6: Ergebnis von BBN-Rechnungen für die primordialen Häufigkeiten von ^2H , ^3He , ^4He und ^7Li in Abhängigkeit der kosmologischen Baryon-Dichte. Dazu eingezeichnet die Grenzen aus Beobachtungen. Für ^4He wurde nur der höhere Bereich gewählt, für ^3He gibt es nur schwache Grenzen. Der sogenannte Konkordanz-Bereich ist durch den vertikalen Streifen gekennzeichnet. Er hängt praktisch nur von Deuterium ab.

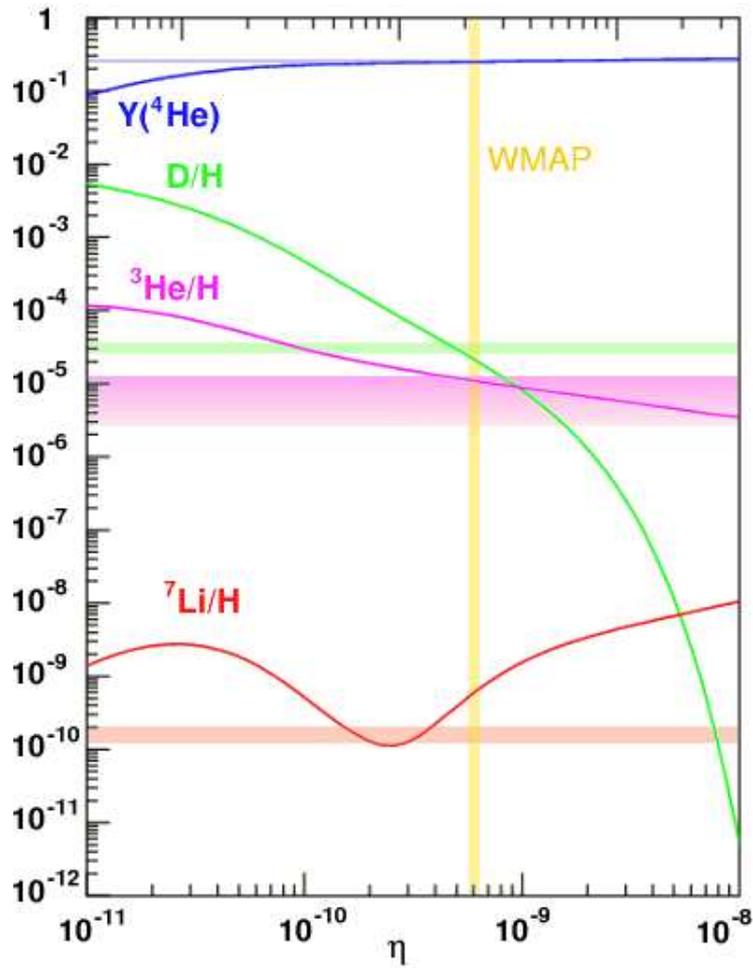


Abbildung 4.7: Wie Abb. 4.6, aber für einen größeren Bereich von η und mit der Baryondichte des WMAP Satelliten, die aus der Analyse des kosmischen Mikrowellenhintergrundes bestimmt wurde. Beim Lithium wird hier nur der Unsicherheitsbereich der Beobachtungen gezeigt.

mit den CMB-Beobachtungen übereinstimmt (Abb. 4.7). Insbesondere das Lithium ist problematisch. Daher ist man geneigt, die Li-Diskrepanz durch noch unverstandene Prozesse in Sternen zu erklären, wobei aber gleichzeitig noch die Existenz des Spite-Plateaus erklärt werden muss. D ist in nahezu perfektem Einklang mit dem WMAP- und PLANCK- Ω_B , ^4He stellt kein Problem dar, und ^3He ist wegen seiner großen Unsicherheit fast ohne Relevanz. Trotz der Li-Problematik gilt die BBN als eine wesentliche Stütze der Theorie des heißen Urknalls.

Kapitel 5

Hydrostatische Brennphasen in Sternen

Wie in 2.1.4 schon angedeutet, werden Sterne während ihrer Entwicklung aufgrund des Virial-Theorems im Mittel heißer und dichter, so dass immer schwerere Kerne fusioniert werden. Wir werden jetzt entlang dieser Abfolge von hydrostatischen Brennphasen die Nukleosynthese in Sternen verfolgen.

5.1 Vorhauptreihe

Bevor Sterne wirklich als solche bezeichnet werden, sind sie nur kontrahierende Molekül- (später Plasma-) Wolken, in denen die Temperaturen langsam von wenigen tausend auf Millionen Grad ansteigen. Ohne Kernfusion würde dieser Prozess in wenigen Millionen Jahren bis zu einem heißen, hochgradig entarteten Weißen Zwerg führen. Während des Aufheizens des Protostern-Inneren werden Temperaturen von etwa 10^6 und darüber erreicht. In dieser Phase finden bereits zwei interessante nukleare Vorgänge statt:

5.1.1 Deuterium-Brennen

Bereits bei $T \approx 6 \cdot 10^5$ K läuft die Reaktion



auf Zeitskalen von wenigen 100.000 Jahren ab und zerstört im Innern des Sterns alles primordiale Deuterium. Die $p - p$ -Reaktion, die aufgrund des höheren Anteils von ${}^1\text{H}$ favorisiert sein sollte, funktioniert nicht so einfach, weil das erzeugte Deuterium instabil ist, und bei diesen Temperaturen schneller wieder zerfällt, als weiter fusioniert.

5.1.2 Die leichten Elemente Li, Be, B

Diese Elemente fangen auch schon bei Temperaturen ab $\approx 2 \cdot 10^6$ K leicht Protonen ein. Wenn der Protostern diese Temperaturen im Innern erreicht, ist er nicht mehr vollkonvektiv, d.h. nicht mehr voll durchmischt wie während des Deuterium-Brennens. Daher werden die leichten Elemente nur im Innern völlig, in der Photo-

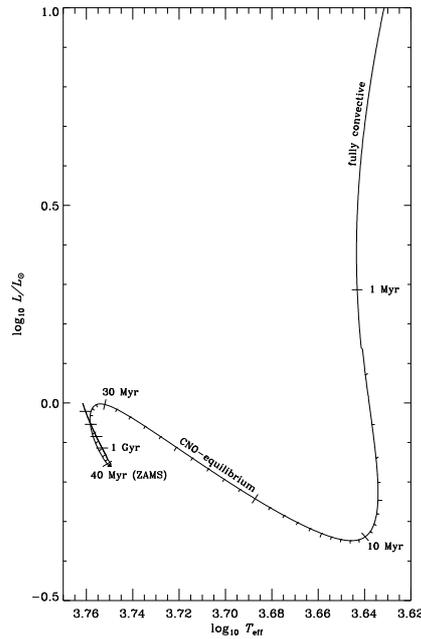


Abbildung 5.1: Entwicklung der Sonne im Hertzsprung-Russell-Diagramm von der Vorhauptreihe bis heute. Man beachte die drastische Verlangsamung der Entwicklungsgeschwindigkeit, sobald die Wasserstofffusion richtig in Gang gekommen ist.

sphäre aber nur z.T. verbrannt. Die Reaktionen sind



wobei die Endprodukte (${}^6\text{Li}$, ${}^7\text{Be}$) ebenfalls schnell zerstört werden oder β -instabil sind.

5.2 Wasserstoff-Brennen

Am Ende der Kontraktion auf der Vorhauptreihe werden Temperaturen erreicht, die die erste und wichtigste Brennphase ermöglichen: die Fusion von Wasserstoff zu Helium. Da die Energieausbeute hier am größten und die Leuchtkraft noch für jeden Stern am niedrigsten ist, ergeben sich die längsten Brenndauern. Wenn man also viele Sterne beobachtet, ist die Chance, dass sie sich im Wasserstoff-Brennen befinden, am größten. Der Ort in Farb-Helligkeits-Diagrammen von Sternen, an dem solche Sterne sich befinden, heißt Hauptreihe, weil eben die meisten Sterne dort angesiedelt sind. Die zur Fusion notwendigen Temperaturen werden in sehr massearmen Sternen ($M \lesssim 0.08M_\odot$) nicht ganz erreicht, so dass diese *Braunen Zwerge* die Energie, die sie an der Oberfläche abstrahlen, nicht vollständig aus nuklearer Energie speisen können.

Die Fusion von Helium läuft immer so ab, dass vier Protonen verschmolzen werden, wobei aber 2 von ihnen zu Neutronen zerfallen müssen. Da die hypothetische Reaktion $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2\beta^+ + 2\nu$ völlig unwahrscheinlich ist, müssen Mehrstufenprozesse durchlaufen werden. Es gibt im Wesentlichen zwei wichtige Prozessketten:

keiten stehen):

$$\frac{dD}{dt} = \lambda_{pp} \frac{H^2}{2} - \lambda_{pd}HD \quad (5.3)$$

Wir erkennen den erzeugenden Term aufgrund der pp -Reaktion (Faktor $1/2!$), sowie den zerstörenden aufgrund des weiteren p -Einfangs. Alle weiteren möglichen Reaktionen, z.B. $d + d$, sind unerheblich.

Sei zu Beginn der Reaktionen D sehr klein, so verschwindet der zweite Term der rechten Seite, und Deuterium wird nur aufgebaut. Damit wächst aber auch der zweite Term an, bis die rechte Seite verschwindet, bis also $\frac{dD}{dt} = 0$. Die Reaktion ist also selbst-regulierend und ein Gleichgewichtswert für D stellt sich ein. Dieser ist

$$\left(\frac{D}{H}\right)_e = \frac{\lambda_{pp}}{2\lambda_{pd}} \quad (5.4)$$

Da $\lambda_{pd} \gg \lambda_{pp}$ (Lebenszeit von ${}^2\text{H}$ nur Sekunden) stellt sich ein sehr niedriger GGW-Wert für D ein, der in der Sonne bei 10^{-18} relativ zu H ist. Außerdem kann $(D/H)_e$ sehr schnell erreicht werden, so dass man die Reaktionskette von $2p$ zu ${}^3\text{He}$ zusammenfassen kann. Die Reaktionsgleichung für ${}^3\text{He}$ ist

$$\frac{dHe^3}{dt} = \lambda_{pd}HD - 2\lambda_{33} \frac{(He^3)^2}{2} = \lambda_{pp} \frac{H^2}{2} - 2\lambda_{33} \frac{(He^3)^2}{2} \quad (5.5)$$

wobei der zweite Term der ${}^3\text{He} + {}^3\text{He}$ -Reaktion in der $pp1$ -Kette entspricht, und wir für D den GGW-Ausdruck eingesetzt haben. Auch 5.5 ist selbst-regulierend, so dass wir

$$\left(\frac{He^3}{H}\right)_e = \left(\frac{\lambda_{pp}}{2\lambda_{33}}\right)^{1/2} \quad (5.6)$$

erhalten. Die Reaktion ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ wurde erst vor wenigen Jahren im Gran Sasso-Labor bei sehr niedrigen Energien genau vermesse; vorher war sie relativ unsicher. Mit 5.6 kann 5.5 umgeschrieben werden zu

$$\frac{dHe^3}{dt} = \lambda_{33}H^2 \left[\left(\frac{He^3}{H}\right)_e^2 - \left(\frac{He^3}{H}\right)^2 \right] \quad (5.7)$$

Diese Gleichung zeigt, wie ${}^3\text{He}$ sich an seinen GGW-Wert annähern will. Die Zeit, die dafür benötigt wird, hängt aber von den Reaktionsraten und somit von der Temperatur ab. Im Gegensatz zum Fall des Deuteriums kann man hier nicht annehmen, dass der GGW-Wert immer erreicht wird. Für $T \lesssim 10^7$ K ist sie so lang, dass $\left(\frac{He^3}{H}\right)_e$ nur noch teilweise oder gar nicht erreicht wird. Als Folge davon wird im Zentrum von Sternen der sehr niedrige Gleichgewichtsanteil von He^3 sehr schnell erreicht, so dass dort primordiales ${}^3\text{He}$ effektiv zerstört wird. Dagegen wäre weiter außen der GGW-Wert (s. Abb. 5.3) höher als der primordiale Wert, und Sterne können ${}^3\text{He}$ erzeugen, wenn sie lange genug leben. Es ergibt sich, dass massereiche Sterne (heiß) Netto-Zerstörer, und massearme Stern (langlebig) Netto-Erzeuger sind.

Sollte $\left(\frac{He^3}{H}\right)_e$ erreicht worden sein (was im Zentrum von Sternen auf der Hauptreihe immer der Fall ist), haben wir

$$\frac{dHe^3}{dt} \approx 0$$

und die Gleichung für ${}^4\text{He}$ in der $pp1$ -Kette vereinfacht sich zu

$$\frac{dHe^4}{dt} = r_{33} = \frac{r_{pp}}{2} = \frac{\lambda_{pp}H^2}{4} \quad (5.8)$$

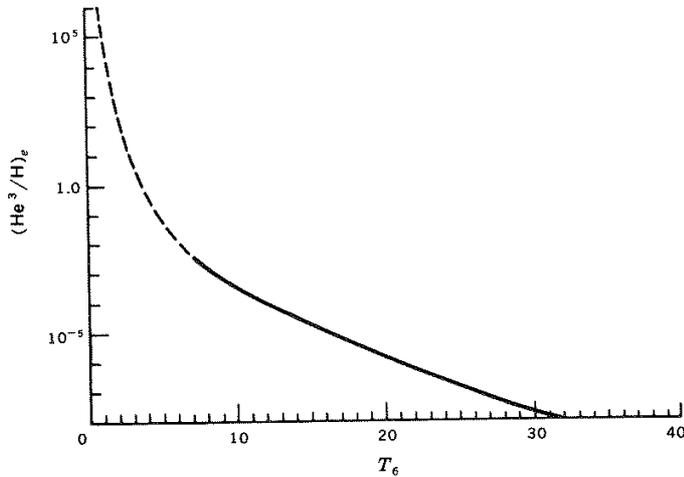


Abbildung 5.3: Gleichgewichtswert für ${}^3\text{He}$ in der pp -Kette als Funktion der Temperatur (in Millionen Grad Kelvin). Bei niedrigem T ist die Zeit, die benötigt wird, diesen Wert zu erreichen, länger als das Weltalter.

da nach 5.5 $2r_{33} = r_{pp}$ ist. Die Produktionsrate von ${}^4\text{He}$ ist genau halb so groß wie die Verbrennungsrate in der pp -Reaktion.

Die Energieerzeugung in $pp1$ unter diesen Umständen lässt sich ebenfalls leicht berechnen: Die Kette $3p \rightarrow {}^3\text{He}$ liefert 6.936 MeV minus 0.263 MeV Neutrinoverlust. In cgs-Einheiten gibt das

$$\rho\epsilon(3p \rightarrow {}^3\text{He}) = 1.069 \cdot 10^{-5} r_{pp} \text{ erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

Die ${}^3\text{He}({}^3\text{He}, 2p){}^4\text{He}$ -Reaktion liefert nochmals 12.858 MeV, so dass insgesamt

$$\rho\epsilon_{pp1} = 1.069 \cdot 10^{-5} r_{pp} + 2.060 \cdot 10^{-5} r_{33} \text{ erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

erzeugt werden. Berücksichtigt man, dass im GGW $2r_{33} = r_{pp}$, folgt somit

$$\rho\epsilon_{pp1} = 2.099 \cdot 10^{-5} r_{pp} \text{ erg cm}^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

Statt mit sich selber kann ${}^3\text{He}$ auch mit ${}^4\text{He}$ reagieren und ${}^7\text{Be}$ entstehen. Im Labor zerfällt dies unter Einfang eines Hüllenelektrons zu ${}^7\text{Li}$, im Stern muss ein freies e^- eingefangen werden, da Vollionisation herrscht. Das Lithium wird wieder sehr schnell durch Protonen-Einfang zu zwei α -Teilchen verbrannt, wodurch netto ein ${}^4\text{He}$ erzeugt wurde. In Abhängigkeit von der Temperatur ist aber auch ein p -Einfang auf ${}^7\text{Be}$ möglich, so dass ${}^8\text{B}$ entsteht, das wiederum durch β -Zerfall zu ${}^8\text{Be}$ und dann in zwei α zerfällt. Beachte, dass in diesen beiden Reaktionsketten nur eine pp -Reaktion nötig ist, statt derer zwei in $pp1$. Tatsächlich laufen alle drei Ketten simultan und in Konkurrenz zueinander ab; in der Sonne, bei $1.5 \cdot 10^7$ K, dominiert der $pp1$ -Weg (86%) vor $pp2$ (14%). $pp3$ trägt nur schwach bei (0.02%). Das Aufteilen in $pp1$ einerseits und $pp2/3$ andererseits richtet sich natürlich nach dem Verhältnis von r_{33}/r_{34} oder

$$\frac{r_{33}}{r_{34}} = \frac{\lambda_{33} H e^3}{2\lambda_{34} H e^4}$$

Während in $pp1$ nur 2% der Energie durch Neutrinos verloren gehen, sind es in $pp2$ schon 4% und in $pp3$ sogar 27.9%. Die langsamste Reaktion in der gesamten

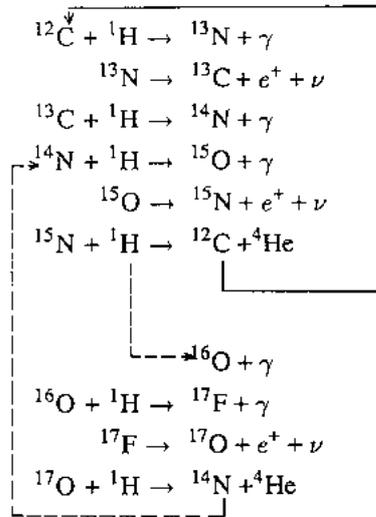


Abbildung 5.4: Die CNO-Zyklen zur Fusion von Helium

pp-Kette ist die erste, die $p+p$ -Reaktion. Dann folgen die ${}^3\text{He}$ -Reaktionen, die aber für typische stellare Temperaturen 10000-mal schneller sind. Die Lebenszeit von ${}^7\text{Be}$ gegen Elektronen-Einfang ist nur ein Bruchteil eines Jahres, gegen p -Einfang dagegen etwa von der Größenordnung 10 Jahre. ${}^7\text{Li}$ und ${}^8\text{B}$ werden in weniger als Stunden weiter prozessiert. Daraus ergeben sich, analog zur obigen Diskussion, sehr niedrige GGW-Häufigkeiten für diese Isotope.

Eine ausführliche Diskussion der pp -Ketten findet sich in Clayton's Buch, wie auch für den folgenden ...

5.2.2 CNO-Zyklus

Der CNO-Zyklus war in den 30er-Jahren der favorisierte Weg, aus Wasserstoff Helium in der Sonne zu erzeugen, auch weil man dachte, die Zentraltemperatur in der Sonne sei etwas höher als sie tatsächlich ist. Er wird oft als ein katalytischer Zyklus bezeichnet, weil von ${}^{12}\text{C}$ ausgehend immer weiter Protonen angelagert werden, und am Ende wieder ${}^{12}\text{C}$ entsteht. Im Gegensatz zu einem chemischen Katalysator werden die Beteiligten hier aber wirklich verändert.

Wie man aus Abb. 5.4 sieht, ist der erste Zyklus, der *CN-Zyklus* eine Abfolge von Protonen-Einfängen und β -Zerfällen, wodurch nacheinander ${}^{13}\text{C}$, ${}^{14}\text{N}$, ${}^{15}\text{N}$ entstehen; die dazwischen liegenden Isotope zerfallen in wenigen hundert Sekunden. Im CN-(Sub)Zyklus wird schließlich aus ${}^{15}\text{N}$ nicht ${}^{16}\text{O}$, sondern das ursprüngliche ${}^{12}\text{C}$ sowie ein α . Wieder werden zwei Neutrinos freigesetzt. Der Zyklus kann natürlich an jeder Stelle begonnen werden, wenn z.B. zu Beginn kein ${}^{12}\text{C}$ vorhanden sein sollte. Es ist auch klar, dass wie in den pp -Ketten ein Gleichgewicht zwischen aufbauenden und zerstörenden Reaktionen für jedes Nuklid angestrebt wird, das von den Verhältnissen der Reaktionsraten und den Häufigkeiten selbst abhängt.

Die Reaktion ${}^{14}\text{N}(p, \gamma){}^{15}\text{O}$ ist bei allen interessanten Temperaturen (also zwischen 10^7 und 10^8 K) die bei weitem langsamste. Da es sich stets um nicht-resonante Reaktionen handelt und der Energiegewinn immer ähnlich ist, verhalten sich auch die λ immer ähnlich zueinander. Die erwähnte Reaktion ist stets etwa einen Faktor 100–1000 langsamer als die nächst langsamste, ${}^{12}\text{C}(p, \gamma){}^{13}\text{N}$. Daher wird sich im Gleichgewicht ${}^{14}\text{N}$ als das häufigste Nuklid herausstellen und die GGW-Reaktionsrate

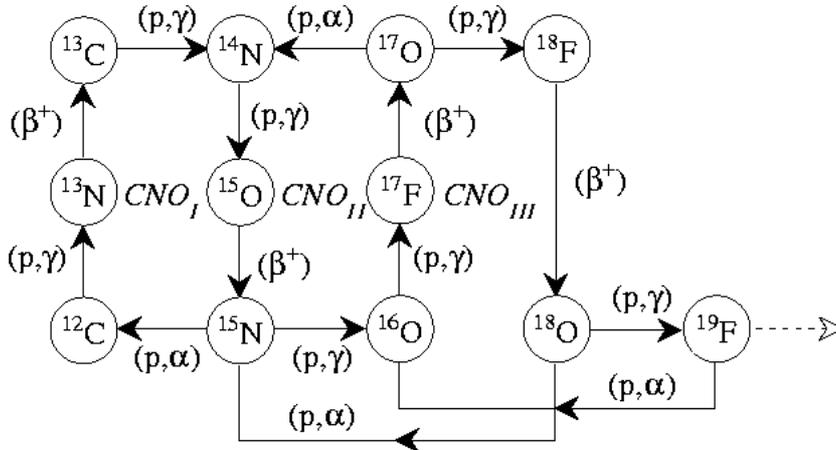


Abbildung 5.5: Weitere CNO-Zyklen

$\sim X_N$ sein. Die $^{13}\text{C}(p,\gamma)^{14}\text{N}$ Reaktion ist fast immer einen Faktor 3 schneller als der Protoneneinfang auf ^{12}C , weswegen im GGW $C^{12}/C^{13} \approx 3$ sein muss und auch ist. Das Isotopen-Verhältnis von $^{12}\text{C}/^{13}\text{C}$ ist ein wichtiges diagnostisches Werkzeug um herauszufinden, ob Materie dem CNO-Prozess unterlag (z.B. für Rote Riesen). Die Reaktionen von ^{12}C zu ^{14}N laufen sogar schneller ab als die pp -Reaktion, weswegen ein Stern wie die Sonne während der Vorhauptreihe *zuerst* die $\text{C} \rightarrow \text{N}$ Umwandlung durchmacht (s. Abb. 5.1, vor Erreichen der Hauptreihe), und auch jetzt in der Sonne am Rande des brennenden Kerns fast aller Kohlenstoff verschwunden ist.

Neben dem CN-Zyklus ist es aber auch möglich, dass aus $^{15}\text{N} + p \rightarrow ^{16}\text{O}$ entsteht. Das ist (relativ T-unabhängig) in 1 von 10^4 Fällen der Fall. Dann wird der komplette CNO-Zyklus durchlaufen (s. Abb. 5.4), der analog zum CN-Subzyklus über ^{16}O , ^{17}F und ^{17}O geht, wobei am Ende ^{14}N entsteht. Tatsächlich sind die beiden Zyklen äquivalent und nur um einen doppelt-geraden Kern nach oben verschoben (s. auch Abb. 5.5). Es gibt noch weitere analoge Zyklen, z.B. den Ne-Na- oder Mg-Al-Zyklus (s. Abb. 5.6). Allerdings gibt es immer mehr komplizierte Verzweigungen und natürlich sind immer höhere Temperaturen nötig. Alle Zyklen laufen in Konkurrenz zueinander. Für die Sonne und die meisten Hauptreihensterne ist nur der CNO-Zyklus wichtig.

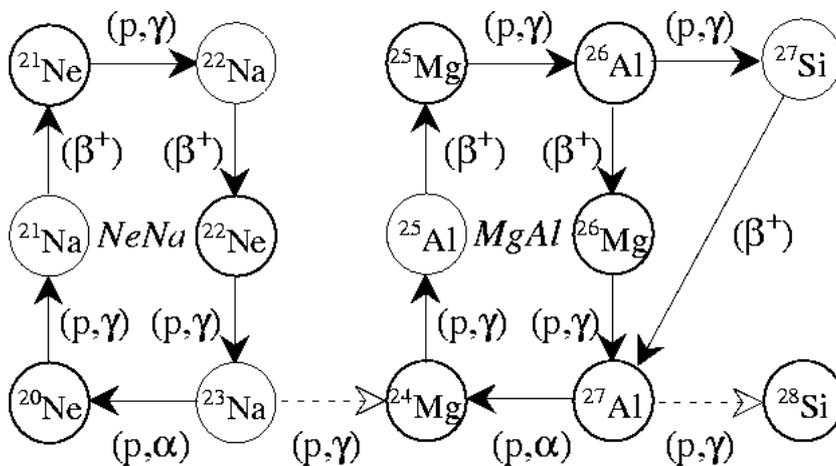


Abbildung 5.6: CNO-ähnliche Zyklen mit schwereren Nukliden

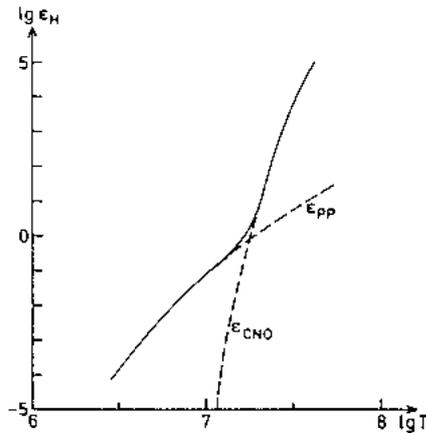


Abbildung 5.7: Energieerzeugung aus pp-Ketten und CNO-Zyklus als Funktion der Temperatur. Die Temperatur im Zentrum der Sonne liegt kurz unterhalb des Punktes, an dem beide Prozesse gleich wichtig sind.

Die Energieausbeute im CNO-Zyklus ist etwas niedriger als in den pp-Ketten. Grund ist der höhere Energieverlust durch Neutrinos; das ^{13}N - ν nimmt 0.71 MeV, das ^{15}O - ν 1.00 MeV und das ^{17}F - ν 0.94 MeV mit. Damit sind die ^8B -Neutrinos der pp3-Kette die mit Abstand energiereichsten.

pp oder CNO? Die Sonne bezieht ihre Energie zu 98% aus den pp-Ketten, obwohl die C \rightarrow N Umwandlung vollständig stattgefunden hat. Im Laufe der nächsten 4 Milliarden Jahre wird sich die Temperatur im Kern erhöhen und der CNO-Prozess immer dominanter werden. Als Roter Riese wird sich die Sonne ausschließlich daraus speisen. Auch in allen Sternen, die etwas massereicher sind als die Sonne (etwa $> 1.3 M_{\odot}$) dominiert der CNO-Zyklus. Abbildung 5.7 zeigt, wieviel Energie bei gegebener Temperatur aus den beiden Möglichkeiten erzielt wird. Es wird auch ersichtlich, dass der CNO-Zyklus die weitaus stärkere Temperaturabhängigkeit hat. Als Faustregel kann man sagen, dass

$$\epsilon_{\text{pp}} \sim T^3 \dots T^5$$

und

$$\epsilon_{\text{CNO}} \sim T^{13} \dots T^{20}$$

5.2.3 Das solare Neutrino-Problem

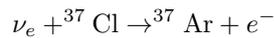
Im frühen 20. Jhdt. identifizierte man "Radioaktivität" als mögliche Energiequelle der Sonne (und damit der Sterne allgemein) und in den 30-er Jahren schließlich die Kernfusion. Bethe und C.F. v. Weizsäcker "ersannen" den CNO-Zyklus als den tatsächlichen Mechanismus, über den Helium erzeugt werden kann, und Bethe später die pp1-Kette. Allerdings hatte man keinen direkten experimentellen Beweis, dass Kernfusion im Zentrum der Sonne abläuft. In den 60-er Jahren dann entwarf man Experimente (vor allem Davies und Bahcall; der erstere bekam dafür 2002 mit Koshiba¹ zusammen den Nobelpreis für Physik), die darauf abzielten, die aus dem Sonnenkern entweichenden *Neutrinos* nachzuweisen, die bei der Wasserstofffusion

¹Führender Wissenschaftler des Kamiokande-Experiments

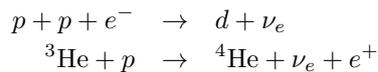
entstehen und das Sonneninnere größtenteils ungehindert und *sofort* mit Lichtgeschwindigkeit verlassen.

Die Experimente

Das Davies-Experiment² (auch Chlor- oder Homestake-Experiment) besteht aus einem Tank mit 615 Tonnen Perchlorylen (C_2Cl_4), der in der Homestake Goldmine in South Dakota in einer Tiefe von 4100 m "Standardfelsen" sitzt, um gegen störende kosmische Strahlung abgeschirmt zu sein. (Elektron-)Neutrinos reagieren mit den Chlor-Atomen nach



Der Wirkungsquerschnitt dafür liegt im Bereich 10^{-44} cm^2 . Die Reaktion kann nur stattfinden, wenn das Neutrino mindestens 0.814 MeV an Energie hat, d.h. dass nur die ${}^7\text{Be}$ - und ${}^8\text{B}$ -Neutrinos gefunden werden können, also nur die wenigen energiereichen. Abbildung 5.8 zeigt den Neutrino-Fluss aus den pp-Ketten, wie er aus den Modellen vorhergesagt wird (hier das Modell von Bahcall & Pinsonneault; mit den theoretischen Unsicherheiten), als Funktion der Neutrino-Energie, sowie die Bereiche, in denen die diversen Experimente messen können. Außer den bekannten Neutrino-Quellen finden sich noch zwei weitere, "pep" und "hep". Diese stammen aus den Reaktionen



Die erste ist eine um einen Faktor 400 weniger wahrscheinliche Alternative zur $p+p$ -Reaktion, die zweite der triviale, aber leider sehr unwahrscheinliche letzte Schritt zu ${}^4\text{He}$. Die Neutrinos aus dieser Reaktion (wenn sie stattfindet; sehr ungewiss) hätten allerdings sehr hohe Energie. Beachte auch, dass manche Neutrinoquellen zu einem Spektrum, andere dagegen zu scharfen Linien führen. Das hängt davon ab, ob mit dem Neutrino noch ein anderes Lepton (e^+) entsteht, denn dann können die beiden Teilchen sich die frei werdende Bindungsenergie aufteilen. ${}^7\text{Be}$ kann in zwei Energiezuständen entstehen, wodurch zwei Neutrino-Energien möglich sind.

Für die Detektormasse des Chlor-Experiments und den erwarteten Fluss der solaren Neutrinos ergibt sich etwa 1 Reaktion/Tag! Das Argon zerfällt dann mit einer Halbwertszeit von 35 d durch Elektroneneinfang zurück zu Chlor. Diese radioaktiven Argonatome galt es zu finden. In der Praxis wurde etwa 2 Monate lang gesammelt, dann alles Argon chemisch ausgewaschen und aus der Radioaktivität (γ -Zerfall) auf die Zahl der Atome zurückgeschlossen. Das langjährige Ergebnis von Davies, das aber schon nach den ersten Jahren feststand, ist, dass nur etwa 1/3 so viele Argon-Atome erzeugt wurden, wie erwartet wurden, also, wenn alles richtig gemacht wurde, nur 1/3 so viele Neutrinos im Detektor ankamen.³ Die Messung liefert $2.56 \pm 0.23 \text{ SNU}$ gegenüber $7.6 \pm 1.1 \text{ SNU}$, die das Modell erwarten ließe (s. Abb. 5.9, "Cl"-Säulen). Man beachte, dass fast ausschließlich B- und Be-Neutrinos gemessen werden.

Folgende Aspekte sind wichtig:

1. der Nachweis der Neutrinos aus der Sonne war gelungen
2. damit auch der Nachweis, dass Kernfusion (Wasserstofffusion) stattfindet, und damit die Energiequelle der Sterne gefunden war

²Auf der Web-Seite von J. Bahcall, <http://www.sns.ias.edu/~jnb>, findet sich eine ganze Fülle von ausgezeichnetem wissenschaftlichen und populären Material zu diesem Thema.

³Die Messung wird in SNU (Solar Neutrino Units) ausgedrückt; $1 \text{ SNU} = 10^{-36}$ Reaktionen pro Target Atom und Sekunde.

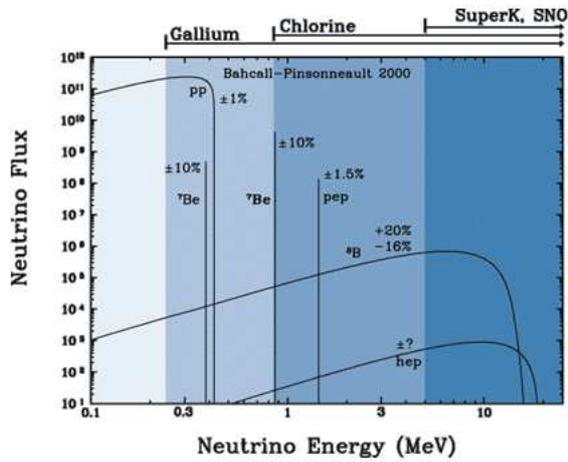


Abbildung 5.8: Erwartete Neutrino-Flüsse aus den verschiedenen Reaktionen der pp-Ketten und Messbereich der Experimente

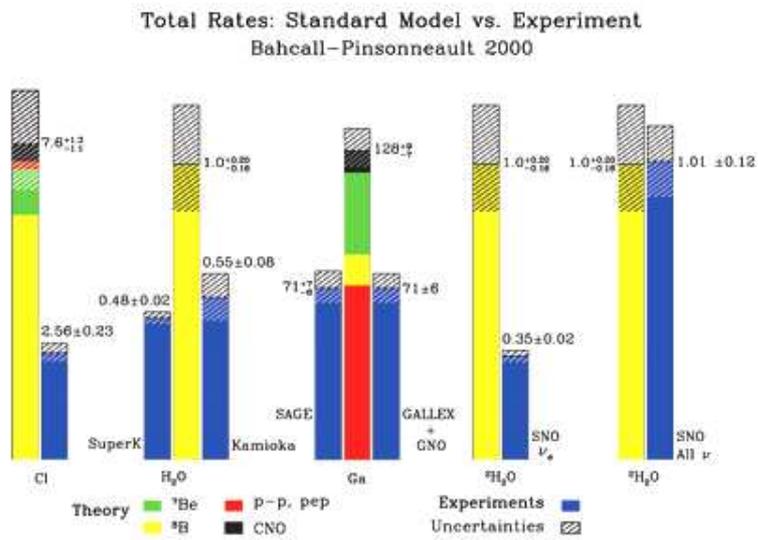
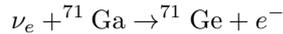


Abbildung 5.9: Gegenüberstellung von Messung und Erwartung von solaren Neutrinos für alle Experimente. In den Modellen ergibt sich der (schraffierte) Fehlerbereich aus Unsicherheiten z.B. in den Kernreaktionsraten. Während in den Modellen die Beiträge aus den unterschiedlichen Quellen identifizierbar sind, ist das in den Experimenten nicht möglich.

3. es gibt ein Defizit in den Neutrinos, das erklärt werden musste

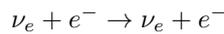
Da man nicht sicher sein konnte, ob der Detektor auch wirklich so arbeitet wie beabsichtigt und man auch die pp-Neutrinos messen wollte, wurden in der Folge weitere Experimente erdacht.

In den frühen 90-er Jahren wurden zwei weitere radiochemische Experimente gebaut: GALLEX (seit 1991) im Gran Sasso Labor und, fast baugleich, das SAGE-Experiment in Russland. Beide haben ^{71}Ga in der Detektor-Flüssigkeit (30.3 Tonnen GaCl_3 bzw. reines Gallium), das durch



für $E \geq 233\text{ keV}$ umgewandelt wird. Die Zerfallsrate des ^{71}Ge beträgt 11.43 Tage. In GALLEX wurden 1.2 Reaktionen/Tag oder 128 SNU erwartet (SAGE ähnlich), wobei hier die pp-Neutrinos dominieren (Abb. 5.9; "Ga"-Säule). GALLEX wurde später durch ein Nachfolgeprojekt (GNO) fortgesetzt, das mittlerweile auch eingestellt wurde. Gemessen wurden nur (langjähriges Mittel) 71 SNU, also auch deutlich weniger als erwartet. Allerdings ist das Defizit kleiner als im Cl-Experiment.

Weiterhin wurde in Japan ein völlig anderer Detektor aufgebaut, der Kamiokande-, später (seit 1991) Super-Kamiokande-Detektor. Dies ist ein Echtzeit-Experiment, bei dem in 2140 Tonnen ultra-sauberem Wasser die elastische Streuung von ν an Elektronen stattfindet.



Das gestreute Elektron wird stark beschleunigt (Überlichtgeschwindigkeit im Wasser) und emittiert hochenergetisches Licht in einem Vorwärtskegel (Čerenkov-Licht), dessen Öffnungswinkel auf die Elektronen-Energie und damit auf die Neutrino-Energie schließen lässt. Dieses Licht wird von etwa 1000 Photomultipliern gemessen. Damit kann man auch die Richtung der einfallenden Neutrinos bestimmen: sie kommen tatsächlich von der Sonne. Die Energieschwelle liegt bei 5 MeV, d.h. nur $B-\nu_s$ können entdeckt werden. Das Defizit (s. Abb. 5.9; Detektor H_2O) beträgt 65%. Dieser Detektor hat wesentlich zur Lösung des Neutrino-Problems beigetragen, vor allem wegen der möglichen Energieaufösung, seiner guten Statistik und weil es ein Echtzeit-Experiment ist.

Engültig geklärt (s.u.) wurde das Neutrinoproblem durch SNO (Sudbury Neutrino Observatory; ab 2000; siehe Abb. 5.10) in Kanada. Hier werden 1000 t schweres Wasser (Detektor $^2\text{H}_2\text{O}$ in Abb. 5.9) verwendet, ansonsten ist das Experiment ähnlich zu Superkamiokande. Neben der bereits erwähnten Streuung mit Elektronen gibt es noch zwei besondere Reaktionen mit dem Deuterium des schweren Wassers (s. Abb. 5.11):

1. die Reaktion $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$, die nur für das Ladung tragende Elektron-Neutrino stattfinden kann, und bei der das Elektron wieder Čerenkov-Licht emittiert
2. die Reaktion $\nu_x + d \rightarrow p + n + \nu_x$, die für alle drei Neutrino-Sorten ("x") stattfinden kann; hier findet der Nachweis über die Folgereaktion $^{35}\text{Cl} + n \rightarrow ^{36}\text{Cl} + \gamma$ und die dabei frei werdenden Röntgen-Photonen statt. Für diese Reaktion wurde das schwere Detektorwasser mit NaCl gesalzen.

Das Ergebnis ist für die erste Reaktion (Abb. 5.9; 2. Säulengruppe von rechts; $^2\text{HO}_2$) genau wie in Superkamiokande. Die Summe der Reaktionen der beiden anderen Reaktionen (Abb. 5.9; rechteste Gruppe) aber ist so, wie man es aus dem Modell erwartet: die Gesamtanzahl der Neutrinos aller Arten entspricht der Zahl von Neutrinos aus dem Innern der Sonne. Allerdings entstehen dort eigentlich nur Elektron-Neutrinos, während im Detektor offensichtlich alle drei Neutrinosorten (auch *Flavour* genannt) ankommen. Das führte zur ...

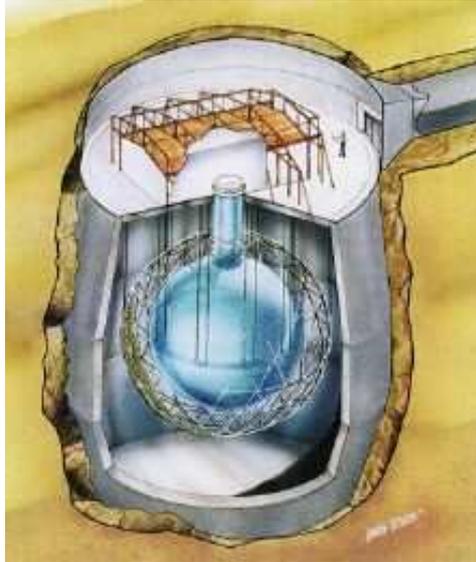


Abbildung 5.10: Das SNO-Experiment in der Creighton-Mine nahe Sudbury, Ontario.

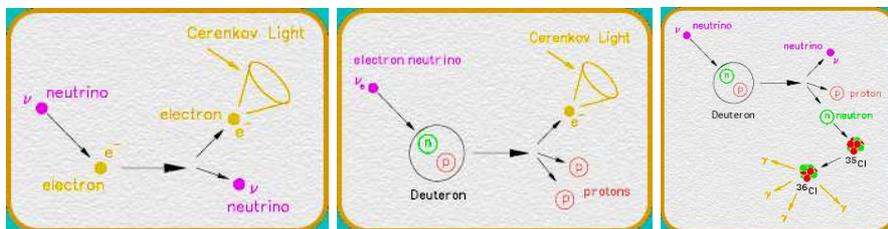


Abbildung 5.11: Die drei Neutrino-Reaktionen in SNO

Erklärung des solaren Neutrino-Problems

Seit den ersten Ergebnissen von Davies suchte man nach einer Erklärung des gemessenen Defizits. Lange wurde die *astrophysikalische Lösung* favorisiert, d.h. die Annahme, dass die theoretischen Sonnenmodelle falsch wären. Da die Reaktionsrate für die B-Neutrinos mit $\sim T^{40}$ geht, wäre eine nur 3-5%ige Erniedrigung der zentralen Temperatur im Sonnenmodell nötig gewesen, um das Davies-Experiment zu reproduzieren. Allerdings zeigten sich die Modelle erstaunlich robust gegen solche Versuche und drastische, teilweise unphysikalische Eingriffe in die Modelle waren nötig, um das Problem zu beseitigen.

Ebenso scheiterten Versuche, die die Unsicherheiten in den Reaktionsraten auszunutzen versuchten (die *kernphysikalischen Lösungen*), weil die Sonne "weiß", wieviel Energie sie produzieren muss. Jede Erniedrigung der Reaktionsrate wird durch eine minimale Erhöhung der Temperatur ausgeglichen.

Als auch die Gallium- und Kamiokande-Ergebnisse vorlagen, war klar, dass diese beiden Lösungen nicht funktionieren könnten. Man kann nämlich nicht gleichzeitig alle drei Experimente erklären, auch wenn man annimmt, dass die unterschiedlichen Reaktionen, die Neutrinos liefern, mit beliebigen Anteilen addiert werden können, also ohne, dass man die Bedingungen im Innern der Sonne und ihre Struktur berücksichtigt. Das Argument geht etwa so: Superkamiokande misst nur B-Neutrinos. Nehmen wir an, dass das der wirkliche B- ν Fluss der Sonne ist, kann man sofort ausrechnen, wieviel B- ν s das Davies-Experiment messen sollte. Es zeigt sich, dass damit praktisch keine Be- ν s mehr von der Sonne kommen dürfen. Ähnlich ist es mit den Gallium-Experimenten. Man braucht mindestens 1 pp-Reaktion zur Erzeugung eines α -Teilchens; die Gesamtenergie ergibt sich aus der solaren Leuchtkraft. Damit weiss man, wieviele pp- ν s man mindestens haben muss (75 SNU). Damit bleibt wiederum kein Platz für die aus Superkamiokande bekannten B-Neutrinos. Diese Widersprüche, mathematisch formuliert, zeigen, dass irgendetwas mit den Neutrinos auf ihrem Weg von der Sonne in den Detektor passiert sein muss, so dass die Experimente die Neutrinos nicht messen können.

Die endgültige Lösung ist somit die *teilchenphysikalische Lösung*: die in Kernreaktionen entstehenden ν_e (Elektron-Neutrinos) wandeln sich auf ihrem Weg zur Erde, vor allem in Wechselwirkung mit der solaren Materie, in ν_μ (Myon-Neutrinos) und ν_τ (Tau-Neutrinos) um, die in den klassischen Experimenten nicht gemessen werden können. In SNO allerdings wechselwirken sie mit dem (ungeladenen) Neutron im Deuterium-Kern, und da die Zahl nicht verändert wird, erwartet man, dass die Gesamtzahl an gemessenen Neutrinos derjenigen entspricht, die die Modelle vorhersagen (beachte, dass es sich wiederum nur um die B-Neutrinos handelt, also die, die am empfindlichsten gegen T-Änderungen sind). In der Tat stimmt diese Zahl mit der Erwartung überein, so dass das Sonnenmodell überzeugend bestätigt wird.

Was lernt man daraus? Die eben besprochenen *Neutrino-Oszillationen* (-Umwandlungen) können nur stattfinden, wenn Neutrinos Masse haben. Das ist eine neue Tatsache, die die teilchenphysikalischen Modelle erst unterbringen müssen. Und man kann sogar den Massenunterschied aus den solaren Daten bestimmen, allerdings nicht die absolute Masse. Die Sonne und die Neutrino-Experimente haben also eine Erweiterung unseres Wissens in einem ganz anderen Bereich bewirkt.

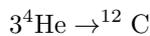
5.3 Helium-Brennen

Da am Ende des Wasserstoff-Brennens keine Protonen mehr im ausgebrannten Kern vorhanden sind, sind die weiteren Brennphasen von Reaktionen mit α -Teilchen gekennzeichnet. Diese liegen jetzt auch mit einer Häufigkeit von $Y = 1 - Z \approx 1$ vor.

5.3.1 Der 3- α -Prozess

Nachdem der Wasserstoff zu Helium fusioniert wurde, sollten, nach einer gewissen Erhöhung der Temperatur des stellaren Kerns die nächst schwereren Elemente, also Li, Be, B erzeugt werden. Wir haben aber schon gesehen, dass ihre leichteren Isotope (erzeugt durch Protonen-Einfang) so instabil sind, dass immer wieder leichtere Nuklide, vor allem ${}^4\text{He}$ daraus hervorgingen. Auch die schwereren Isotope, die durch α -Einfang auf ${}^4\text{He}$ entstehen könnten (Massenzahl 8), sind nur sehr kurzlebig. Daher ist es nicht möglich, signifikante Mengen dieser Elemente zu erzeugen. Wie soll man aber dann das nächste stabile Element, den Kohlenstoff herstellen? Im Kern eines Sterns stehen auch keine Protonen mehr zur Verfügung, so dass nur Reaktionen mit ${}^4\text{He}$ in Frage kommen, obwohl die $({}^4\text{He} + {}^4\text{He})$ -Reaktion eben kein stabiles Produkt liefert.

Daher muss die Erzeugung des Kohlenstoffs als nächstmöglichem Element über einen 3-Teilchen-Prozess stattfinden. Die direkte Reaktion



ist aber, wie alle 3er-Stöße, extrem unwahrscheinlich. Wesentlich wahrscheinlicher sind dagegen zwei aufeinander folgende 2er-Stöße, also die Kette



Wir hatten schon gesagt, dass ${}^8\text{Be}$ instabil ist (Zerfallskanäle nach Li, Be, He); allerdings ist der Energieunterschied des ${}^8\text{Be}$ -Grundzustandes zu zwei ${}^4\text{He}$ Kernen nur 92 keV. Dieser Grundzustand hat eine Energiebreite von 2.5 eV, und damit entsprechend eine Lebenszeit von $2.6 \cdot 10^{-16}$ s. Das ist zwar sehr kurz, aber immer noch lange gegen die durchschnittliche Streudauer zweier α -Teilchen. Das heißt, das ein ${}^8\text{Be}$ -Kern viel länger zusammenbleibt, wenn er erst einmal entstanden ist, als die reine nichtresonante α - α -Streuung dauern würde. Damit kann sich dauerhaft ein zwar kleiner, aber doch signifikanter Anteil von ${}^8\text{Be}$ -Kernen aufbauen, bis

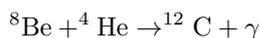


im Gleichgewicht ist. Der Gleichgewichtswert kann aus dem resonanten Wirkungsquerschnitt und der Zerfallszeit des ${}^8\text{Be}$ berechnet werden. Es liegt der Fall $\Gamma_2 \ll \Gamma_1$ vor, wobei Γ_2 im astrophysikalischen Plasma der Reaktion mit einem weiteren α -Teilchen entspricht (im Labor wäre $\Gamma_2 = 0$); Γ_1 ist die Zerfallsrate.

Es ergibt sich, als typische Zahl, für $T = 10^8$ K und $\rho = 10^5$ g cm $^{-3}$ ein Verhältnis

$$\text{Be}^8/\text{He}^4 \approx 10^{-9}$$

Dieser Anteil ist ausreichend, dass der zweite Schritt dieses 3- α -Prozesses ablaufen kann,



Allerdings wäre eine rein nicht-resonante Reaktion zu langsam, um ausreichend Kohlenstoff zu produzieren.

F. Hoyle schloss aus der Tatsache, dass Kohlenstoff das vierthäufigste Element im Universum ist, dass der ${}^{12}\text{C}$ -Kern einen $J^\pi = 0^+$ -Zustand bei einer Energie von etwa $146 \pm 2 \times 82$ keV über der Masse von ${}^8\text{Be} + {}^4\text{He}$ haben sollte. Fowler und Kollegen fanden in der Tat diesen resonanten Zustand in Experimenten im Kellogg Radiation Laboratory am CalTech. Abbildung 5.12 zeigt die Energieniveaus im Vergleich zur Energie der Ausgangskerne. Das resonante Niveau liegt 278 keV über dieser. Obwohl dieser Zustand normalerweise wieder in die Ausgangsteilchen zurückgeht, kann er

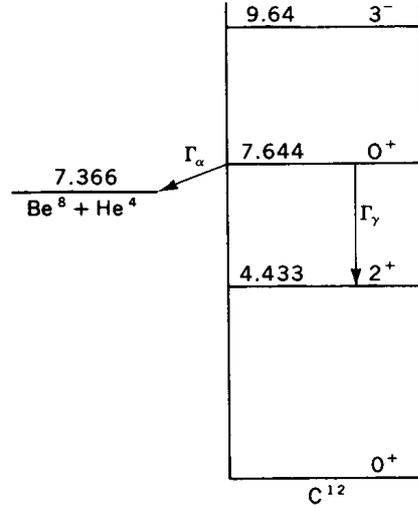


Abbildung 5.12: Energieniveau-Schema des ^{12}C -Kerns und Energie des $^8\text{Be} + ^4\text{He}$ -Systems.

auch elektromagnetisch in den darunter liegenden Zustand zerfallen (der Zerfall in den Grundzustand ist verboten).

Die Reaktionsrate kann aus der Behandlung resonanter Reaktionen abgeschätzt werden zu (ohne Elektronen-Abschirmung)

$$r_{3\alpha} = 9.8 \cdot 10^{-54} \frac{N_{\alpha}^3}{T_8^3} \exp\left(-\frac{42.94}{T_8}\right) \text{ cm}^{-3}\text{s}^{-1} \quad (5.9)$$

($T_8 \equiv T/10^8$) und die Lebenszeit von α -Teilchen gegen diese Reaktion ist

$$\frac{N_{\alpha}}{\tau_{3\alpha}} = 3r_{3\alpha}$$

Die Energie, die dabei frei gesetzt wird ist ($Q_{3\alpha} = [3M_{\alpha} - M(^{12}\text{C})]c^2 = 7.274 \text{ MeV}$)

$$\epsilon_{3\alpha} = \frac{r_{3\alpha} Q_{3\alpha}}{\rho} = 3.9 \cdot 10^{11} \frac{\rho^2 X_{\alpha}^3}{T_8^3} \exp\left(-\frac{42.94}{T_8}\right) \text{ erg g}^{-1}\text{s}^{-1}$$

Die Temperaturabhängigkeit in der Nähe von 10^8 K (der typischen Brenntemperatur) ist extrem, und zwar

$$\epsilon(T) = \epsilon(T_0) \left(\frac{T}{T_0}\right)^n ; \quad n = 42.9/T_8 - 3$$

Obwohl die 3α -Reaktion durchaus einen Fehler von der Größe 2 beinhalten kann, entspricht das einer Temperatur-Unsicherheit von nur 1.7%. Außerdem bedeutet das, dass die Energieerzeugung im Helium brennenden Kern stark konzentriert ist. Daher findet das Helium-Brennen innerhalb des früheren Wasserstoff brennenden Kerns statt (keine Protonen-Zufuhr möglich).

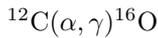
Die Phase des Helium-Brennens ist in den meisten Sternen und Entwicklungsstadien klar getrennt von der des Wasserstoff-Brennens. Fast alle Sterne (auch die Sonne) erreichen diese Phase, da sie Temperaturen von 10^8 K im Laufe ihrer Entwicklung erreichen, wenn auch an unterschiedlichen Stellen (also, nicht immer zuerst im Zentrum). Die Minimalmasse zum Erreichen des Heliumbrennens liegt bei $M \approx 0.5 M_{\odot}$.

5.3.2 α -Einfänge

Aus der Tatsache, dass ^{16}O das dritt- und ^{20}Ne das fünfthäufigste Element ist, lässt sich sofort schließen, dass man wohl durch sukzessive α -Einfänge, beginnend bei ^{12}C , diese Elemente erhält. Tatsächlich sind die Reaktionen



die beiden anderen wichtigen Reaktionen im Heliumbrennen, die zum Teil in direkter Konkurrenz zum 3α -Prozess ablaufen.



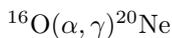
Diese Reaktion bestimmt das Verhältnis von Kohlen- zu Sauerstoff im Universum mit. Beide Elemente werden in Sternen mittlerer ($2 \lesssim M/M_\odot \lesssim 8$) und hoher Masse erzeugt, und zwar hauptsächlich im Heliumbrennen. Die Reaktionsrate ist die vielleicht berüchtigtste in der Astrophysik, da sie trotz vieler experimenteller Versuche immer noch nur mit einer Genauigkeit von einem Faktor 2-3 bestimmt werden konnte. Meist gibt man die Rate relativ zu einem in den 80er Jahren von Fowler und Gruppe veröffentlichtem Wert an: derzeit ist ein Faktor 2 über diesem Wert (temperaturabhängig!) der favorisierte. Grund für die Unsicherheit ist die Tatsache, dass die Reaktion einerseits nichtresonant ist, wobei $\sigma \approx 10^{-17}$ b (bei astrophysikalischen Energien), andererseits einige Resonanzen wichtig genug sind, um die Reaktionsrate zu beeinflussen. Deren Behandlung ist aber kompliziert (so können ihre Flügel überlagern), und die Extrapolation von bisher möglichen Laborexperimenten (bei etwa 1 MeV; Gamow-Peak bei 0.3 MeV) ist daher unsicher. Wir können das Problem der Resonanzen auch so formulieren, dass der genaue Formfaktor nicht bekannt ist, bzw. nur auf einen Faktor 2 genau. Die Reaktionsrate ist

$$\lambda_{\alpha 12} \approx \frac{3.6 \cdot 10^{-14}}{T_8^2} \exp\left(-\frac{69.18}{T_8^{1/3}}\right) \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$$

und die Lebenszeit

$$\frac{1}{\tau_{\alpha 12}} \approx 1.7 \cdot 10^{17} \frac{\rho Y}{T_8^2} \exp\left(-\frac{69.18}{T_8^{1/3}}\right) \text{ Jahre}$$

Die frei gesetzte Energie ist 7.161 MeV.



Aus Abb. 5.13 erkennt man, dass im ^{20}Ne -Kern für verschiedene Werte der Temperatur verschiedene Resonanzniveaus vorhanden sind. Z.B. liegt das Niveau bei 4.969 MeV fast exakt bei der Gamov-Energie von 10^8 K. Allerdings sind Parität und Spin dieses Zustands so, dass er nicht eingenommen werden kann, und daher die Reaktion bei dieser Temperatur doch nicht-resonant ist. Höhere Niveaus sind allerdings bei entsprechen höheren Temperaturen wichtig.

Die frei gesetzte Energie ist 4.73 MeV.

Weitere α -Einfänge sind i.A. irrelevant, weil sich die zunehmende Coulomb-Abstoßung und die niedrige Häufigkeit der Ausgangsnuklide in der Konkurrenz zu den besprochenen Reaktionen negativ auswirken. Die nächste Reaktion wäre $^{20}\text{Ne}(\alpha, \gamma)^{24}\text{Mg}$ mit $Q = 9.31$ MeV.

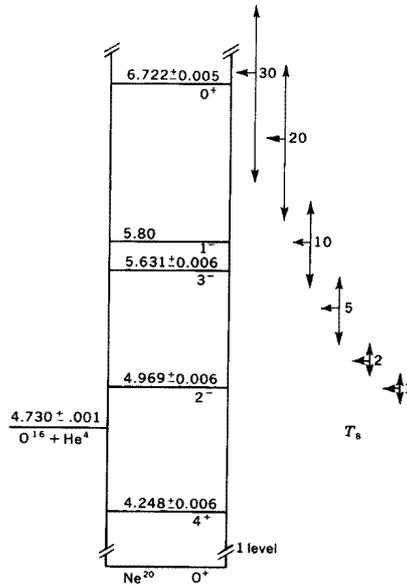


Abbildung 5.13: Energieniveaus des ^{20}Ne -Kerns im Vergleich zur Gesamtenergie von $^{16}\text{O} + ^4\text{He}$, sowie E_0 und ΔE_0 in Abhängigkeit der stellaren Temperatur, gekennzeichnet durch die Werte von T_8 (rechte Pfeile).

5.3.3 Ablauf des Heliumbrennens

Tabelle 5.1 zeigt die Lebenszeiten der Ausgangskerne gegen Reaktionen mit ^4He . Der 3α -Prozess ist immer der bevorzugte, allerdings wird er bei abnehmender Helium-Häufigkeit Y auch schnell unwahrscheinlicher. Man sieht auch, wie bei höheren Temperaturen die Resonanzen zum $^{16}\text{O} + ^4\text{He}$ -System die Lebenszeit drastisch verkürzen.

Tabelle 5.1: Lebenszeiten von ^4He , ^{12}C , und ^{16}O gegen α -Reaktionen als Funktion von T_8 in Jahren.

T_8	$\tau_{3\alpha} \left(\frac{\rho Y}{10^5} \right)^2$	$\tau_{\alpha 12} \left(\frac{\rho Y}{10^5} \right)$	$\tau_{\alpha 16} \left(\frac{\rho Y}{10^5} \right)$
0.8	$1.0 \cdot 10^{12}$		
1.0	$4.2 \cdot 10^7$	$9.6 \cdot 10^7$	$1.1 \cdot 10^{15}$
1.2	$5.2 \cdot 10^4$	$2.3 \cdot 10^6$	$7.7 \cdot 10^{12}$
1.5	$7.2 \cdot 10^1$	$3.3 \cdot 10^4$	$2.6 \cdot 10^{10}$
2.0	$1.2 \cdot 10^{-1}$	$2.4 \cdot 10^2$	$3.6 \cdot 10^7$
3.0	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$5.2 \cdot 10^{-1}$	5.0

Heliumbrennen verläuft also immer etwa nach dem folgenden Schema: sobald die Zündtemperatur für den 3α -Prozess, also etwa 10^8 K erreicht werden, fusioniert Helium zu ^{12}C , dessen Anteil stetig steigt. Aufgrund der gleichzeitig leicht ansteigenden Temperatur in der Brennregion (z.B. Kern eines massereichen Sterns) wird die Reaktion $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ immer schneller. Da irgendwann auch die abnehmende Helium-Häufigkeit den 3α -Prozess stark bremst, gewinnt die ^{12}C -zerstörende Reaktion und der Kohlenstoffanteil nimmt wieder ab, zugunsten einer ansteigenden ^{16}O -Häufigkeit. Neon steigt mit zunehmendem ^{16}O -Anteil. Die engültige Mischung

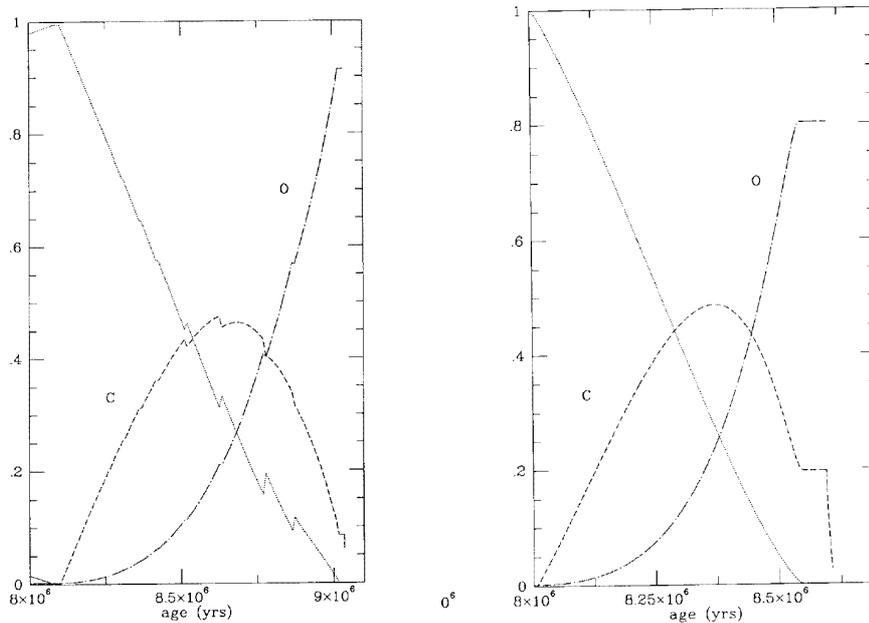


Abbildung 5.14: Zeitliche Entwicklung der Häufigkeiten von ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$ und ${}^{16}\text{O}$ während des Heliumbrennens in zwei Modellen eines $20 M_{\odot}$ Sterns. Der Unterschied zwischen linkem und rechtem Bild liegt in Details der Sternstruktur, die zu unterschiedlichen Temperaturprofilen und -verläufen führen. Der starke Abfall des Kohlenstoffs im rechten Bild ist auf die nächste Brennphase, das Kohlenstoff-Brennen, zurückzuführen.

hängt vom zeitlichen Temperaturverlauf ab. Als Daumenregel kann man sich merken, dass C und O etwa 50:50 Teile ausmachen, mit sehr wenig Neon. Allerdings ist es nicht unüblich, dass dieses Verhältnis zwischen 2:1 und 1:2 schwankt. Das hängt vor allem von der stellaren Masse (je höher, desto heißer, desto mehr Sauerstoff) und eben der verwendeten Reaktionsrate für ${}^{12}\text{C}(\alpha, \gamma){}^{16}\text{O}$ ab. Nur in sehr extremen Fällen findet man signifikante Neon-Produktion zu Lasten des Sauerstoffs. Abbildung 5.14 zeigt zwei Beispiele aus Rechnungen zur Entwicklung eines $20 M_{\odot}$ Sterns.

5.3.4 Weitere Nukleosynthese

Neben den besprochenen Reaktionen finden noch sehr viele andere α -Einfänge auf viele andere Nuklide statt, meist als (α, γ) oder (α, n) Reaktionen, wobei die frei werdenden Neutronen sofort von schwereren Elementen eingefangen werden und den Beginn der Neutronen-Nukleosynthese einläuten (s. Kapitel 6). Für die Energieerzeugung sind diese meist unerheblich, aber sie verändern doch die relativen Verhältnisse der mittelschweren Elemente. Besonders wichtig ist, dass ${}^{14}\text{N}$, welches nach dem CNO-Brennen sehr angereichert ist, durch (α, γ) zu ${}^{18}\text{F}$ wird, welches sofort zu ${}^{18}\text{O}$ weiter zerfällt. Das Ergebnis einer Beispielrechnung zur He-Nukleosynthese ist in Abb. 5.15 gezeigt.

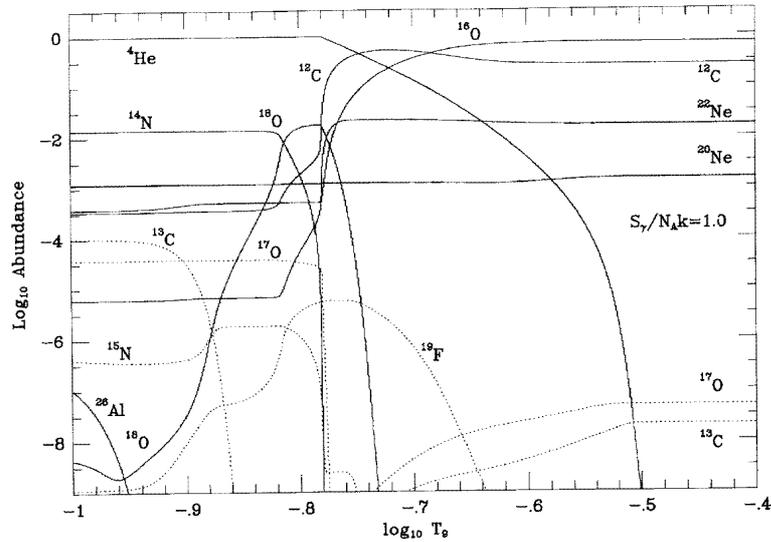


Abbildung 5.15: Entwicklung der Nuklide mittlerer Masse (von Helium bis Aluminium) während des He-Brennens in einer Testrechnung, die etwa den Verhältnissen in einem $20 \dots 25 M_{\odot}$ Stern entspricht.

5.4 Kohlenstoff-, Neon-, Sauerstoff-, Siliziumbrennen

Nur Sterne mit Massen etwa ab $8 M_{\odot}$ (entscheidend ist eigentlich die Heliumkern-Masse, die bei $1 M_{\odot}$ liegen muss; die Gesamtmasse hängt stark vom Massenverlust ab) erreichen Temperaturen, bei denen die weiteren Brennphasen stattfinden können. Ab etwa $10 M_{\odot}$ werden sämtliche hydrostatische Phasen durchlaufen. Da weder Protonen noch α -Teilchen aus den früheren Phasen übrig geblieben sind, und solange das “Zwiebelschalen-System” gilt, auch keine frischen Wasserstoff- oder Heliumkerne von den äußeren in die brennenden Bereiche gemischt werden, können diese Phasen nur über *Schwerionen-Reaktionen*, also von der Art $^{16}\text{O} + ^{12}\text{C}$ ablaufen. Diese Reaktionen weisen mehrere typische Eigenschaften auf:

- die kritischen Temperaturen liegen alle bei einigen 10^8 bis 10^9 K und sind nicht mehr sehr verschieden voneinander
- die Reaktionen laufen meist über Resonanzen und Compound-Kerne ab, die in die verschiedensten Endprodukte (“Kanäle”) zerfallen
- daher sind die Reaktionsraten relativ unsicher
- zunehmend sind mehr Kanäle endotherm

Wir werden diese Phasen nur in ihren globalen Eigenschaften kennenlernen, und Details zu den einzelnen Reaktionen weglassen.

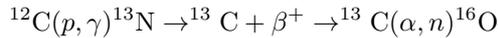
5.4.1 Kohlenstoff-Brennen

^{12}C ist nach dem Helium-Brennen reichlich vorhanden, und das Paar $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ hat die niedrigste Coulomb-Barriere; daher erwartet man, dass diese Reaktion die erste ist, die stattfindet. Die Brenntemperatur liegt bei $6 \cdot 10^8$ K. Die Gesamtmasse des Systems entspricht einer Energie von 14 MeV im ^{24}Mg -Kern. Dort finden sich etliche

Compound-Nukleus Zustände, die auch wegen der Breite ΔE von fast 1 MeV der effektivsten Energie E_0 zu einigen Resonanzen führen. Die Ausgangskanäle dieser Reaktion sind

	Reaktionskanal	Q (MeV)
$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$	$\rightarrow ^{24}\text{Mg} + \gamma$	13.93
	$\rightarrow ^{23}\text{Na} + p$	2.24
	$\rightarrow ^{20}\text{Ne} + \alpha$	4.62
	$\rightarrow ^{23}\text{Mg} + n$	-2.60
	$\rightarrow ^{16}\text{O} + 2\alpha$	-0.11
	$\rightarrow ^{16}\text{O} + ^8\text{Be}$	-0.21

Der elektromagnetische Übergang hat eine niedrigere Wahrscheinlichkeit als die beiden nächsten (p - und α -Emission), so dass diese beiden die Hauptkanäle sind. Die frei werdenden Protonen und α -Teilchen werden natürlich sofort wieder eingefangen, vermutlich in der Kette



Die letzte Reaktion spielt in der Astrophysik eine große Rolle, weil sie eine der beiden Hauptquellen zur Freisetzung von Neutronen ist (s. später).

Die α -Kerne werden auch von ^{12}C , ^{16}O , ^{20}Ne , ^{24}Mg und ^{28}Si eingefangen, so dass am Ende des Kohlenstoffbrennens der ^{12}C hauptsächlich in diese Kerne und ^{23}Na umgewandelt wurde. Diese sekundären Reaktionen liefern zusätzlich Energie, so dass der mittlere Q -Wert pro $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ -Reaktion bei etwa 10-13 MeV liegen dürfte.

Die Reaktion $^{12}\text{C} + ^{16}\text{O}$ ist nicht besonders wichtig, weil bei gleicher Temperatur $Z_1 Z_2 = 48$ im Gegensatz zu 36 für die $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ -Reaktion ist, und bei höherer Temperatur ^{12}C bereits verbrannt ist. Nur gegen Ende des Kohlenstoffbrennens, wenn $T_8 \approx 10$, oder in explosivem Sauerstoffbrennen ($T_9 \approx 3.6$) ist sie von einiger Bedeutung.

Am Ende des Kohlenstoffbrennens sind die hauptsächlichen Produkte ^{20}Ne , ^{24}Mg , und ^{23}Na . ^{16}O ist etwas reduziert. Auch andere Neon- und Magnesium-Isotope sind erhöht, aber immer noch in nicht-relevanten absoluten Mengen vorhanden.

5.4.2 Sauerstoff-Brennen

Die nächste Reaktion von Bedeutung ist $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$, die bei ca. 10^9 K abläuft, und wieder viele Ausgangskanäle hat, die in der folgenden Tabelle (in der Reihenfolge absteigender Wichtigkeit) aufgeführt sind. Dabei ist Q_{eff} die am Ende, nach allen Folgereaktionen, freigesetzte Energie. Ionen-Ionen-Reaktionen mit den anderen häufigen Isotopen sind wegen der höheren Coulomb-Abstoßung nicht wichtig. (Aber siehe den nächsten Abschnitt wegen ^{20}Ne .)

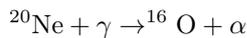
	Reaktionskanal	Q (MeV)	Q_{eff}
$^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$	$\rightarrow ^{32}\text{S} + \gamma$	16.54	
	$\rightarrow ^{31}\text{P} + p$	7.67	≈ 11
	$\rightarrow ^{30}\text{Si} + 2p$	0.38	0.4
	$\rightarrow ^{28}\text{Si} + \alpha$	9.59	10
	$\rightarrow ^{24}\text{Mg} + 2\alpha$	-0.39	-5.6
	$\rightarrow ^{30}\text{P} + d$	-2.41	0.6
	$\rightarrow ^{31}\text{S} + n$	1.45	1.5
	$\rightarrow ^{24}\text{Mg} + ^8\text{Be}$	-0.48	-4.1
	$\rightarrow ^{29}\text{Si} + ^3\text{He}$	-7.47	-4.4
	$\rightarrow ^{20}\text{Ne} + ^{12}\text{C}$	-2.43	-8.4
	$\rightarrow ^{16}\text{O} + ^{12}\text{C} + \alpha$	-7.16	-11
	$\rightarrow ^{20}\text{Ne} + 3\alpha$	-9.71	-21
	$\rightarrow \dots$		

Wieder ist die direkte γ -Emission langsamer, und die p -, n -, α -, und d -Emission die wahrscheinlicheren. Insgesamt scheinen die p - und $2p$ -Kanäle etwa 70% der Fälle auszumachen, und der α -Kanal etwa 20%. Nach diesen primären Reaktionen finden wieder viele sekundäre Reaktionen statt, bei denen die Spaltprodukte weiter reagieren, und insbesondere Protonen, Neutronen und α -Kerne eingefangen werden. Das in der 6. Reaktion in der Tabelle entstehende Deuteron wird übrigens auch sofort photo-desintegriert. All diese Reaktionen müssen natürlich innerhalb eines nuklearen Netzwerkes verfolgt werden. Einfache "summarische" Reaktionsgleichungen sind möglich, aber nicht sehr präzise, vor allem, wenn man an der detaillierten Zusammensetzung interessiert ist, die nach dem Sauerstoffbrennen vorliegt.

Sauerstoff-Brennen läuft bei Temperaturen von $\approx 1.5 \cdot \cdot \cdot 2 \cdot 10^9$ K ab. Am Ende dominieren ^{28}Si und ^{32}S (aus α -Einfang auf ^{28}Si). Die Netto-Energieausbeute liegt im Bereich von 17 MeV pro $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ -Reaktion.

5.4.3 Neon-und Silizium-Brennen

Zwischen dem Kohlenstoff- und Sauerstoffbrennen findet noch die Phase des Neonbrennens statt, die allerdings nicht mit einer Schwerionen-Reaktion stattfindet, sondern mit der Reaktion



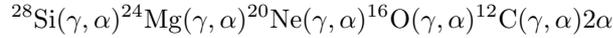
Dies ist die erste *Photodesintegration* von Bedeutung; die typische Temperatur liegt bei 10^9 K und darüber. Bei $T_9 \approx 1.3$ dominiert diese über die Umkehrreaktion, so dass Neon in der Tat verbrannt wird. Neon liegt am Ende des C-Brennens in größeren Mengen vor, zu Beginn des Sauerstoff-Brennens ist es dann eher selten. Wie man auch erkennt, gehen diese Phasen zunehmend gleitend ineinander über.

Die anderen Isotope, die nach dem Kohlenstoff-Brennen in großen Mengen vorhanden sind (s.o.), haben deutlich größere p -, n -, und α -Separationsenergien im Bereich von 7-17 MeV, und werden daher nicht dissoziiert. Die ^{20}Ne α -Separationsenergie liegt bei lediglich 4.73 MeV.

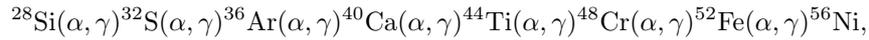
Das freigesetzte α -Teilchen kann ebenfalls von ^{20}Ne eingefangen werden und resultiert in ^{24}Mg . O und Mg machen etwa 90% der Materie nach Ende des Ne-Brennens aus. Die Netto-Energie, die freigesetzt wird, beträgt um 5-6 MeV

Ein interessanter Aspekt ist, dass Neon ein relativ häufiges Element ist, das aber diese Phase der Nukleosynthese im Kern massereicher Sterne nur schwer überlebt. Daher nimmt man an, dass Kohlenstoff-Brennen in Schalenquellen eher die Quelle des interstellaren Neons ist, da Material aus äußeren Schichten leichter vom Stern entkommt.

Auch das Silizium-Brennen findet über Photonen-Einfang und α -Emission und bei $T_9 > 3$ statt ($^{28}\text{Si} + ^{28}\text{Si}$ ist wieder wegen der hohen Coulomb-Barriere schwierig). Die erste Photo-Desintegration ist die von ^{32}S , wobei die Produkte wiederum weiter prozessiert werden, bis zu ^{28}Si . Zwei entgegengesetzte Reaktionsketten, die darauf folgen, sind



und



wobei die erste die α -Teilchen freisetzt, die in der zweiten zur Synthese der Eisengruppe führt. Neben diesen α -Ketten finden entsprechend auch Desintegrationen statt, die p und n freisetzen. Die Häufigkeiten der drei fundamentalen Teilchen liegen im Bereich von 10^{-7} (Protonen) bis 10^{-11} (Neutronen).

Interessant ist auch, dass der Neutronenüberschuss, definiert als

$$\eta = \sum_i \frac{(N_i - Z_i)}{M_i} X_i,$$

welcher für symmetrische Kerne ($N_i = Z_i$) verschwindet, bis auf $\eta \approx 0.07$ ansteigt (zur Erinnerung: ^{56}Fe hat ein η von 0.7143).

Für je zwei ^{28}Si -Kerne, die zu einem ^{56}Fe fusioniert werden, werden etwa 17.62 MeV frei.

5.4.4 Zusammenfassung

Ab dem Kohlenstoffbrennen, d.h. ab $T > 6 \cdot 10^8$ K sind die Brennphasen nicht mehr klar voneinander trennbar und die Anzahl der beteiligten Kerne nimmt stetig zu. Schwerionenreaktionen führen zu einer Reihe von Ausgangskanälen mit hauptsächlich leichten Nukliden, die wiederum sofort von andern schweren Kernen eingefangen werden. Exo- und endotherme Reaktionen laufen ab, und Photo-Desintegration beginnt. Im Wesentlichen findet ein ständiges Umarrangieren statt, dass am Ende, bei $T \approx 4 \cdot 10^9$ K beim ^{56}Fe angelangt ist. In Tab. 5.2 sind die besprochenen Phasen nochmals nacheinander aufgeführt. Man beachte auch, dass die Brennzeiten immer kürzer werden. In diesen Phasen sind Sterne auch wegen der hohen Temperaturen und relativ hohen Dichten (10^8 gm/cm³) von sehr starker Emission von *Plasma-Neutrinos*⁴ geprägt. Dadurch wird fast die gesamte im innersten Kern nuklear erzeugte Energie verloren und trägt nicht zur Leuchtkraft des Sterns bei⁵; der Kern ist energetisch vom Rest des Sterns weitgehend entkoppelt.

⁴Das sind Neutrinos, die aus dem Plasma selbst entstehen, z.B. bei Photon-Photon-Wechselwirkung, also nichts mit Kernreaktionen zu tun haben.

⁵Diese wird von weiter außen liegenden "normalen" Brennschalen geliefert.

Tabelle 5.2: Späte Brennphasen, wie sie in Kernen massereicher Sterne vorkommen. Aufgeführt sind die Häufigkeiten (Masseanteile) wichtiger Nuklide als Funktion der Zeit und damit Brenntemperatur. $t_i = t/10^i$ Sekunden; η ist der *Neutronen-Exzess*, das ist die Zahl der Neutronen über $A/2$ geteilt durch A (Beispiel: η für $^{16}\text{O} = 0$, für $^{22}\text{Ne} = (12 - 10)/22 = 0.091$). Die Tabellen wurden dem Buch von Arnett (*Supernovae and Nucleosynthesis, Princeton University Press 1996*) entnommen, und stammen aus einer Rechnung für einen Stern mit Masse $M = 8 M_\odot$. Modernere und detaillierte Ergebnisse von Netzwerk-Rechnungen finden sich im Buch von Iliadis (*Nuclear Physics of Stars*).

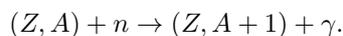
Kohlenstoff-Brennen								
^{12}C	^{16}O	^{20}Ne	^{22}Ne	^{23}Na	^{24}Mg	T_9	$10^3\eta$	t_{10}
0.261	0.710	0.002	0.016			0.761	2.08	0.000
0.150	0.661	0.143	0.008	0.011	0.007	0.910	2.19	0.962
0.001	0.592	0.324	0.002	0.016	0.033	1.402	2.37	1.201
Neon-Brennen								
^{20}Ne	^{16}O	^{24}Mg	^{27}Al	^{28}Si	^{29}S	T_9	$10^3\eta$	t_7
0.324	0.592	0.033	0.006	0.002		1.402	2.37	0.01
0.189	0.655	0.096	0.007	0.016	0.003	1.534	2.28	1.42
0.022	0.743	0.115	0.015	0.064	0.013	1.643	2.36	3.21
0.001	0.758	0.104	0.016	0.078	0.014	1.742	2.41	3.46
Sauerstoff-Brennen								
^{16}O	^{24}Mg	^{28}Si	^{32}S	^{34}S	^{40}Ca	T_9	$10^3\eta$	t_7
0.757	0.103	0.079	0.007			1.808	2.43	0.00
0.494	0.040	0.252	0.129	0.012		1.980	4.18	1.08
0.059		0.463	0.324	0.082	0.003	2.295	6.12	2.00
0.001		0.550	0.270	0.039	0.026	2.766	6.26	2.06
Silizium-Brennen								
^{28}Si	^{32}S	^{34}S	^{54}Fe	^{56}Fe	^{58}Ni	T_9	$10^3\eta$	t_5
0.550	0.270	0.039	0.006	0.005		2.765	6.27	0.00
0.650	0.157	0.001	0.146	0.004	0.005	3.395	6.83	1.35
0.282	0.130		0.462	0.003	0.030	3.523	19.7	2.38
0.040	0.025		0.729	0.014	0.070	3.709	34.3	3.19
0.001	0.001		0.649	0.041	0.126	4.070	38.8	3.39

Kapitel 6

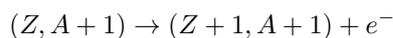
Nukleosynthese mit Neutronen

Nuklide mit $A > 60$ können nicht mehr einfach durch Reaktionen mit Protonen oder α -Teilchen erzeugt werden, weil a) die Reaktionen endotherm werden und b) die immer höhere Coulomb-Barriere immer schwieriger überwunden werden kann. Natürlich können solche Reaktionen stattfinden, wenn nur die Temperatur im Stern genügend hoch ist, aber da der Stern sich von tieferen zu höheren Temperaturen entwickelt, sind alternative Wege bei niedrigerem T interessanter. Diese Alternative sind *Neutronen-Einfänge*, da hier keine Coulomb-Abstoßung auftritt. Das Problem dabei ist allerdings, dass es keine freien Neutronen im stellaren Plasma gibt. Daher benötigt man eine *Neutronenquelle* im Rahmen der stattfindenden Nukleosynthese.

Neutroneneinfang führt zu



solange $(Z, A + 1)$ stabil ist, wird dieser Prozess fortgesetzt werden, wobei man sich aber immer weiter vom β -stabilen Tal entfernt. Daher wird diese Reihe irgendwann durch einen β -Zerfall der Art



abgebrochen werden. Danach kann wieder mit Neutroneneinfängen weitergemacht werden. Der genaue Pfad in der Nuklidkarte hängt vom Verhältnis der Lebensdauern gegen Neutroneneinfang einerseits und β -Zerfall andererseits ab. Während letztere meist konstant ist (Größenordnung Stunden), geht in die erste die Zahl der Neutronen und die Temperatur ein.

Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \tau(n - \text{Einfang}) \gg \tau(\beta) &\rightarrow s - \text{Prozess} \\ \tau(n - \text{Einfang}) \ll \tau(\beta) &\rightarrow r - \text{Prozess} \end{aligned} \tag{6.1}$$

wobei das s für “slow” und das r für “rapid” steht. Die beiden Prozesse laufen unter völlig unterschiedlichen Bedingungen ab.

6.1 Der s-Prozess

6.1.1 Neutronenquellen

Es wurden zwei relevante Neutronenquellen für den s-Prozess identifiziert:

1. $^{22}\text{Ne}(\alpha, n)^{25}\text{Mg}$
2. $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$

Offensichtlich sind diese am effektivsten während des Helium-Brennens. Allerdings zählen die Ausgangsnuklide nicht zu den unmittelbaren Produkten dieser Phase. In Abb. 5.15 sieht man, dass am Ende des Helium-Brennens in massereichen Sternen ^{22}Ne relativ häufig ist ($^{22}\text{Ne}/^{16}\text{O} \approx 0.02$). Es wird produziert durch $^{18}\text{O}(\alpha, \gamma)^{22}\text{Ne}$, wobei das Sauerstoffisotop selbst aus $^{14}\text{N}(\alpha, \gamma)^{18}\text{O}$ stammt. Die Temperaturen, bei denen die *Neon-Quelle* arbeitet, liegen bei $T \gtrsim 4 \cdot 10^8 \text{K}$.

Die *Kohlenstoff-Quelle* ist wichtig in Sternen mittlerer Masse ($2 \lesssim M/M_\odot \lesssim 8$). Allerdings sind die Mengen an ^{13}C , die nach dem Wasserstoffbrennen vorhanden sind, irrelevant. Da ^{12}C aber reichlich im Helium-Brennen erzeugt wird, liegt es nahe, nach Wegen zu suchen, ^{13}C daraus zu erzeugen. Dazu benötigt man Protonen, die aber fehlen. Einzige Möglichkeit ist das Mischen von unprozessierten wasserstoffreichen Schichten des Sterns in die Helium brennenden Gebiete. Dies geschieht während der sehr komplexen Entwicklung auf dem *Asymptotischen Riesenast* (AGB), der theoretisch noch nicht völlig verstanden ist. Immerhin zeigen Rechnungen, dass man in der Tat die Kohlenstoff-Quelle erhalten kann. Die Temperaturen liegen hier bei eher $T \gtrsim 2 \cdot 10^8 \text{K}$.

6.1.2 Wirkungsquerschnitte

Der Wirkungsquerschnitt für Neutroneneinfang steigt mit abnehmender Geschwindigkeit, d.h. in einem thermischen Plasma, mit abnehmender Temperatur. Da keine Coulomb-Barriere überwunden werden muss, ist er

$$\sigma(v) \sim \frac{1}{v}. \quad (6.2)$$

Der gemittelte Wirkungsquerschnitt λ ist damit

$$\langle \sigma(v)v \rangle = \int_0^\infty \sigma v \Phi(v) dv \sim C \int_0^\infty \Phi(v) dv \approx \text{const.} \quad (6.3)$$

und hat nur eine schwache Abhängigkeit von der Plasma-Temperatur. Abbildung 6.1 zeigt σ als Funktion der Nuklidmasse. Bis auf die magischen Neutronenzahlen ist σ auch hier relativ konstant.

Aus $\langle \sigma(v)v \rangle$ kann

$$\langle \sigma \rangle := \langle \sigma(v)v \rangle / v_T \quad (6.4)$$

definiert werden, wobei $v_T = \left(\frac{2kT}{\mu_n}\right)^{1/2}$ ist. μ_n ist die reduzierte Masse des $(A+n)$ -Systems. $\langle \sigma \rangle$ ist dann etwa der Wirkungsquerschnitt, der bei v_T gemessen wird.

Neutronen, die aus anderen Reaktionen freigesetzt werden, haben zunächst nicht die thermische Geschwindigkeit v_T , sondern müssen über Stöße erst thermalisiert werden. Die typische Zeitskala dafür ist aber nur 10^{-5} s. Bei einem Wirkungsquerschnitt von etwa 100 mb, $v_T \approx 3 \cdot 10^8$ cm/s, ist die Lebenszeit eines Kerns mit Masse A gegen Neutroneneinfang

$$\tau_A = \frac{1}{N_n \langle \sigma(v)v \rangle} = 3 \cdot 10^{16} \text{ s} / N_n \quad (6.5)$$

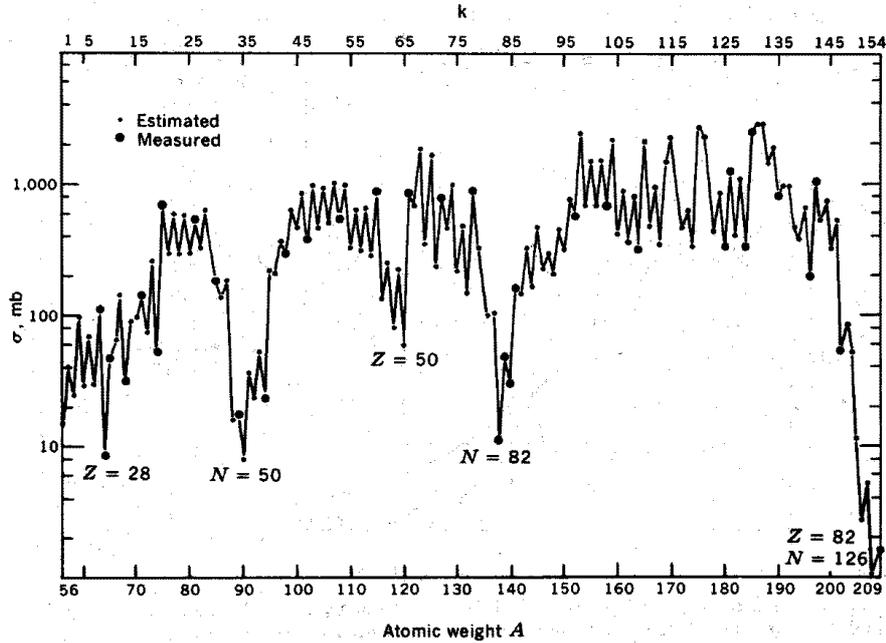


Abbildung 6.1: Gemessene und geschätzte Wirkungsquerschnitte für Neutroneneinfang als Funktion der Nuklidmasse bei einer Energie von 25 keV. Man beachte, dass für die schwereren Kerne σ fast konstant und bei den magischen Neutronenzahlen deutlich niedriger ist. Das erklärt die hohen Anteile der entsprechenden Elemente in der solaren Mischung (s. Abb. 2.1–2.5).

Da die β -Zerfallszeiten von der Größenordnung Stunden sind, erkennt man sofort, dass für einen effektiven Neutronen-Prozess Neutronendichten von 10^{10} cm^{-3} (plusminus einige Größenordnungen) nötig sind.

Die Rategleichung für Neutroneneinfänge ist

$$\frac{dN_A}{dt} = -\langle\sigma(v)v\rangle_A N_n N_A + \langle\sigma(v)v\rangle_{A-1} N_n N_{A-1} \quad (6.6)$$

Mit $\langle\sigma(v)v\rangle = \langle\sigma\rangle v_T \approx \sigma v_T$ wird dies zu

$$\frac{dN_A}{dt} = v_T N_n (-\sigma_A N_A + \sigma_{A-1} N_{A-1}) \quad (6.7)$$

Da der Neutronenfluss zeitlich variieren kann (auch über lange Zeiten, z.B. auf dem AGB in verschiedenen Phasen), ist $N_n = N_n(t)$, und man definiert die sogenannte *Neutron exposure*, welche das Integral über $v_T N_n(t)$ ist

$$\tau = v_T \int N_n(t) dt, \quad (6.8)$$

wobei v_T als konstant (oder geeigneter Mittelwert) angenommen wurde. Aus 6.8 folgt

$$d\tau = v_T N_n(t) dt$$

und man erhält damit

$$\frac{dN_A}{d\tau} = -\sigma_A N_A + \sigma_{A-1} N_{A-1} \quad (6.9)$$

Gleichung 6.9 ist wieder selbstregulierend, es stellen sich Häufigkeiten entsprechend der Wirkungsquerschnitte ein.

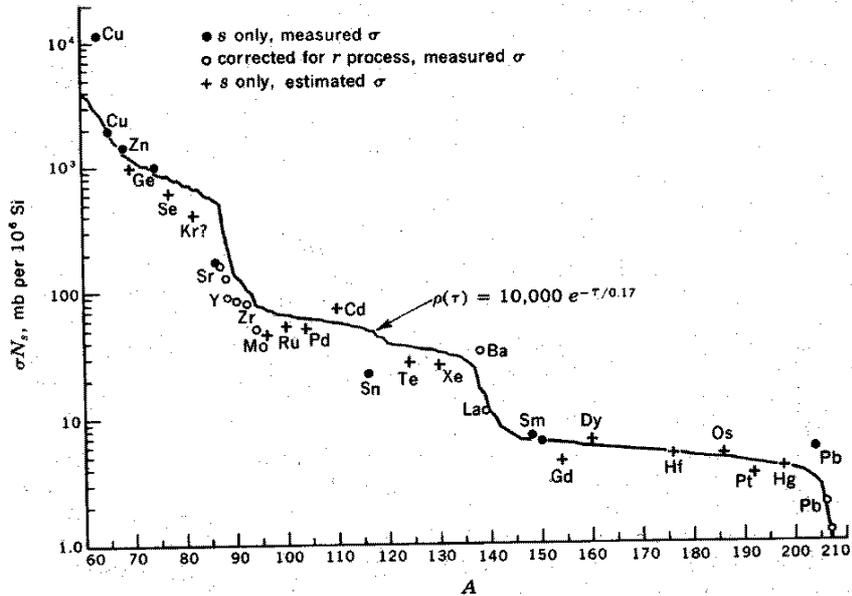


Abbildung 6.3: s-Prozess Elementverteilung im Sonnensystem und analytischer Fit, erhalten aus der Annahme einer exponentiellen Verteilung von Neutron-Exposures. Als Temperatur wurden 30 keV angenommen. Geplotted ist σN , normiert auf 10^6 Silizium-Atome.

Sternen, der starke vielleicht in Sternen der allerersten Generation.

Interessant sind sogenannte *branching points*, d.h. Isotope, bei denen weiterer Neutroneneinfang und β -Zerfall gleich schnell sind; dies beeinflusst die relativen Häufigkeiten von Isotop/Isobar-Sequenzen. Daraus kann man z.B. die Neutronendichte bestimmen; es ergeben sich Werte um $N_n = 3 - 4 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$. Es gibt etwa 15-20 solcher Verzweigungspunkte.

Hat man die Neutronendichte abgeschätzt, kann man an Punkten, an denen die Temperatur eine Rolle spielt, wiederum diese ableiten. Dabei ergeben sich die bereits erwähnten Werte von $2 - 3 \cdot 10^8 \text{ K}$.

Eine Komplikation ergibt sich dadurch, dass β -Zerfallsraten im stellaren Fall temperaturabhängig sein können. Dafür gibt es zwei Gründe, die beide mit der vorliegenden Vollionisation der Atome im stellaren Plasma zusammenhängen: 1. Werden die Elektronen entfernt, ist es möglich, dass marginal stabile Isotope durch die Wegnahme der Hüllen-Bindungsenergie instabil werden. Dies betrifft z.B. ^{163}Dy (Dysprosium) oder ^{179}Hf (Hafnium). 2. Sind atomare Orbits unbesetzt, können "Kern-Elektronen" in diese springen, was energetisch günstiger sein kann.

Die Effekte sind z.T. drastisch; die Erhöhung der Zerfallsraten kann leicht zwischen 10 und 10^4 betragen. Ein extremer Fall ist der von ^{176}Lu , dessen stellare Zerfallszeit wenige Jahre beträgt, im Labor aber 36 Milliarden Jahre!

Die Änderung der β -Zerfallsraten ist somit natürlich auch T-abhängig, und erlaubt es wieder, vor allem an Verzweigungspunkten, Aussagen über die stellaren Temperaturen zu machen.

6.1.4 Beobachtungen und Häufigkeiten von s-Prozess Elementen

Dass der s-Prozess tatsächlich in AGB-Sternen stattfindet, wird am eindrucksvollsten dadurch bewiesen, dass Merrill 1952 neutrales Technetium (Tc I; ^{99}Tc) in

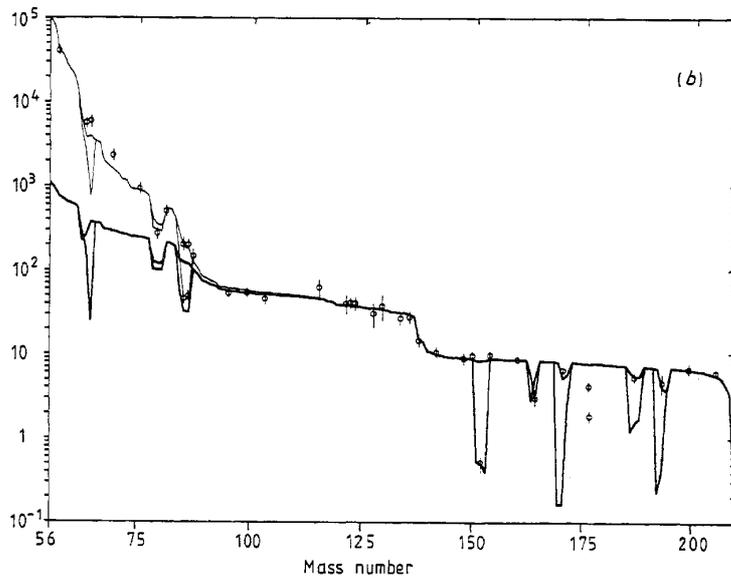


Abbildung 6.4: $N_A\sigma$ gegen Massenzahl A . Die untere Kurve beschreibt ein klassisches Modell mit der “starken Komponente”, die obere eines unter Einschluss einer zweiten, “schwachen Komponente”. Klar sichtbar sind auch die magischen Neutronenzahl-Nuklide bei $A \sim 88, 140, 208$, die zu Stufen in der Kurve führen.

Sternen fand, dessen Halbwertszeit nur $10^5 \dots 10^6$ Jahre beträgt. Es musste also während dieser Entwicklungsphase, die ca. 100 mal länger dauert, synthetisiert worden sein. Der s-Prozess reicht von etwa $A = 55$ bis $A = 209$, ab dort werden die β -Zerfallszeiten zu kurz.

Die Modellierung der Elementhäufigkeiten von $A \approx 55$ bis 210 hat gezeigt, dass man mit einem Modell allein, das auf der Annahme des s-Prozesses in AGB-Sternen basiert, die leichten Isotope nicht reproduzieren kann. Zu der Hauptkomponente muss noch eine “schwache Komponente” dazukommen, die dem s-Prozess in Kernen massereicher Sterne entspricht. Dort sind die Temperaturen höher (40 statt etwa 25 keV), aber die Neutronenflüsse deutlich niedriger ($7 \cdot 10^7$ statt $2 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$); auch die “Bestrahlungszeit” ist mit $\approx 10^4$ Jahren relativ kurz. Diese Komponente erreicht daher nicht die schweren Nuklide (s. Abb. 6.4), sondern nur diejenigen bis etwa $A = 90$.

Weiterführende Literatur Eine gute Zusammenfassung dieses und aller anderen Prozesse, die in dieser Vorlesung besprochen werden, findet sich bei Wallerstein et al. (1997; Rev. of Modern Physics 69, 995). Ein klassischer Uebersichtsartikel zum s-Prozess ist Käppeler et al. (1993; Rep. Progress in Physics 52, 945).

6.2 Der r-Prozess

6.2.1 Ablauf

Um die schwersten Nuklide zu erzeugen, müssen die Neutronen-Einfänge noch wesentlich schneller als im s-Prozess ablaufen (s. die Bedingung bzw. die Definition $\tau(n - \text{Einfang}) \ll \tau(\beta)$). Das impliziert sofort sehr viel höhere Temperaturen; bei

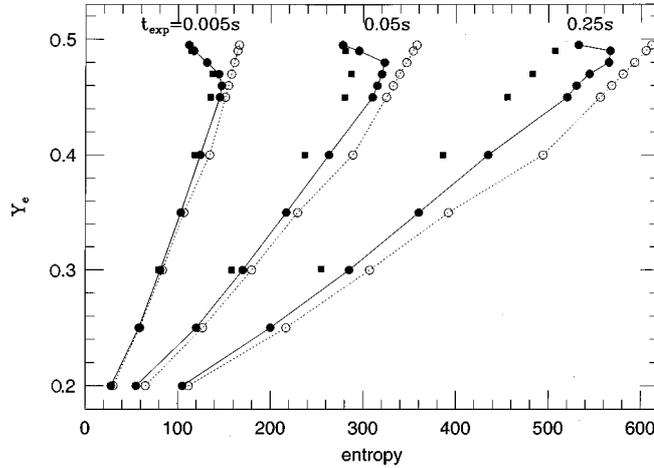


Abbildung 6.6: Minimum Entropie $S/N_A k$, die das Erreichen von $A \approx 195$ im r-Prozess erlaubt.

Prozess darstellen. Alternativen sind Jets, verschmelzende Neutronensterne, oder auch explosives Kohlenstoffbrennen.

Ohne hier auf die Physik von Typ II Supernovae eingehen zu können (s. aber Kapitel 7), sei gesagt, dass durch sehr intensive Neutrino-Flüsse (99% der freigesetzten Energie wird in Neutrinos emittiert, nicht in Licht!) extrem neutronenreiche Bedingungen herrschen (wegen (ν, n) -Reaktionen auf freie Nukleonen). Der r-Prozess beginnt in diesem Fall mit Saatkernen, die nach dem Ausfrieren von α -Einfängen in diesem neutronenreichen Umfeld (α -Prozess, oder auch Neon-Brennen) entstehen. Dieses Quasi-Gleichgewicht hat seinen Schwerpunkt nicht um Eisen, sondern um Krypton ($Z = 36$) bis Zirkonium ($Z = 40$), mit $A \approx 100$, wodurch der Flaschenhals bei $N = 50$ umgangen wird. Etwa $10^{-5} M_\odot$ r-Prozess Material wird wohl per Supernova freigesetzt, was zusammen mit der SN-Häufigkeit reicht, um die gesamte Menge in der Milchstraße über deren Entwicklung hinweg zu erklären.

Die physikalischen Bedingungen sind so, dass zunächst Temperaturen von 10^{10} bis 10^{11} K und Dichten von $10^{11} \text{ g cm}^{-3}$ vorherrschen, die dann bis auf $T \approx 3 \cdot 10^9$ K abfallen, wo alle Reaktionen mit geladenen Teilchen ausfrieren.

Wieviel Saatkern im α -Prozess erzeugt werden, hängt von drei Parametern ab:

1. $S/N_A k$ – Entropie/Baryon, d.h. die Thermodynamik des Materials. *Hohe* Werte implizieren (wie beim Urknall das η) viele Photonen/Baryon, d.h. dass Photodesintegration effizient vonstatten geht, und somit *weniger* Saatkern produziert werden. Zur Produktion von Elementen um den Bleipeak ($A \approx 195$) benötigt man Werte für $S/N_A k$ um 100–500.
2. Y_e – Elektronenanteil N_e/N_{Baryonen} , d.h. der Exzess freier Neutronen, nur anders ausgedrückt. *Niedriges* Y_e führt im Allgemeinen zu *weniger* Saatkernen. Zur r-Prozess Synthese sollte $Y_e \approx 0.45 \dots 0.48$ sein.
3. τ_{dyn} – die dynamische Zeitskala, also im Wesentlichen, wie lange hohe Temperaturen aufrecht erhalten werden, so dass die Rekombination zu Saatkernen stattfinden kann. Typische Zeitskalen sind 5 bis 250 ms

Diese Parameter korrelieren miteinander, wie Abb. 6.6 zeigt.

Weitere Gesichtspunkte:

- Derzeit existiert noch kein vollständiges astrophysikalisches Modell, das alle r-Prozess Elemente in solaren Häufigkeiten vorhersagen kann; insbesondere für $A \lesssim 110$ bestehen Diskrepanzen.
- In sehr metallarmen Sternen (fast Population III; siehe Abb. 2.10) finden sich bereits relative r-Prozess-Häufigkeiten, die unglaublich genau mit denen in der Sonne übereinstimmen. Das deutet auf einen, maximal zwei Produktionsmechanismen hin, und zeigt, dass der r-Prozess von (nahezu) primärer Natur ist.
- Das Interesse am r-Prozess ist auch deswegen hoch, weil die Nuklide, die zur *Kosmochronologie* herangezogen werden, in ihm entstehen, und man daher genaue Produktionsraten benötigt (z.B. für $^{235}\text{U}/^{238}\text{U}$, $^{232}\text{Th}/^{238}\text{U}$, $^{129}\text{I}/^{127}\text{I}$; s. Kapitel 2.1.2)
- Sehr viele Nuklide können sowohl mittels s- als auch r-Prozess erzeugt werden. Es ist deshalb notwendig, solche zu identifizieren, die nur in einem entstehen, und für die anderen die relativen s- und r-Anteile zu bestimmen.
 - reine s-Prozess Isotope sind: ^{134}Ba , Zr, Y, La, Te, ^{80}Kr (Krypton), ^{142}Nd (Neodym), ^{116}Sn (Zinn)
 - reine r-Prozess-Elemente sind: Eu, Ir, Th, (I)

6.3 Der p-Prozess

Dieser Prozess gehört eigentlich überhaupt nicht in dieses Kapitel, weil es hier um den Weg zu *protonenreichen* Nukliden geht. Wir befinden uns also im N - Z -Diagramm links oberhalb des β -stabilen Tals. Man muss also davon ausgehen, dass diese Bereiche durch protonenreiche Verhältnisse und p -Einfänge erschlossen wurden. Damit ist auch klar, dass dies sehr viel schwieriger als für Neutronen-Einfänge ist, und folglich die Häufigkeiten der p -reichen Kerne sehr viel niedriger sein sollten. Tatsächlich sind sie auch 10 bis 100-mal seltener. Beispiele sind ^{180}Ta , ^{180}W und ^{184}Os .

Der p-Prozess startet vermutlich mit s- oder r-Prozess Kernen über (γ, n) Reaktionen. Dazu sind aber

- hohe Temperaturen (MeV-Photonen)
- niedrige Dichten (um (n, γ) -Einfänge zu unterbinden)
- Voranreicherung mit s-Prozess Nukliden

nötig. Eine Möglichkeit wäre explosives C- und O-Brennen in sehr massereichen Sternen. Detaillierte Modelle scheinen zu zeigen, dass auch in Sternen mit $M = 12 \cdots 25 M_{\odot}$ p-Prozess stattfindet (im Bereich $74 \lesssim A \lesssim 200$), wenn die Supernova-Stoßfront durch C/O-Schichten schießt. Allerdings werden nur 60% der p-Kerne produziert, andere, z.B. Molybdän (Mo) und Ruthenium (Ru) p-Kerne werden eher zerstört. Außerdem werden viele p-Isotope bei niedrigerem A zuwenig produziert. Ab $A > 150$ sind die Produktionsraten im Einklang mit den Werten der solaren Mischung.

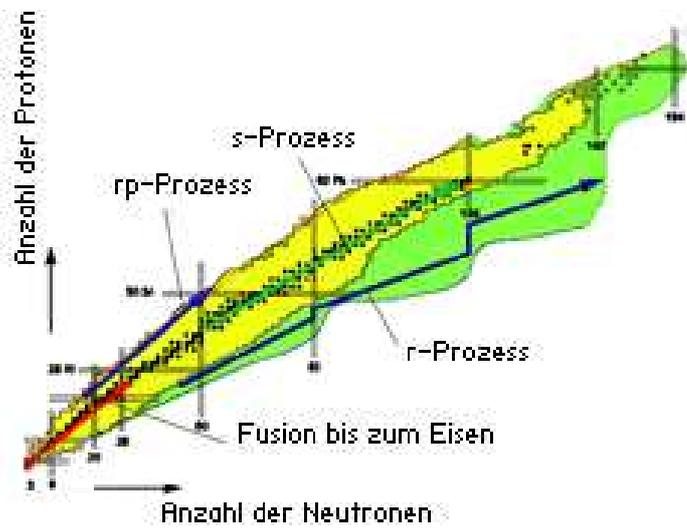


Abbildung 6.7: Ein Überblick über die verschiedenen Prozesse, die in Sternen die chemischen Elemente erzeugen.

Kapitel 7

Explosive Nukleosynthese

7.1 Nukleares statistisches Gleichgewicht

Mit dem Silizium-Brennen und der damit beginnenden Photo-Desintegration nähern sich die Verhältnisse dem *Nuklearen statistischen Gleichgewicht* NSE, in dem alle Hin- und Rückreaktionen so schnell (oder wahrscheinlich) sind, dass die Gleichgewichtsverhältnisse nicht mehr von den Reaktionsraten selbst, sondern nur noch von einer statistischen Verteilung ihrer Bindungsenergien bestimmt wird (s. Kapitel 4.1.3). Historisch hat man (Burbidge, Hoyle, Cameron) die relative Überhäufigkeit der Elemente der Eisengruppe (s. Abb. 2.1), die direkt aus dem Silizium-Brennen hervorgehen sollte, damit zu erklären versucht. Tatsächlich stellte man aber fest, dass man nur bedingt die richtigen Häufigkeiten erhalten konnte, wobei Temperaturen von $3 - 4 \cdot 10^9$ K angenommen wurden. Immerhin sah man daraus, dass man schon nahe an Gleichgewichtsverhältnissen war. Da die am meisten gebundenen Nuklide der Eisengruppe nicht diejenigen mit $Z = N$ sind, sondern solche mit $N = Z + 2$ oder $N = Z + 4$, wie ^{56}Fe , muss man einen gewissen Überschuss an Neutronen haben, um dorthin zu kommen. Das wird durch Abb. 7.1 illustriert, die die Bindungsenergie/Nukleon im interessanten Z -Bereich für zwei Werte von Z/N zeigt. \bar{Z}/\bar{N} in der Materie ist daher neben der Temperatur und Dichte ein weiterer Parameter, und offensichtlich muss bei der Synthese der Eisengruppe ein leichter Neutronenüberschuss vorhanden gewesen sein. Solange Reaktionen, die über die schwache Wechselwirkung ablaufen, sehr langsam sind, bleibt η (s. 5.4.3) erhalten. Viele dieser Reaktionen benötigen die Teilnahme von Neutrinos, diese entweichen aber im Allgemeinen schneller als sie reagieren könnten.

Die Formel für den Gleichgewichtsanteil des Nuklids (A, Z) bezogen auf die Teilchendichten von Protonen (N_p) und Neutronen (N_n) lautet

$$N(A, Z) = g(A, Z) A^{3/2} \frac{N_p^Z N_n^{A-Z}}{2^A} \left[(2\pi M_u kT)^{3/2} / h^3 \right]^{1-A} \exp\left(\frac{B(A, Z)}{kT}\right) \quad (7.1)$$

wobei $g(A, Z)$ das statistische Gewicht des Kerns (A, Z) ist, und $B(A, Z)$ die Bindungsenergie nach Gleichung 1.3.

Das System der Gleichgewichtsgleichungen (7.1) muss noch um 2 Gleichungen erweitert werden, da die Anzahldichten der freien Protonen und Neutronen, N_p und N_n , a priori nicht bekannt sind. Diese Gleichungen sind einerseits die Bedingung der Massenerhaltung ($\sum_i X_i = 1$) sowie die, dass N_p und N_n das richtige, als konstant angenommene η ergeben.

Vor allem in sehr heißen Brennphasen, insbesondere für explosives Brennen, kann man mit NSE gute Vorhersagen über relative Häufigkeiten machen, ohne die detaillierten Reaktionsgleichungen lösen zu müssen.

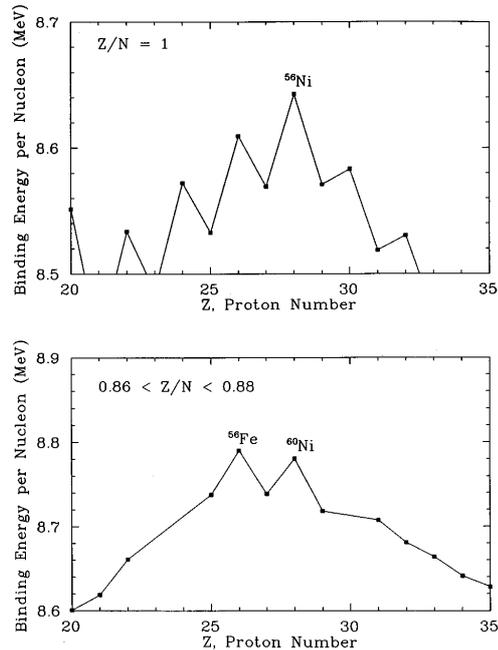


Abbildung 7.1: Bindungsenergie/Nukleon für ausgewählte Z/N -Werte.

Für $\eta = 0$ etwa folgt, dass ^{56}Ni der häufigste Kern ist. Dagegen ergibt sich für $\eta = 0.04$, ^{54}Fe [(28-26)/54 = 0.037], und das Gleichgewicht verschiebt sich für $\eta = 0.07$ dann zu ^{56}Fe (s. die Diskussion am Anfang der Vorlesung zu den Bindungsenergieen).

Formel 7.1 gilt für ein Gleichgewicht, in dem keine Einschränkung für die Häufigkeiten der beteiligten Komponenten gestellt werden. Tatsächlich aber gibt es solche Einschränkungen. Z.B. ist die relative Zahl der Elektronen $Y_e = \sum_i Z_i Y_i$ (äquivalent zu η) oft eine nahezu konstante, oder nur langsam variierende Größe. Dadurch wird das Problem der Entropiemaximierung eingeschränkt und nur ein etwas geordneterer Zustand (niedrigere Entropie) gegenüber dem vollen NSE wird erreicht. Als weitere Einschränkung sind u.U. Reaktionen zu anderen Nuklidgruppen nicht möglich, z.B. weil zuwenig freie Nukleonen vorliegen. Dann spricht man vom *Quasi-Gleichgewicht* QSE, das nochmals geordneter ist. Das ist der Fall für die Eisengruppe. Berücksichtigt man diese Einschränkungen, können die solaren relativen Eisenhäufigkeiten für $Y_e \approx 0.47$ reproduziert werden.

7.2 Produktion der Eisengruppe

Man fand, dass die hydrostatischen Brennphasen (s. Kap. 5) zwar nahezu richtige Verhältnisse liefern, aber der größte Teil der produzierten Eisengruppe-Elemente nicht mehr aus dem Kern entkommen (s. Abb. 2.12). Stattdessen erkannte man, dass Nukleosynthese während einer Supernova-Explosion in den äußeren Schalen, hervorgerufen durch die durchlaufende Stoßfront wesentlich vielversprechender ist. In dieser explosiven Nukleosynthese wird Material, das vor allem aus den Produkten des Neon-Brennens besteht (also viel ^{28}Si) schnell erhitzt. Das bewirkt QSE um Silizium ($A = 28$ bis $A = 42$) durch α -Emission, Wiedereinfang, etc. (s. Kapitel 5.4.3). Später wird auch eine QSE-Gruppe um $A = 58$ erreicht, und beide "Gleichgewichts-Gruppen" verbinden sich zu einem gemeinsamen, NSE-nahen Zustand.

In Supernovae vom Typ Ia (das sind Weiße Zwerge mit einer C/O-Mischung, in denen eine thermonukleare Explosion stattfindet) wird NSE mit $Y_e \approx 0.50$ erreicht und daher vor allem ^{56}Ni wird erzeugt. Im Kern allerdings sind die Dichten höher und NSE unter Einbeziehung der schwachen Prozesse wird erreicht, d.h. dass Y_e sinkt und ^{56}Fe und andere neutronenreiche Isotope resultieren.

Insgesamt produzieren Supernovae vom Typ II, die aus schnelllebigen masse-reichen Sternen hervorgehen, relativ mehr α -Kerne (^{16}O , ^{20}Ne , ...) in Bezug auf Eisen, während die aus langlebigeren Sternen mittlerer Masse hergehenden Typ Ia SNe relativ viel Eisen erzeugen. Wenn alle Sterne gleichzeitig entstanden sind, heißt das, dass die ersten Folgegenerationen α -Element Überhäufigkeiten haben, und erst Generationen, die nach der Lebenszeit der SN Ia Vorläufer von etwa 1 Milliarde Jahren entstanden, die komplette Mischung der neu erzeugten Elemente haben, so wie wir sie in der Sonne vorfinden. Das Verhältnis von α -Elementen zu Eisen und/oder anderen schwereren Nukliden ist daher ein wichtiges Indiz, wie schnell und heftig die chemische Entwicklung und Sternentstehung in einer Galaxie von Statten ging.

Die diversen explosiven Brennphasen tragen die Namen der hydrostatischen Phasen, beziehen sich also auf die hauptsächlich vorkommenden Elemente. Eine Supernova-Stoßfront durchläuft von innen nach außen Si-, Ne-, O-, C-, He-reiche Schichten. Dabei sinken Temperatur und Dichte kontinuierlich. Die folgende Tabelle enthält wichtige Größen der einzelnen explosiven Brennphasen:

Tabelle 7.1: Wichtige Größen einzelner explosiver Brennphasen.

Phase	Temperaturbereich [K]	Dichte [g/cm ³]	Produktbereich $A = \dots$
Silizium	$\gtrsim 4.5 \cdot 10^9$	$\gtrsim 10^6$	48...62
Sauerstoff	$\approx 3.6 \cdot 10^9$	$\approx 5 \cdot 10^5$	28...44
Kohlenstoff	$\approx 2 \cdot 10^9$	$\approx 10^5$	20...30

Abbildung 7.2 zeigt das Ergebnis einer Rechnung zum explosiven Silizium-Brennen im Vergleich zu den solaren Elementhäufigkeiten im Bereich der Eisengruppe. Man beachte, dass bis auf die neutronenreichen Isotope ^{50}Ti , ^{54}Cr und ^{58}Fe alle Häufigkeiten im Bereich $48 \leq A \leq 62$ richtig reproduziert werden.

Die Produkte der hydrostatischen Phasen liegen nahe bei der $Z = N$ Linie. Das gilt bis zum letzten stabilen α -Kern ^{40}Ca , aber auch darüber hinaus (^{44}Ti , ^{48}Cr , ^{52}Fe , ^{56}Ni , ^{60}Zn). Die letzteren Nuklide zerfallen und man erhält Isotopen-Verhältnisse ($^{35}\text{Cl}/^{37}\text{Cl}$, das letztere aus ^{37}Ar ; $^{39}\text{K}/^{41}\text{K}$, aus ^{41}Ca ; $^{54}\text{Fe}/^{56}\text{Fe}$, aus ^{56}Ni ; ebenso ^{57}Fe aus ^{57}Ni ; und weitere), die gut mit den solaren Werten übereinstimmen. Auch das bestätigt die explosive Nukleosynthese.

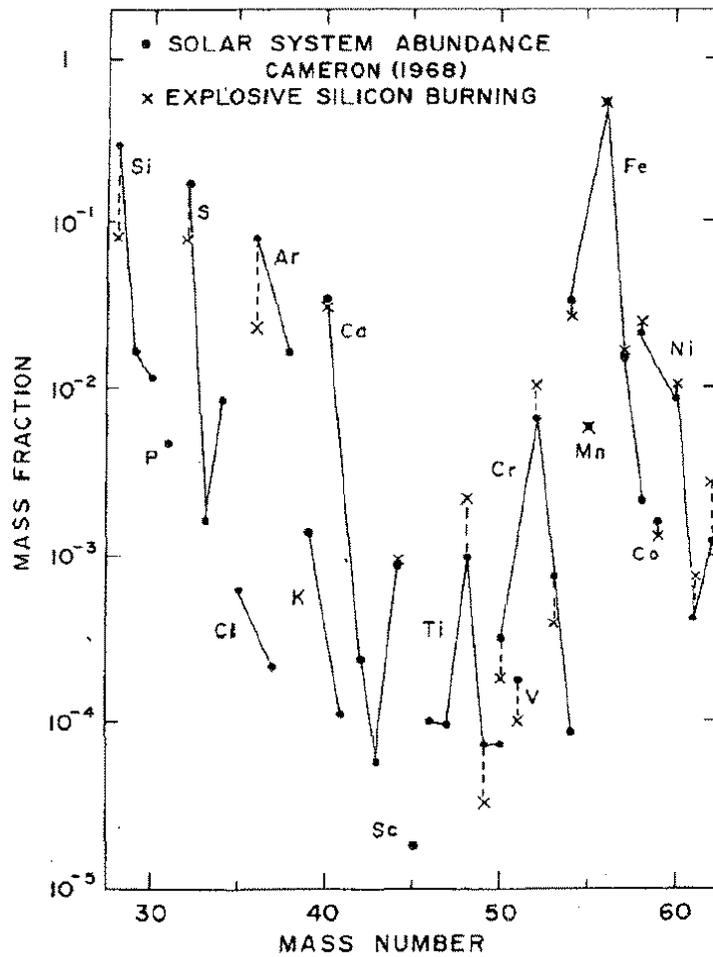


Abbildung 7.2: Ergebnis einer Rechnung zum explosiven Silizium-Brennen und Vergleich mit den solaren Elementhäufigkeiten im Bereich der Eisengruppe. Beide Verteilungen wurden bei ^{56}Fe normalisiert. Die Brenntemperatur reichte von $T = 4.7 \cdot 10^9$ bis $5.9 \cdot 10^9$ K und die Dichten von 10^6 bis $s \cdot 10^6$ gm/cm³.