

Kapitel 2

Die Grundgleichungen

2.1 Gleichung für Masse und Radius

In der Eulerschen Beschreibung ist die Masse dm in einer Schale am Radius r und mit der Dicke dr

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr - 4\pi r^2 \rho v dt$$

Durch partielle Differentiation nach den beiden Variablen r und t erhält man

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho$$

und

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -4\pi r^2 \rho v,$$

den sphärisch symmetrischen Massenfluss durch die Schale bei r (konstant) nach außen.

Differenziert man die erste Gleichung nochmals nach t und die zweite nach r , ergibt sich

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -r^{-2} \frac{\partial(\rho r^2 v)}{\partial r}.$$

Das ist die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho v)$ in unserer Symmetrie.

Wie schon erwähnt, ist es oft günstiger, m als (Lagrange-) Koordinate zu verwenden, also Punkte innerhalb des Sterns, die einen gegebenen Wert der Masse (von 0 bis M) beinhalten. Der Radius dieser Sphären ist dabei uninteressant und zeitlich veränderlich. Die neuen unabhängigen Variablen sind dann m und t , und alle anderen Funktionen davon, z.B. $T(m, t)$ oder $r(m, t)$.

Man kann diese Variablentransformation $(r, t) \rightarrow (m, t)$ formal durchführen, also

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial m}$$

und

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_m = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_m + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r$$

und erhält durch Anwendung der ersten Gleichung auf m damit aber auch nur das bekannte Resultat

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (2.1)$$

Dies ist unsere **erste Sternaufbaugleichung**; sie kann auch als Rezept aufgefasst werden kann, wie man von Eulersch nach Lagrange kommt, nämlich mittels

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Die zweite Transformationsgleichung zeigt auch, dass zeitliche Änderungen in der Lagrange-Schreibweise (linke Seite) sich wesentlich einfacher darstellen, als in Eulerscher (rechte Seite), die nicht nur die reine zeitliche Änderung bei r , sondern auch noch einen Bewegungsterm $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_m$ enthält.

2.2 Die hydrostatische oder Druck-Gleichung

Betrachten wir eine Kugelschale innerhalb des Sterns. Diese wird offensichtlich von der innen liegenden Materie aufgrund deren Schwerkraft nach innen gezogen. Wegen der sphärischen Symmetrie hat diese Kraft nur eine radiale Komponente, und die Schwerkraftbeschleunigung ist einfach

$$g = \frac{Gm}{r^2},$$

wobei $G = 6.673 \cdot 10^{-8} \text{ dyn cm}^2 \text{ g}^{-2}$ die Newtonsche Gravitationskonstante ist.

Zu g gehört ein Gravitationspotential Φ , dessen Gradient (hier: partielle Ableitung nach r) g ist, und das die Poisson-Gleichung erfüllt:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Wir legen die freie Konstante des Potentials so, dass $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ und $\Phi(r) < 0$.

Aus der Beschleunigung g erhalten wir eine Kraft/Volumen durch Multiplikation mit ρ ; dies ist aber dimensionsmäßig dasselbe wie Druck/Länge oder ein Druckgradient. Tatsächlich wirkt ein Unterschied im Druck, der von unten (P_i) bzw. oben (P_a) auf unsere Massenschale wirkt, wie eine Kraft, die die Massenschale bewegt:

$$P_i - P_a \approx -\frac{\partial P}{\partial r} dr.$$

Wenn $P_i > P_a$, so ist der Druckgradient negativ und die rechte Seite auch positiv.

Sollen sich nun die beiden Kräfte die Waage halten (*hydrostatisches Gleichgewicht*), so gilt

$$\frac{\partial P}{\partial r} + g\rho = 0 \quad (2.2)$$

Wenden wir jetzt noch unsere Transformation (2.1) auf (2.2) an, sowie die Definition von g , so erhalten wir unsere **2. Grundgleichung**

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (2.3)$$

Beachten Sie, dass in dieser Form die Dichte nicht in der Gleichung auftritt.

Gleichungen (2.1) und (2.2) stellen die *mechanischen Sternaufbaugleichungen* dar. Sie verbinden die Variablen P , r , und ρ als Funktion der Lagrange-Koordinate m . Das System der beiden Gleichungen ist also unterbestimmt, es sei denn, ρ ist nur eine Funktion von P , und nicht auch noch von T , was zwar im Allgemeinen nicht der Fall sein wird, aber in einigen Situationen (z.B. entartete Materie; isotherme Gaskugeln) doch sein kann. Dann ergeben sich einfachere Lösungen, die unter dem Stichwort *Polytropen* eine wichtige Rolle in der Theorie gespielt haben (s. z.B. das Buch von Chandrasekhar oder von Schwarzschild).

2.2.1 Abschätzungen

Nehmen wir für den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte die Zustandsgleichung eines idealen Gases an, lassen sich die beiden Gleichungen verwenden, um die zentralen Werte P_c und T_c abzuschätzen. Dazu ersetzen wir die Gradienten durch Differenzen von Zentral- und Oberflächenwert, und Radien und Massen durch Mittelwerte ($R/2$ oder $M/2$). Da der Oberflächendruck im Vergleich zum Zentraldruck P_c verschwindet, können wir ihn vernachlässigen und es folgt

$$P_c \approx \frac{2GM^2}{\pi R^4}$$

Die Gleichung für das ideale Gas schreiben wir in der gebräuchlichen Form

$$\rho = \frac{\mu P}{\mathcal{R} T},$$

wobei $\mathcal{R} = 8.315 \cdot 10^7 \text{erg K}^{-1} \text{g}^{-1}$ die Gaskonstante pro Gramm ist, und μ das mittlere *Molekulargewicht*, dh. die mittlere Atommasse pro Gasteilchen (z.B. 1 für neutralen, und 0.5 für ionisierten Wasserstoff).

T_c ergibt sich dann aus P_c und ρ_c , das wir aber nicht kennen. Stattdessen setzen wir $\bar{\rho} = \frac{3M}{4\pi R^3}$, die mittlere Dichte als untere Grenze für die zentrale Dichte ein, und es folgt

$$T_c \lesssim \frac{8 G \mu M}{3 \mathcal{R} R}$$

Damit können wir zentralen Druck und zentrale Temperatur, z.B. in der Sonne abschätzen. Mit den bekannten Werten von M_\odot und R_\odot und $\mu \approx 0.5$ ergeben sich

$$P_c \approx 7 \cdot 10^{15}, \quad T_c < 3 \cdot 10^7$$

in cgs-Einheiten. Zum Vergleich: numerische Rechnungen liefern Werte von $2.7 \cdot 10^{17}$ bzw. $1.6 \cdot 10^7$.

2.2.2 Bewegungsgleichung

Wenn sich die beiden Kräfte in (2.2) nicht genau aufheben, bleibt eine Rest- oder Nettokraft, die eine Beschleunigung auf die Massenschale ausübt. In diesem Fall

muss die Druckgleichung um einen entsprechenden Term ergänzt werden, und lautet dann

$$\frac{\partial P}{\partial m} + \frac{Gm}{4\pi r^4} = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

Der Vorfaktor der rechten Seite ergibt sich analog aus dem für die Schwerkraftbeschleunigung g , und das Vorzeichen aus der Überlegung, dass – falls die Druckkräfte wegfallen würden – die linke Seite positiv wäre, und somit die Netto-Beschleunigung negativ, also nach innen gerichtet sein muss.

Die dynamische Zeitskala Wir schätzen jetzt die Zeitskala einer durch (2.4) beschriebenen Bewegung ab. Im Extremfall soll ein Term der linken Seite verschwinden, zunächst der Druckterm. Der Stern kollabiert dann. Wir ersetzen $|\partial^2 r / \partial t^2|$ durch R/τ_{ff}^2 , wobei τ_{ff} die *Freifall-Zeit* darstellen soll. Auf der rechten Seite steht lediglich g , und somit ist

$$\tau_{\text{ff}} \approx \left(\frac{R}{g} \right)^{1/2}.$$

Umgekehrt können wir (gedanklich) die Schwerkraft ausschalten und erhalten eine entsprechende “Explosionszeit” τ_{exp} aus

$$\frac{R}{\tau_{\text{exp}}^2} \approx \frac{P}{R\rho}$$

wobei wir zunächst auf die intuitivere Euler-Beschreibung gingen und $\frac{\partial P}{\partial r}$ wieder durch P/R ersetzten. Damit ist

$$\tau_{\text{exp}} \approx R \left(\frac{\rho}{P} \right)^{1/2}.$$

Der Ausdruck in Klammern ist aber nichts anderes als die *isotherme Schallgeschwindigkeit* in einem idealen Gas, und somit τ_{exp} die Laufzeit einer Schall- oder Druckwelle durch den Stern. Ist der Stern im hydrostatischen Gleichgewicht, sind die beiden Terme der linken Seite von (2.4) gleich und somit auch $\tau_{\text{exp}} \approx \tau_{\text{ff}}$. Wir können dann diese Zeit auch als die *hydrostatische (Adjustier-)Zeitskala* τ_{hyd} betrachten. Benutzen wir die Formulierung τ_{ff} , schreiben g aus, und formen R^3/GM als mittlere Dichte um, so ergibt sich

$$\tau_{\text{hyd}} \approx \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \approx (G\bar{\rho})^{-1/2}$$

Für einen Stern mit $M = 1M_{\odot}$ ergeben sich auf der Hauptreihe (also die Sonne) ca 27 Minuten, als Riese (mit $R \approx 100 R_{\odot}$) 18 Tage, und als Weißer Zwerg ($R \approx R_{\odot}/50$) 5 Sekunden. Jede Abweichung vom hydrostatischen Gleichgewicht wird also offensichtlich wegen der Größe von Druck- und Gravitationsterm in einer für einen Stern verschwindend kurzen Zeit ausgeglichen.

2.2.3 Das Virial-Theorem

Das *Virial-Theorem* beschreibt den Zusammenhang zwischen globalen Energie-Reservoirs des Stern und erlaubt es, die grundlegende Entwicklung von Sternen zu verstehen. Es ist eine direkte Folge des hydrostatischen Gleichgewichts.

Multipliziert man die hydrostatische Gleichung mit $4\pi r^3$ und integriert dann über dm , erhält man nach partieller Integration von $\int 4\pi r^3 \frac{\partial P}{\partial m} dm$

$$\int_0^M \frac{Gm}{r} dm = 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm$$

Dabei wurde bei der partiellen Integration wieder näherungsweise $P(M) = 0$ gesetzt; der andere Term ist $4\pi r^3 P$ für $r = 0$, also $= 0$.

Die linke Seite ist das Integral über das Gravitationspotential, also die gesamte gravitative Energie $-E_g$ (im Sinne unserer Vorzeichenkonvention).

Im Falle eines mono-atomaren idealen Gases gilt

$$P/\rho = (2/3)u = (2/3)c_v T$$

mit der spezifischen inneren Energie u , daher ist die rechte Seite einfach

$$3(2/3) \int u dm = 2E_i,$$

die doppelte gesamte innere Energie. Das Virialtheorem lautet also

$$\zeta E_i + E_g = 0, \tag{2.5}$$

wobei wir hier den Faktor 2, der nur für ein ideales mono-atomares Gas gilt, durch den allgemeineren Faktor ζ ersetzt. Sollte man den Außendruck nicht vernachlässigen können, muss rechts noch der Term $4\pi R^3 P(R)$ stehen.

Hat der Stern nur die innere und gravitative Energie zu Verfügung, also

$$W = E_i + E_g = (1 - \zeta)E_i = \frac{\zeta - 1}{\zeta} E_g$$

($W =$ Gesamtenergie), so speist sich die abgestrahlte Leuchtkraft aus der Änderung von W , d.h.

$$L = -\frac{dW}{dt} = (\zeta - 1)\dot{E}_i = \frac{1 - \zeta}{\zeta} \dot{E}_g. \tag{2.6}$$

Im Standardfall $\zeta = 2$ erhalten wir also

$$L = -\frac{\dot{E}_g}{2} = \dot{E}_i$$

Wichtig ist nun die Interpretation dieses Ergebnisses: Sterne verlieren Energie von der Oberfläche; diese Energie muss aus dem gesamten Energie-Reservoir ersetzt werden, und zwar durch Erhöhung der gravitativen Bindung, also durch Erniedrigung von E_g (der Stern komprimiert in seinem Gravitationspotential); dabei bleibt das hydrostatische Gleichgewicht erhalten. Im Falle eines idealen Gases geschieht dies derart, dass (etwa) die Hälfte der dabei gewonnenen Energie den Energieverlust an der Oberfläche ersetzt, aber (etwa) genauso viel Energie in die Erhöhung der inneren Energie E_i , also in eine Erhöhung der Temperatur fließt!

Das heißt, dass der Energieverlust von der Oberfläche zu einem kompakteren, heißeren Stern führt! Das ist die globale Richtung der Entwicklung von Sternen: sie werden immer kompakter und heißer, auch wenn lokal es davon gravierende Abweichungen geben kann. Und deswegen können Sterne auch immer schwerere Elemente fusionieren, bis hin zum Eisen.

Die thermische Zeitskala Im obigen Fall (also wenn der Stern keine weitere Energiequelle als die Gravitationsenergie hat, denn die innere Energie wird nicht verbraucht), können wir wieder abschätzen, wie lange diese ausreicht, um den Energieverlust durch L auszugleichen: $L \approx \left| \frac{dE_g}{dt} \right|$ definiert die typische Zeitskala, die meist als *Kelvin-Helmholtz-Zeitskala* τ_{KH} bezeichnet wird.

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{|E_g|}{L} \approx \frac{E_i}{L}$$

$$|E_g| \approx \frac{GM^2}{2R} \Rightarrow \tau_{\text{KH}} \approx \frac{GM^2}{2RL},$$

wobei wir wieder eine Näherung für die Energie einer selbst-gravitierenden Kugel eingesetzt haben, nämlich $E_g \approx GM/R \cdot M/2$.

Im Fall der Sonne ergeben sich etwa $1.5 \cdot 10^7$ Jahre. Bevor das viel längere geologische Alter der Erde bestätigt war, nahm man daher an, dass sich die Sonne nur aus ihrer Gravitationsenergie speist. Tatsächlich reicht diese Energiequelle aber für keinen Stern aus. Allerdings ist τ_{KH} wieder ein Maß für die Zeit, die ein Stern, oder Teile davon, benötigen, eine thermische Störung, z.B. ein plötzliches energiereiches nukleares Zünden, thermisch auszugleichen. Wie man sieht, dauert dies wesentlich länger als im Falle dynamischer Störungen.

2.3 Die Energiegleichung

Wir definieren L_r als die Energie, die durch eine Massenschale m bei r fließt. Die Randbedingungen an L_r sind natürlich $L_r(0) = 0$ und $L_r(M) = L$, also die Gesamtleuchtkraft. Wir verstehen darunter diejenige Energie, die durch den Stern transportiert wird (s. die vierte Gleichung; Abschnitt 2.4), nicht aber solche, die den Stern an der Stelle ihrer Erzeugung schon wieder verlässt; das wären z.B. Neutrinos. Ähnlich wie bei der Massengleichung lässt sich die Veränderung von L_r in einer Massenschale der Dicke dm schreiben als

$$dL_r = 4\pi r^2 \rho \epsilon dr = \epsilon dm$$

wobei ϵ ein noch nicht näher spezifizierter Quell(oder Senk-)term (Dimension erg/gs) ist. In einer stationären Massenschale ist dies eine in-situ Energiequelle, im Allgemeinen also die *nukleare Energieerzeugungsrates* $\epsilon_n(T, \rho, \vec{X})$, die positiv gezählt wird.

Die schon erwähnten *Neutrinoverluste* aus dem Plasma werden später behandelt, und in der Energiegleichung getrennt als $-\epsilon_\nu$ behandelt.¹

Schließlich kann die Massenschale nicht-stationär sein, d.h. ihre Temperatur oder Dichte verändert sich, wodurch Energie mit der Umgebung ausgetauscht wird. Das entspricht dem thermodynamischen Ausdruck PdV ; hier verwenden wir das *spezifische Volumen* $v = 1/\rho$. Das bedeutet, dass $(\epsilon_n - \frac{\partial L_r}{\partial m}) \neq 0$, sondern sich mit der Zeit ändert und die Schale eine Wärmemenge dq abgibt/aufnimmt:

$$\left(\epsilon_n - \frac{\partial L_r}{\partial m} \right) dt = dq$$

Wir verwenden jetzt verschiedene thermodynamische Relationen: zunächst, dass $dq = Tds$ (s spezifischen Entropie), wodurch wir die Gleichung umschreiben können zu

¹Neutrinos, die bei Kernreaktionen entstehen, werden dagegen gleich in der Energiebilanz der Reaktion berücksichtigt, und nicht mehr explizit in Gleichung (2.8) aufgeführt.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L_r}{\partial m} &= \epsilon_n - T \frac{\partial s}{\partial t} \\
&= \epsilon_n - \frac{\partial u}{\partial t} - P \frac{\partial v}{\partial t} \\
&= \epsilon_n - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \\
&= \epsilon_n - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dies ist die erste der obigen Gleichungen; die weiteren ergeben sich aus den thermodynamischen Beziehungen (s. Anhang A, oder auch das Buch von Kippenhahn und Weigert) für die Entropie, allerdings unter Vernachlässigung der Abhängigkeiten von der Zusammensetzung (“Mischungsentropie”). Der Ausdruck $-T \frac{\partial s}{\partial t}$ wird auch als *gravothermische Energie* ϵ_g bezeichnet, so dass die Energiegleichung meistens lautet (wobei weitere Energieterme möglich sind)

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \epsilon_n + \epsilon_g - \epsilon_\nu. \tag{2.8}$$

Das ist unsere **3. Grundgleichung**, die Energiegleichung.

2.3.1 Globale Energieerhaltung

Wir können jetzt, ausgehend von (2.8) überprüfen, ob diese Gleichung für die lokale Energiebilanz des Stern konsistent ist mit seiner globalen Energieerhaltung.

Die Gesamtleuchtkraft entspricht der Änderung der Gesamtenergie und setzt sich zusammen aus

$$\dot{W} = \frac{d}{dt}(E_{\text{kin}} + E_g + E_i + E_n) = -(L + L_\nu), \tag{2.9}$$

was sich durch Integration der lokalen Energiegleichung (2.8) ergeben muss. E_{kin} ist eine etwa vorhandene kinetische Energie der Massenschalen (im hydrostatischen Gleichgewicht verschwindend). L_ν ist die der elektromagnetischen Leuchtkraft L entsprechende *Neutrinoleuchtkraft*.

Einige Terme sind leicht herleitbar: $L = \int \frac{\partial L_r}{\partial m} dm$, $L_\nu = \int \epsilon_\nu dm$, $\int \epsilon_n dm = -\frac{dE_n}{dt}$. Dabei ist E_n das “Reservoir” der nuklearen Energie, das durch exotherme Kernreaktionen abgebaut wird.

Die Integration von ϵ_g ist dagegen komplizierter. Unter Benutzung von

$$\epsilon_g = -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(siehe (2.7); 3. Zeile) ergibt sich aus dem ersten Term durch Integration über die Masse $-dE_i/dt$. Außerdem wissen wir schon aus der Herleitung des Virialtheorems, dass

$$E_g = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm.$$

Dieses Zusammenhang differenzieren wir nach t , ebenso wie die hydrostatische Gleichung, die dann nach Multiplikation mit $4\pi r^3$ und Integration lautet:

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{\partial \dot{P}}{\partial m} dm = 4 \int_0^M \frac{Gm}{r} \dot{r} dm = 4\dot{E}_g$$

Genau wie beim Virialtheorem integrieren wir nun den linken Term partiell und erhalten

$$[4\pi r^3 \dot{P}]_0^M - 3 \int_0^M 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} \dot{P} dm$$

Wieder verschwindet der erste Term wegen $P(M) \approx 0$ für alle t . Im zweiten verwenden wir $\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho$ und erhalten somit aus der nach t differenzierten und über dm integrierten hydrostatischen Gleichung

$$-3 \int_0^M \frac{\dot{P}}{\rho} dm = 4\dot{E}_g.$$

Wir haben jetzt zwei Formen für \dot{E}_g , aus denen wir eine dritte herleiten können:

$$\dot{E}_g = - \int_0^M \frac{P}{\rho^2} \dot{\rho} dm$$

welche dem noch fehlenden Term in ϵ_g entspricht, wodurch die alle Terme in (2.9) identifiziert sind, mit Ausnahme von E_{kin} . Diesen kann man aber auch erhalten, wenn man die Form (2.4) der Druckgleichung benutzt. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass die lokale Energiegleichung, integriert über den gesamten Stern, die globale Energieerhaltung liefert.

2.3.2 Die nukleare Zeitskala

Die nukleare Zeitskala ist definiert als $\tau_n := E_n/L$. Das nukleare Energiereservoir des Sterns ist etwa seine Masse in Form von nuklearem Brennmaterial multipliziert mit der Energieausbeute q in erg/g Brennstoff.

Für die Sonne in der Phase des Wasserstoffbrennens, wo $q = 6.3 \cdot 10^{18}$ erg g⁻¹, sind dies (H-Massenanteil ≈ 0.7) insgesamt $8.75 \cdot 10^{51}$ erg. Bei einer Leuchtkraft von $L_\odot = 4 \cdot 10^{33}$ erg s⁻¹, ergibt sich

$$\tau_n = 7 \cdot 10^{10} \text{ a},$$

also $\tau_n \gg \tau_{\text{KH}} \gg \tau_{\text{hydr}}$.

Für die meisten Sterne ist diese Zeitskala in den meisten Entwicklungsphasen die entscheidende. Man könnte das auch äquivalent durch $\frac{\partial L_n}{\partial m} \approx \epsilon_n$ ausdrücken, was impliziert, dass $\epsilon_g \approx 0$ oder dass der Stern sich im *thermischen Gleichgewicht* befindet. Mit dem mechanischen Gleichgewicht ist das dann das *komplette Gleichgewicht*, wo sämtliche dt -Terme fehlen. Das, wie wir sehen werden, ist natürlich nie völlig erreichbar, wird aber während des Wasserstoffbrennens annähernd realisiert, wenn sich Stern am langsamsten entwickeln.

2.4 Energietransport

Wie schon erwähnt, ist ein wichtiger Aspekt des Sternaufbaus der Transport von Energie, die im Innern erzeugt wird, an die Oberfläche, von wo sie verloren geht. Energie wird immer entlang von Temperaturgradienten transportiert. Die Abschätzung für die Sonne liefert $\Delta T/\Delta r \approx 10^7/10^{11} = 10^{-4}$ (K/cm), also einen sehr kleinen Wert, der ausdrückt, sie sehr sich die Sonne (die Sterne) im thermischen Gleichgewicht befindet (befinden), und dass daher die Energieverteilung der Strahlung im Innern in sehr guter Näherung einem Schwarzkörper entspricht.

In einer sehr allgemeinen Form kann die Energietransportgleichung formal als

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{T}{P} \frac{Gm}{4\pi r^4} \nabla$$

geschrieben werden, was sich aus der Definition der Größe *Nabla* ∇ unter der Annahme der Gültigkeit der hydrostatischen Gleichung ergibt. Diese Definition ist

$$\nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P}.$$

Für die diversen Mechanismen des Energietransports ergeben sich unterschiedliche Ausdrücke für ∇ .

2.4.1 Strahlungstransport

Die mittlere freie Weglänge eines Photons im Sterninnern ist $l_{\text{ph}} = 1/(\kappa\rho)$. κ ist dabei der *Absorptionskoeffizient pro Gramm*, gemittelt über alle Frequenzen, und heißt allgemein *Opazität*. Er hängt von X, ρ, T ab, und variiert stark. Im Sonneninnern beträgt er im Schnitt $\approx 1 \text{ cm}^2/\text{g}$, das entspricht einem $l_{\text{ph}} = 2 \text{ cm}$, kann aber auch 10^{-6} bis 10^6 betragen. Die Anisotropie des Strahlungsfeldes beträgt nur 10^{-10} .

Bei diesen Bedingungen findet Strahlungstransport diffusiv statt, weil die Photonen über den Sternradius sehr oft absorbiert und emittiert werden. In Analogie zur Teilchendiffusion kann man die Strahlungsdiffusion betrachten. Für einen Teilchenstrom \vec{j} gilt

$$\vec{j} = -D\vec{\nabla}n = -\frac{1}{3}vl_p\vec{\nabla}n.$$

Dabei ist D die Diffusionskonstante, v die Diffusionsgeschwindigkeit, l_p die mittlere freie Weglänge und n die Teilchendichte.

Wir setzen jetzt die analogen Größen des Strahlungsfeldes ein; das sind Energiedichte $U := aT^4$ (Strahlungskonstante $a = 7.57 \cdot 10^{-15} \text{ erg}/(\text{cm}^3\text{K}^4)$) und Geschwindigkeit c . Im eindimensionalen Fall erhalten wir daraus

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 4aT^3 \frac{\partial T}{\partial r}$$

und für den Strahlungsfluss F (anstelle \vec{j}) daher

$$F = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa\rho} \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (2.10)$$

Das können wir auch schreiben als $F = -K_{\text{rad}}\nabla T$. $K_{\text{rad}} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa\rho}$ ist dann die *Strahlungskonduktivität*.

Da die Definition der Leuchtkraft $L_r = 4\pi r^2 F$ ist, folgt schließlich

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{3}{64ac\pi^2} \frac{\kappa L_r}{r^4 T^3} \quad (2.11)$$

Das ist die erste Form der **4. Grundgleichung** im Falle des Transports der Energie durch Strahlung.

Rosseland Mittel der Opazität

Die in (2.11) verwendete "mittlere" Opazität muss noch definiert werden. Dies sei hier nur kurz skizziert (s. Kippenhahn, Weigert & Weiss, Kapitel 5.1.3):

Zunächst schreibt man die Diffusionsgleichung und alle darin auftretenden Größen in der frequenzabhängigen Form. Dabei taucht dann κ_ν auf. Die Energiedichte ist die eines *Schwarzkörpers*,

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} B(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right)^{-1}$$

($B(\nu, T)$ ist die *Strahlungsintensität*)

Damit ergibt sich der Fluss F_ν , und durch Integration der Gesamtfluss F . Vergleich mit (2.11) liefert die Definition der *Rosseland-Opazität* als dem geeigneten Mittel

$$\frac{1}{\kappa} := \frac{\pi}{acT^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B}{\partial T} d\nu = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B}{\partial T} d\nu}, \quad (2.12)$$

da der erste Term vor dem Integral nichts anderes ist als das Mittel über den Temperaturgradienten der Intensität. Formal ist κ das *harmonische Mittel* von κ_ν mit der Gewichtsfunktion $\partial B/\partial T$. Man kann es auch als Mittelung der Leitfähigkeit oder Durchsichtigkeit der Materie für Strahlung betrachten. Tatsächlich wird sein Wert von den Frequenzbereichen dominiert, in denen κ_ν sehr klein, die Durchsichtigkeit also sehr groß ist. Leider ergibt sich daraus auch, dass auch bei bekanntem κ_ν von zwei Elementen κ nicht einfach deren Summe ist. Daher ist die Berechnung des Rosseland-Mittels eine im allgemeinen schwierige Aufgabe, die von Experten der Atomphysik durchgeführt wird. Für die Berechnung des Sterninneren genügt es dann aber, nur noch κ , also das Rosselandmittel zu verwenden (s. Abschnitt 3.2).

Energietransport durch Leitung

Im Allgemeinen ist der Transport durch Leitung (also z.B. durch atomare Stöße) völlig vernachlässigbar. Es gibt aber einen Sonderfall, nämlich den hoher Elektronenentartung. In diesem Fall ist die freie Weglänge der Elektronen sehr groß, da bei Stößen kaum Energie übertragen werden kann, weil ja alle zugänglichen Energieniveaus bereits blockiert sind. Der Energiefluss durch Leitung mit einer Leitfähigkeit K_{cond} kann geschrieben werden als

$$F_{\text{cond}} = -K_{\text{cond}} \nabla T$$

K_{cond} muss in diesem Fall im Rahmen der Quatenmechanik berechnet werden. Diese Leitfähigkeit kann aber zu der aufgrund von Strahlungsdiffusion addiert werden, so dass der gesamte Energiefluss

$$F = F_{\text{rad}} + F_{\text{cond}} = -(K_{\text{rad}} + K_{\text{cond}}) \nabla T$$

ist. Analog zum Rosselandmittel (Elektronenleitung ist frequenzunabhängig) lässt sich dann formal ein κ_{cond} definieren:

$$K_{\text{cond}} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\kappa_{\text{cond}} \rho}.$$

Nun kann man κ in (2.11) ersetzen durch die harmonische Summe

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa_{\text{rad}}} + \frac{1}{\kappa_{\text{cond}}}, \quad (2.13)$$

wobei wir zur besseren Unterscheidung den Index “rad” an das Rosseland-Mittel angefügt haben. Die Energietransportgleichung (2.11) lautet dann im Falle von Strahlungstransport *und* Elektronenleitung formal genauso wie oben, allerdings hat κ dann eine erweiterte Bedeutung.

2.4.2 Konvektion

Die letzte Möglichkeit, Energie zu transportieren, ist durch Massenbewegungen. Dabei bewegen sich energiereichere Massenelemente aus dem Inneren nach außen und geben ihre Energie während ihrer Bewegung an die Umgebung ab. Diesen Effekt nennt man *Konvektion*. Da es sich um einen hydrodynamischen Vorgang handelt, müsste man ihn eigentlich mit mehrdimensionalen Hydro-Simulationen behandeln. Das ist aber aus technischen und grundsätzlichen Gründen nicht machbar, z.B. weil die Rechnungen dann dynamische Zeitskalen auflösen, aber nuklearen Entwicklungszeiten folgen müssten. Stattdessen benutzt man einfache Beschreibungen der Konvektion, die (hoffentlich) die beiden wesentlichen Effekte einigermaßen richtig liefern: den sich einstellenden Temperaturgradienten ∇_c und, wenn von Bedeutung, die Zeitskala für den Transport und das Mischen der chemischen Elemente.

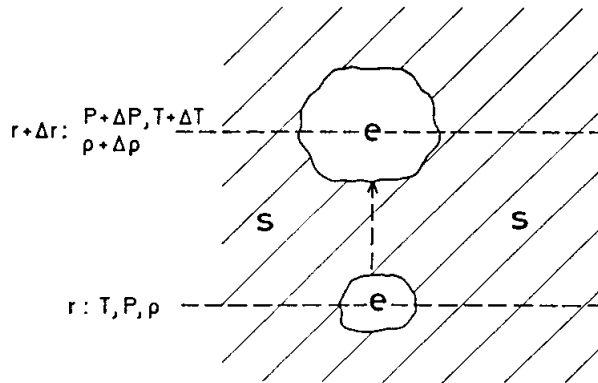


Abbildung 2.1: Illustration der Bewegung eines Blobs durch seine ungestörte Umgebung

Stabilitätsbetrachtung

Die Schichten eines Sterns werden immer wieder thermisch und dynamisch gestört, z.B. durch akustische Schwingungen, lokale Maxima in der Energieerzeugung, Effekte der Rotation, Gezeitenwirkungen von außen. Sind sie stabil, oder werden die Störungen anwachsen? Im letzten Fall können sie Energie transportieren.

Betrachte ein sich bewegendes Massenelement (wird oft als *Blob* bezeichnet), das keine Wärme mit seiner Umgebung austauscht (adiabatische Bewegung). Abb. 2.1 illustriert dieses Bild und führt einige Größen ein:

(i) den Temperaturexzess $DT = T_e - T_s > 0$, wenn das Element e heißer ist als seine Umgebung s ; (ii) den Druckunterschied $DP = 0$, wegen des hydrostatischen Gleichgewichts. Wenn (iii) der Dichteunterschied $D\rho < 0$ ist, ist das Element leichter als die Umgebung und steigt nach oben. Nach einer Distanz Δr gilt

$$D\rho = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_e - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_s \right] \Delta r$$

Die Auftriebskraft $-gD\rho$ ist nach unten gerichtet ist, falls $D\rho > 0$. Somit ist $\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_e - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)_s > 0$ die Bedingung für Stabilität, weil dann das Element relativ zur Umgebung immer schwerer wird (es begann aufzusteigen, weil es ursprünglich leichter war) und es somit wieder nach unten zurückkehren wird.

Mit der Zustandsgleichung kann man dies umschreiben. Allgemein gilt $d \ln \rho = \alpha d \ln P - \delta d \ln T + \varphi d \ln \mu$, wobei für ein ideales Gas gilt $\alpha = \delta = \varphi = 1$; $(d\mu)_e = 0$, und es folgt

$$\left(\frac{\delta}{T} \frac{dT}{dr} \right)_s - \left(\frac{\delta}{T} \frac{dT}{dr} \right)_e - \left(\frac{\varphi}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right)_s > 0$$

Wir definieren jetzt die oft benutzte *Druckskalenhöhe*

$$H_P := -\frac{dr}{d \ln P} = -P \frac{dr}{dP} = \frac{P}{\rho g} > 0 \quad (2.14)$$

die z.B. in der Sonne an der Oberfläche $1.4 \cdot 10^7$ cm beträgt, bei $R_\odot/2$ bereits $5.2 \cdot 10^9$, im Zentrum aber divergiert. Wir multiplizieren die **Stabilitätsbedingung** mit H_P und erhalten

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_s < \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_e + \frac{\varphi}{\delta} \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln P} \right)_s \quad (2.15)$$

$$\nabla_s < \nabla_{\text{ad}} + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_\mu \quad (2.16)$$

$$\nabla_{\text{rad}} < \nabla_{\text{ad}} + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_\mu \quad (2.17)$$

Die letzte Gleichung, (2.17) gilt im allgemeineren Fall und ist die physikalisch korrektere Form, da sie auch Änderungen der chemischen Zusammensetzung in der Umgebung berücksichtigt. Sie heißt *Ledoux-Kriterium*. Ohne den letzten Term (homogene Schichtung) vereinfacht sie sich zum üblicheren *Schwarzschild-Kriterium* für konvektive Stabilität. Es ist zu beachten, dass ursprünglich inhomogene Schichtungen durch Konvektion selbst homogenisiert werden. Da für gewöhnlich μ nach innen anwächst (schwerere Elemente im Zentrum), und $\varphi/\delta > 0$, wirkt ∇_μ im Allgemeinen stabilisierend. Ist die Schichtung stabil, erfolgt der Energietransport durch Strahlung entlang des radiativen Gradienten ∇_{rad} , ansonsten durch Konvektion, mit einem noch unbekanntem Temperaturgradienten.

In einer **instabilen** Schichtung stehen vier Gradienten (Abb. 2.2) in folgender Relation zueinander:

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla > \nabla_e > \nabla_{\text{ad}}$$

∇ ist der tatsächliche Gradient, der sich durch die Konvektion einstellt (auch ∇_c genannt). Die erste Ungleichheit folgt aus der Tatsache, dass nur ein Teil der Energie durch Strahlung transportiert werden kann, weil Konvektion immer auch etwas Energie mit sich führt. Die letzte Beziehung ergibt sich, weil das Element immer etwas mehr als adiabatisch kühlen wird (entlang seines Weges), weil z.B. etwas Energie über die Oberfläche (z.B. durch Strahlung) verloren gehen wird (der Gradient ist daher etwas *überadiabatisch*). Und die mittlere Beziehung drückt nur die Instabilität selbst aus. Aufgabe jeder Konvektionstheorie ist es, ∇ zu berechnen.

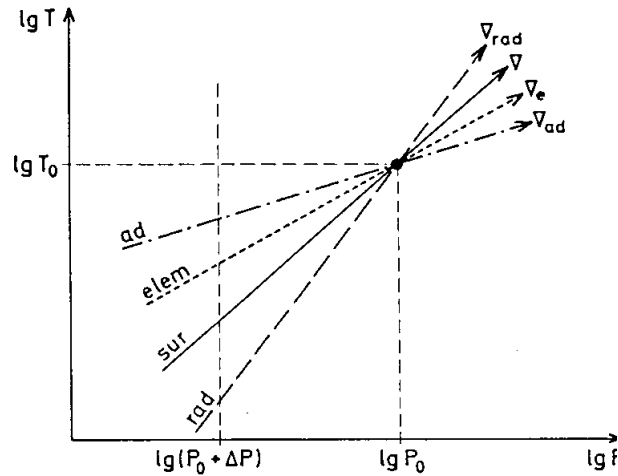


Abbildung 2.2: “Die Vier Gradienten” in einer konvektiv instabilen Schicht. Beachte, dass das Zentrum des Sterns hier rechts oben liegt.

Wichtig ist noch folgender, allgemein gültiger Zusammenhang: im tiefen Sterninnern, bei hohen Dichten, ist Konvektion sehr effektiv. Die Elemente bewegen sich fast adiabatisch und daher stellt sich $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$ ein. Die Abweichung ist nur von der Größenordnung 10^{-4} oder kleiner. Hier sind die Details der Konvektionstheorie irrelevant, der Gradient wird nur durch die Thermodynamik bestimmt. Umgekehrt ist in Sternhüllen die Dichte sehr niedrig, die Konvektion sehr ineffizient, und relativ viel Energie geht während der konvektiven Bewegungen verloren. Daher stellt sich ein merklicher *überadiabatischer* konvektiver Gradient $\nabla_{\text{rad}} > \nabla > \nabla_{\text{ad}}$ ein, der im Extremfall sogar wieder $\nabla \lesssim \nabla_{\text{rad}}$ erreichen kann. Hier hängt der tatsächliche Gradient stark von den Details der Konvektionstheorie ab.

Mischungswegtheorie

Die bekannteste “Theorie” (besser “Beschreibung”) der Effekte konvektiver Bewegungen ist die *Mischungswegtheorie* von Prandtl (1925), für die Astrophysik ausformuliert von Biermann und Böhm-Vitense. Dabei bleibt man im Bild der konvektiven Elemente (“Blobs”), die mit einem gewissen Temperaturexzess aufsteigen, sich dabei ausdehnen und abkühlen, und letztendlich, nach einer typischen Weglänge l_m , der *Mischungsweglänge*, sich mit der Umgebung vermischen und ihre Energie dort abgeben. Die Mischungswegtheorie (MLT) wird im Anhang B in der Formulierung von Kippenhahn und Weigert (1990) behandelt. Kurz zusammengefasst, lässt sich eine kubische Gleichung für die Unbekannte ξ herleiten

$$(\xi - U)^3 + \frac{8U}{9} (\xi^2 - U^2 - W) = 0 \quad (2.18)$$

wobei die einzelnen Terme im Anhang B erklärt werden. Entscheidend ist, dass die Größen ξ , U , und W nur von lokalen Größen und den Gradienten ∇_{rad} und ∇_{ad} abhängen.

Der (offene) freie Parameter l_m sollte aus grundsätzlichen Überlegungen von der Größe der Druckskalenhöhe H_P sein, also

$$l_m = \alpha_{\text{MLT}} H_P.$$

Der *Mischungswegparameter* α_{MLT} muss aber aus Vergleich mit Beobachtungsdaten angepasst werden. Die oft verwendete Ausdrucksweise “kalibriert” übertreibt die Realitätsnähe der MLT. Im Allgemeinen beeinflusst α_{MLT} vor allem Radius und Effektivtemperatur von Sternen.

Im Anhang wird auch gezeigt, dass daneben noch einige versteckte Parameter in der MLT stecken, daher sind Zahlenwerte von α_{MLT} nicht unbedingt direkt vergleichbar.

Da die konvektive Geschwindigkeit (s. Gleichung (B.7)) sehr hoch ist, ist die Mischungszeitskala sehr kurz. In gewöhnlichen Sternaufbaurechnungen wird das konvektive Mischen daher als instantan angenommen, und der konvektive Gradient ∇_c stellt sich instantan ein.

Realistischere Behandlungen der Konvektion

Die offensichtlichen Nachteile der bisherigen Betrachtungen und damit der MLT sind:

- instantanes Mischen und Einstellen von ∇_c
- lokales Stabilitätskriterium
- lokale Behandlung der Konvektion
- ein von allen physikalischen Verhältnissen unabhängiger Parameter

Dadurch werden nicht nur Unterschiede im konvektiven Verhalten von Sternen unterschiedlicher Masse, Zusammensetzung und Entwicklungszuständen ignoriert, sondern auch dynamische Effekte vernachlässigt. So ist es klar, dass am Rand einer konvektiven Zone zwar das Schwarzschild- (Ledoux-) Kriterium die lokale Stabilität beschreibt, aber die konvektiven Elemente dort natürlich nicht mit $v = 0$ ihre Bewegung einstellen. Stattdessen werden sie aufgrund ihrer Trägheit über die Stabilitätsgrenze hinausschießen und daher auch konvektiv stabile Gebiete beeinflussen (mischen). Dieser Effekt des “Überschießens” (*Overshooting*) wird in der Praxis wiederum durch eine weitere, zusätzliche Parametrisierung simuliert (ein weiterer “freier” Parameter), die auch wieder durch Vergleich mit Beobachtungen “kalibriert” werden muss.

Weitere Reparaturen an der MLT sind z.B. die Berücksichtigung, dass nicht alle Elemente gleich sind, sondern ein Spektrum an Größen und Energien haben, oder die endliche Mischungsgeschwindigkeit, die wichtig ist in Phasen schneller Entwicklung oder beim Zusammenspiel von Konvektion und Energieerzeugung.

Es gibt auch physikalischere Theorien, die aber derzeit noch nicht in einem Zustand sind, dass sie in Sternentwicklungsprogrammen integriert werden können. Alternativ gibt es voll hydrodynamische mehrdimensionale Rechnungen, die jedoch wegen der kurzen dynamischen Zeitskalen nur Schnappschüsse sein können, die zur besseren Anpassung der einfacheren Theorien führen können.

Insgesamt ist der Energietransport durch Konvektion immer noch die größte Schwachstelle der Sternentwicklungstheorie. Als Folge davon sind Vorhersagen von Effektivtemperaturen und Radien oder der Vergleich der Modelle mit solchen Beobachtungsgrößen (wie auch Farben) schwierig und immer mit Skepsis zu betrachten!

2.5 Die chemische Zusammensetzung

Bisher trat die chemische Zusammensetzung \vec{X} nur als Parameter in den Gleichungen oder den abhängigen Variablen auf. Wir haben aber schon erwähnt, dass sie sich

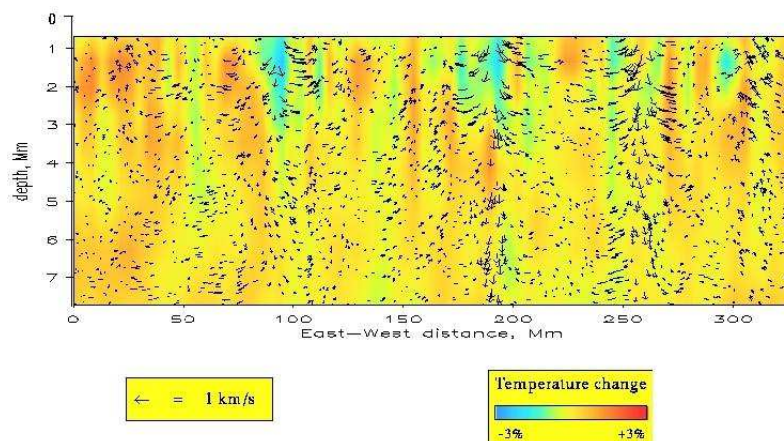


Abbildung 2.3: Konvektionsströme in der Sonne, abgeleitet aus seismologischen Beobachtungen durch den Satelliten SOHO.

aufgrund der nuklearen Prozesse, die ja die Energie hauptsächlich liefern, ändern muss.

Zur Notation: relative Massenanteile: $X_i := \frac{m_i n_i}{\rho}$, unter der Nebenbedingung $\sum_i X_i = 1$; Spezialfälle sind Wasserstoff X , Helium Y , "Metalle" $Z = 1 - X - Y$. m_i and n_i sind Teilchenmasse und -dichte.

Beispiele für typische Häufigkeitsverhältnisse (approximative Zahlen):

- Resultat der Nukleosynthese im Urknall: $X \approx 0.75$ $Y \approx 0.25$ $Z \approx 0.0$;
- Population II Sterne: $X = 0.75$ $Y = 0.25$ $Z \approx 10^{-4}$
- Sonne und Population I Sterne: $X = 0.70$ $Y = 0.28$ $Z = 0.02$

Änderungen aufgrund von Kernreaktionen:

Die allgemeine Beschreibung der Änderung des Massenanteils eines Elementes i aufgrund von nuklearen Reaktionen lautet (für Zweiteilchen-Reaktion):

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left[\sum_{j,k} r_{jk} - \sum_l r_{il} \right] \quad (2.19)$$

Der erste Term beschreibt die Erzeugung des Elementes i durch eine Reaktion der Elemente j und k , der zweite Term die Zerstörung von i durch Reaktion mit l . Die dabei frei gesetzte Energie ist dann z.B. $\epsilon_{jk} = \frac{1}{\rho} r_{jk} e_{jk}$. r_{jk} ist die Zahl der Reaktionen pro Sekunde, e_{jk} die Energie pro Reaktion; pro Teilchenmasse ist sie $q_{jk} = e_{jk}/m_i$

Für die Nettoumwandlung von $H \rightarrow He$ erhält man z.B.

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\epsilon_H}{q_H} = -\frac{\partial Y}{\partial t}$$

(Diese Gleichungen beschreiben die zeitliche Änderung einer Größe. Bisher waren die Sternaufbaugleichungen vor allem orts-abhängig.) Insgesamt werden solche Ratengleichungen für alle relevanten Elemente und deren Reaktionen in großen *nuklearen Netzwerken* gelöst, meist unter Beibehaltung von $T(t)$ und $\rho(t)$ an der

jeweiligen Stelle im Stern. Die letzte Gleichung z.B. entspricht dagegen nur einer groben Behandlung der Wasserstofffusion unter Missachtung der verschiedenen Reaktionswege (pp -Ketten oder CNO-Zyklen, s. Abschnitt 5.2.3) und muss daher einen mittleren q_H -Wert beinhalten.

Änderungen aufgrund von Mischungsprozessen

Neben den Kernreaktionen sind Mischungs- und auch Entmischungsprozesse von besonderer Bedeutung für die chemische Zusammensetzung als Funktion des Radius. Besonders schnelle Prozesse, wie das Mischen durch Konvektion können als *instantan* behandelt werden, solange kein anderer Prozess mit ähnlich kurzer Zeitskala stattfindet (z.B. nukleares Brennen bei hoher Temperatur). Dann wird über den Mischungsbereich einfach der Gesamtanteil eines Elements aufsummiert und gleichmäßig verteilt. In allen anderen Fällen muss eine Art Transportgleichung gelöst werden.

Ein besonders wichtiger Fall von langsamen Teilchentransport ist *Diffusion*, darunter die *Sedimentation* der bedeutendste Prozess (Absinken von schwereren Elementen im Gravitationsfeld). Wir wissen, dass dies in der Sonne geschieht.

Die Beschreibung erfolgt durch eine *Diffusionsgleichung* der Art

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla} c) \quad (2.20)$$

für die Teilchenkonzentration c , wobei die eigentliche Aufgabe darin besteht, die Diffusionskonstante (Diffusionsgeschwindigkeit) zu bestimmen. In allgemeiner Form lautet die Gleichung für Teilchendiffusion in der Sonne

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 X_i T^{5/2} \left(A_P(i) \frac{\partial \ln P}{\partial r} + A_T(i) \frac{\partial \ln T}{\partial r} + \sum_{k \neq e, \text{He}^4} A_k(i) \frac{\partial \ln C_k}{\partial r} \right) \right] \quad (2.21)$$

wobei die verschiedenen A -Terme Diffusionskoeffizienten für Druck- (Sedimentation), Temperatur-, und Konzentrationsdiffusion sind (s. Cox & Giuli, 2. Auflage, Kapitel 18.3).

Auch andere Mischungseffekte (z.B. konvektives Mischen) kann oft und bequemerweise in der Form einer Diffusionsgleichung mit entsprechender Diffusionsgeschwindigkeit (z.B. abgeschätzt aus der Mischungswegtheorie) behandelt werden. In modernen Programmen wird "Brennen-und-Mischen" simultan in einem Gleichungssystem gelöst.

2.6 Massenverlust

Ein sehr wichtiger Effekt in der Entwicklung von Sternen ist *Massenverlust*, wobei hier nicht der Massenübertrag in wechselwirkenden Doppelsternsystemen gemeint ist, sondern der Massenverlust durch Sternwinde. Dieser kann vernachlässigbar gering sein, wie im Fall der Sonne, die derzeit $10^{-14} M_\odot/\text{a}$ verliert (weniger als der Massenverlust durch Kernreaktionen!), aber auch so groß, dass der Stern sich nicht mehr adjustieren kann. So verlieren Sterne mittlerer Masse auf dem Asymptotischen Riesenast bis zu $10^{-4} M_\odot/\text{a}$ (*Superwind*), und insgesamt bis zu 90% ihrer Anfangsmasse (z.B. von $6M_\odot$ auf $0.6M_\odot$). Würde man Massenverlust konsistent einbeziehen, änderte sich das mathematische Problem völlig, weil der äußere Rand

nicht mehr bei $m = M$ fixiert, sondern offen wäre. Auch müssten hydrodynamische Effekte berücksichtigt werden.

Glücklicherweise ist Massenverlust aber im Allgemeinen ein kleiner Effekt, so dass die Änderungen der Gesamtmasse so langsam ist im Vergleich zur thermischen Zeitskala, dass der Stern sich immer schnell thermisch adjustieren kann. Somit kann die Entwicklung eines Sterns mit Massenverlust als Folge einer Entwicklung von Sternen abnehmender Masse simuliert werden. Da es auch an völlig selbstkonsistenten und physikalisch kompletten Windtheorien fehlt, werden fast ausschließlich *empirisch hergeleitete Massenverlustformeln* verwendet, und wird die Gesamtmasse im Rahmen der chemischen Entwicklung einfach reduziert, und der Stern nach diesem Schritt mit der neuen Masse berechnet. Um ein Beispiel zu geben: Falls der Massenverlust $10^{-8} M_{\odot}/\text{a}$ sein sollte (bereits relativ hoch), und Δt in den Entwicklungsrechnungen 10^4 Jahre (typisch für Rote Riesen niedriger Masse), so ist $\Delta M = 10^{-4} M_{\odot}$, also sehr gering.

Die bekannteste Massenverlustformel stammt von D. Reimers, und wurde in den 70er Jahren aus Beobachtungen von Roten Riesen in der Sonnenumgebung gewonnen. Sie lautet

$$\frac{dM}{dt} = -4 \cdot 10^{-13} \eta \frac{L}{gR} (M_{\odot} \text{ a}^{-1}) \quad (2.22)$$

L , g (Oberflächen-Schwerebeschleunigung) und R sind dabei in solaren Einheiten zu nehmen; η ist ein Parameter der Größe $\approx 0.1 \dots 0.6$, der eingeführt wurde, um z.B. die Abhängigkeit des Massenverlustes von der chemischen Zusammensetzung, aber auch vom Entwicklungszustand zu simulieren. Es gibt weitere, meist komplexere Massenverlustformeln, die der Reimers-Formel aber im Prinzip immer ähneln.

2.7 Das Gesamtproblem

- m ist die Lagrange-Variable;
- r, P, T, L_r sind die unabhängigen Variablen;
- X_i sind die chemischen Häufigkeiten, die nur durch ihre zeitlichen Veränderung wichtig werden
- $\rho, \kappa, \epsilon, \dots$ sind (einige) abhängige Variablen;

Die vier zu lösenden Strukturgleichungen (für gegebenes $\vec{X}(t)$) sind:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial m} = \epsilon_n - \epsilon_{\nu} - c_P \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla \quad (2.26)$$

In der letzten Gleichung muss das relevante ∇ eingesetzt werden; im Fall von Strahlungstransport ist es

$$\nabla_{\text{rad}} = \frac{3}{16\pi acG} \frac{\kappa L_r P}{mT^4}$$

Schließlich haben wir für die Zusammensetzung (nur Reaktionsgleichungen berücksichtigt)

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho} \left(\sum_{j,k} r_{jk} - \sum_l r_{il} \right)$$

Rand- und Anfangsbedingungen

- bei $m = 0$: $r = 0$ und $L_r = 0$
- bei $m = M$: $T(M) = T_{\text{eff}}$, wobei dieses dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz*

$$L = 4\pi\sigma R^2 T_{\text{eff}}$$

genügen muss

- und ebenfalls bei $m = M$: $P(R) = P_{\text{photo}}$, d.h. der Druck entspricht dem einer Atmosphäre bei der optischen Tiefe $\tau = 2/3$; im Allgemeinen wird eine *graue Eddington-Atmosphäre* verwendet, es kann aber auch eine realistischere sein.
- bei $t = 0$ die Struktur eines Anfangsmodell mit *homogener chemischer Zusammensetzung* und
 - $\epsilon = \epsilon_n$; $\epsilon_g = 0$ (ZAMS, Zero-age main-sequence, Null-Alter Hauptreihenmodell), oder
 - $\epsilon = \epsilon_g$; $\epsilon_n = 0$ (PMS, pre-main sequence, Vorhauptreihenmodell)