目 次

インフレーション理論のアウトライン

1 はじめに

このノートは2000年12月29日に東北大学宇宙論グループで行った講義のための原稿で、インフレーション理論の最もベーシックな枠組みと観測との関わり、特に宇宙背景放射との関わりを、私の理解している範囲内で端的に説明しようと試みたものです。内容は初期宇宙理論を専門としない観測的宇宙論の分野の方々を想定しています。大幅に簡素化してあるのでところどころ曖昧な点があるかと思いますし、気軽なノートという事でリファレンスも載せませんでした。詳細に興味のある方は、修士論文(東北大学, 1999年3月)、もしくは宇宙背景放射の集中講義ノート(東北大学, 2000年3月7–8日)を参照していただけると良いかと思います*。集中講義ノートは修士論文の宇宙背景放射に関する部分を、このノートはインフレーションに関する部分を、それぞれとっつき易く説明したものにしました。

2 ビッグバンモデルの限界とは?

ビッグバン宇宙モデルは、(a)宇宙膨張、(b)宇宙の軽元素の存在量、(c)宇宙背景放射の存在、といった観測事実をシンプルなモデルで一度に説明できる点で非常に優れた宇宙モデルである。特に宇宙背景放射の存在はビッグバンモデルによって「予言」されたもので、観測的には予言から15年近く経って確認された。

端的に言うと、ビッグバンモデルは一様等方に分布する放射、あるいは物質を含む系でのEinstein方程式の解である。Einstein方程式は微分方程式であるから、解くためには初期条件、あるいは境界条件が必要となる。一方、我々は観測から現在の宇宙の状態を比較的良く知っているので、モデルを現在の量(例えば放射・物質の密度など)で規格化して、

* http://astro.princeton.edu/~komatsu/cmb/cmb.htmlから入手可です。

あとは方程式系を逆に解く事によって初期の状態を推定する事になる。

では、現在の宇宙を再現するために必要な初期条件は何か? 一口で言えば、「非常に fine-tuning された初期条件」が必要となる。宇宙は産まれた瞬間からいたるところ一様等方で、空間的に平坦でなければならない。それから少しでもズレれば現在の宇宙を再現できない。再現できないどころか、現在の宇宙と似ても似つかなくなってしまう。これが宇宙の fine-tuning 問題である。

つまり、ビッグバンモデルはある特殊な初期条件 (それは現在の観測事実から要求される) を与えてやる事でその後の宇宙の進化を定量的に極めて良く記述するが、初期条件そのものを予言する力はない—微分方程式をある初期条件のもとで解いているだけだから。これがビッグバンモデルの限界である。

これから述べるインフレーション理論は、いわばビッグバン宇宙以前の宇宙を記述する理論である。インフレーション以前の宇宙がどのような状態でも、ひとたびインフレーションが起これば、ビッグバンモデルの要求する初期条件を生成する事ができる。さらに宇宙背景放射を用いれば観測的にテスト可能なので、今後も進歩が期待できる初期宇宙理論である。

3　宇宙の平坦性問題と加速膨張

この節では、宇宙の fine-tuning 問題の一つである「平坦性問題」をとりあげ、インフレーション理論がそれをどのように解決するかを説明してインフレーション理論のメリットを理解する。キーワードは「加速膨張」である。

宇宙膨張のスケールファクターを $a(t) \propto t^n$ とすると、$\ddot{a} \propto n(n-1)t^{n-2}$ よりただちに

- $n < 1$: 減速膨張
- $n = 1$: 等速膨張
- $n > 1$: 加速膨張

を得る。例えば放射優勢宇宙では $n = 1/2$、物質優勢宇宙では $n = 2/3$ であるから、ビッグバン宇宙モデルによれば宇宙の歴史は常に減速膨張である。Friedmann 方程式より、宇宙の全エネルギー密度パラメター $\Omega_{\rm tot}(t)$ の時間発展は

$$\Omega_{\rm tot}(t) - 1 = \frac{\kappa}{a^2(t)H^2(t)} \propto \kappa t^{2(1-n)} \tag{1}$$

で記述される。κ は宇宙の 3 次元曲率をあらわすパラメターである。従って減速膨張宇宙 $(n < 1)$ では、宇宙の進化に従って $\Omega_{\rm tot}(t)$ はどんどん 1 から離れてゆく事になる。

一方、観測的には最新の宇宙背景放射の温度ゆらぎの角度スペクトルの観測より、現在 t_0 における全密度パラメターは $\Omega_{\rm tot}(t_0) = 1.08 \pm 0.06$ と得られている。式 (1) に従って時間を遡れば、例えば宇宙の晴れ上がり t_* においては

$$\frac{\Omega_{\rm tot}(t_*) - 1}{\Omega_{\rm tot}(t_0) - 1} = \left(\frac{t_*}{t_0}\right)^{2/3} = \left(\frac{a_*}{a_0}\right) \sim 10^{-3}, \tag{2}$$

すなわち $\Omega_{\rm tot}(t_*) \sim 1 + (0.08 \pm 0.06) \times 10^{-3} = 1 + \mathcal{O}(10^{-4})$ となる。さらに、放射と物質の等しい時期 $t_{\rm eq}$ であれば、$a_{\rm eq}/a_0 \sim 10^{-4}$ より $\Omega_{\rm tot}(t_{\rm eq}) \sim 1 + \mathcal{O}(10^{-5})$ である。同様に時間を遡れば遡る程 $\Omega_{\rm tot}(t)$ はどんどん 1 に近づき、初期条件 $\Omega_{\rm tot}(0)$ はほぼ厳密に 1 でなければならない事になる。もし 1 よりほんの少しでも大きいと宇宙は現在の宇宙年齢までもたずに重力崩壊してしまうし、1 よりほんの少しでも小さいと膨張が早すぎて現在の宇宙は空っぽ—銀河も星も何もない空間—になってしまう。これが宇宙の平坦性問題であり、もっと幅広い意味では宇宙の fine-tuning 問題のひとつである。

それでは、もし加速膨張 $(n > 1)$ であればどうなるか。この場合、式 (1) から明らかなように状況は逆転し、宇宙の進化につれて $\Omega_{\rm tot}(t) \to 1$ である。もちろん我々は、軽元素合成の観点から少なくとも $t > 1$ 秒においてビッグバンモデル (つまり減速膨張) が宇宙を正しく記述していると考えているわけだから、このような加速膨張が割り込む余地は $t < 1$ 秒である。そこで、例えばプランク時間 ($t_{\rm P} \sim 10^{-43}$ 秒) から元素合成の時期 ($t_{\rm BBN} \sim 1$ 秒) まで加速膨張が起こったとすれば

$$\frac{\Omega_{\rm tot}(t_{\rm BBN}) - 1}{\Omega_{\rm tot}(t_{\rm P}) - 1} = \left(\frac{t_{\rm BBN}}{t_{\rm P}}\right)^{-2(n-1)} \sim 10^{-86(n-1)}, \tag{3}$$

すなわち、$\Omega_{\rm tot}(t_{\rm P})$ がどんな値であっても、n が極端に 1 に近くない限り $\Omega_{\rm tot}(t_{\rm BBN})$ はほぼ厳密に 1 である。従って、宇宙初期に加速膨張が起こったとすれば平坦性問題は自然に解決する事が分かる。この加速膨張がインフレーション理論の根幹である。

ところが加速膨張を実現するのはそう単純ではない。Friedmann 方程式より、膨張加速度 $\ddot{a}$ の従う式は、宇宙のエネルギー密度 $\rho(>0)$ と圧力 p を用いて

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \tag{4}$$

と書ける。放射優勢時には $\rho = 3p$ で物質優勢時には $p = 0$ であるからこの時は減速膨張である。加速膨張 $(\ddot{a} > 0)$ を得るための条件は $\rho + 3p < 0$、すなわち $p < -\rho/3$ である。負の

圧力! これが加速膨張を得るための、つまりインフレーションを実現させるための条件である。

4　スカラー場と負の圧力

宇宙初期には状態方程式が $p < -\rho/3$ だったのか? 宇宙が放射によって支配されている限りはどこまで時間を遡っても $\rho = 3p$ であるため、この条件が満たされる事はない。しかし、これに量子場の理論を持ち込むと状況が変化する。電弱統一の理論に必要となるスカラー場がヒントである。スカラー場というのは名前の通りスピン 0 の場で、例えばスピン 1 の光子はベクター場である。電弱理論では Higgs 場というスカラー場が本質的な役割を果たす。まだ Higgs 粒子の検出はなされてないものの、それ以外の実験事実と照らした電弱理論の成功を考えると、Higgs 粒子は実際に存在すると考えられている。実は Higgs 場によるインフレーションには問題があるのだが、とにかく Higgs 場に限らずこうしたスカラー場の存在を前提にする事がインフレーションを起こすカギとなる。ここで、スカラー場は量子場であるが、その期待値 $\overline{\phi} \equiv \langle\psi\,|\phi|\,\psi\rangle$ の運動は古典場の運動のように扱う事ができる。以下ではスカラー場の古典的性質を調べるが、表記を単純にするために ϕ を $\overline{\phi}$ の意味で用いる。

スカラー場を記述するストレス–エネルギーテンサーは、メトリックを

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{5}$$

ととれば

$$T^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}\phi_{,\alpha}\phi_{,\nu} - \delta^\mu_\nu\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + V(\phi)\right). \tag{6}$$

よってスカラー場のエネルギー密度は

$$\rho_\phi \equiv -T^0_0 = -\left[-\dot{\phi}^2 - \left(-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right)\right] = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi), \tag{7}$$

圧力は

$$p_\phi \equiv \frac{1}{3}T^k_k = \frac{1}{3}\left[(\nabla\phi)^2 - 3\left(-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right)\right] = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{6}(\nabla\phi)^2 - V(\phi). \tag{8}$$

ドットは t による偏微分、$(\nabla\phi)^2 \equiv g^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} = \frac{1}{a^2}\delta^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}$ である。このスカラー場が宇宙初期においてエネルギー密度を支配する時期があったと仮定してみよう。加速膨張 $(\ddot{a} > 0)$ を実現するためには、

$$\rho_\phi + 3p_\phi = 2\left(\dot{\phi}^2 - V(\phi)\right) < 0. \tag{9}$$

従って $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ が加速膨張のための条件であり、このとき圧力は負である。

それでは、実際にスカラー場が宇宙のエネルギー密度を支配する時期が存在するのだろうか？ 例えば Higgs 場のケースだと、GUTs スケール ($\sim 10^{16}$ GeV; $t_{\mathrm{GUTs}} \sim 10^{-38}$ 秒) において、スカラー場のエネルギー密度は放射のエネルギー密度を上回る事ができる。もう少し詳しく言えば、GUTs スケールではスカラー場がエネルギーの高い偽真空状態にとどまるため、放射のエネルギーを上回るのである。しかし Higgs 場によってインフレーションを起こした場合には、インフレーションがうまく終らず現在の宇宙を再現できないという問題がある。

その後様々な代替モデルが提案されたが、どれも決め手に欠けるというのが現状であり、とにかくスカラー場の素性は別として宇宙初期にエネルギー密度を支配しているスカラー場の存在を仮定し、上記の制限を満たすような $V(\phi)$ を与えてインフレーションを起こす、というアプローチが主になっている。このようなスカラー場を、まとめてインフラトンと呼んでいる。Higgs 機構のような足場となる物理をなくしてまでインフレーションにこだわるのは、インフレーション理論の比較的シンプルな枠組みが宇宙の fine-tuning 問題を全て解決するだけでなく、構造形成の種となるゆらぎをつくるメカニズムを与え、その一般的な予言が宇宙背景放射における温度異方性の観測と非常に良く合っているためである。

インフラトンの正体が明らかになるのはまだまだ先のようであるが、そういった意味でインフレーション理論は初期宇宙の標準理論としての地位を確立したのである。

5　スカラー場の運動方程式

スカラー場の運動方程式を導いておく。$g^{\nu\gamma}T^{\mu}_{\nu;\gamma} = 0$ より、

$$\begin{aligned} g^{\nu\gamma}T^{\mu}_{\nu;\gamma} &= g^{\nu\gamma}g^{\mu\alpha}\left(\phi_{,\alpha}\phi_{,\nu}\right)_{;\gamma} - g^{\mu\gamma}\left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}\right)_{;\gamma} + V_{,\phi}\phi_{,\gamma}\right) \\ &= g^{\nu\gamma}g^{\mu\alpha}\phi_{,\alpha;\gamma}\phi_{,\nu} + g^{\mu\alpha}\phi_{,\alpha}\Box\phi - g^{\mu\gamma}g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha;\gamma}\phi_{,\beta} - g^{\mu\gamma}\phi_{,\gamma}V_{,\phi} \\ &= g^{\mu\alpha}\phi_{,\alpha}\left(\Box\phi - V_{,\phi}\right) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

すなわち $\Box\phi - V_{,\phi} = 0$ である。ここで

$$\Box\phi \equiv g^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha;\beta} = g^{\alpha\beta}\left(\phi_{,\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\phi_{,\gamma}\right) = -\ddot{\phi} + \nabla^2\phi - 3H\dot{\phi}, \tag{11}$$

セミコロンは共変微分である。以上よりスカラー場の運動方程式は

$$\ddot{\phi} - \nabla^2\phi + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0. \tag{12}$$

さて、加速膨張の条件が $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$ であった事を思い出そう。これはスカラー場がポテンシャル上をゆっくり転がっている、と読みかえる事ができる。そこで、非常にゆっくり $(\dot{\phi}^2 \ll V(\phi))$ 転がっているスカラー場を考えてみる。簡単化のためスカラー場は一様であるとすれば、式 (12) は $\ddot{\phi} \ll V_{,\phi}$ において

$$\dot{\phi} \approx -\frac{V_{,\phi}}{3H} \approx -\frac{V_{,\phi}}{\sqrt{24\pi G V(\phi)}} \tag{13}$$

と近似できる。ここで

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi \approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \tag{14}$$

を用いた。また、$\dot{H}$ と $\dot{\phi}$ との間には厳密な関係式があり、

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2. \tag{15}$$

6　ゆらぎの生成

インフレーション理論を支えている強力な柱のひとつがゆらぎの生成メカニズムである。インフレーションはただゆらぎを生成するだけではなく、その定量的な性質までも予言し、しかもそれは観測と非常に良く合っている。一般的な導出過程は複雑であるが、ここでは大幅に簡略化しつつ、スローロール近似の最低次で数学的にきちんとした導出方法を紹介する[†]。

ゆらぎの種となるのは、スカラー場の量子ゆらぎである。前節では期待値を扱ったが、ここではスカラー場の量子的な面を見る。まずスカラー場の量子ゆらぎ $\delta\phi$ を、期待値 $\overline{\phi}$ のまわりの摂動として定義する。

$$\delta\phi \equiv \phi - \overline{\phi}. \tag{16}$$

従って $\overline{\delta\phi} = 0$ である。この節の主な結果は、式 (34) に示される $\delta\phi$ のスケール不変性の導出と、式 (35) による rms 値 $|\delta\phi|_{\rm rms} = H/2\pi$ の導出である。

[†] スローロール近似に関してより詳しい解析に興味のある方は、修士論文の第 6 章 2.3 を御覧下さい。

6.1 ゆらぎの運動方程式

式 (16) をスカラー場の運動方程式 (12) に代入し、0 次の式を引いて $\delta\phi$ に関して 1 次の項まで取り出せば

$$\ddot{\delta\phi} + 3H\dot{\delta\phi} + \left(-\nabla^2 + 3H_{,\phi}\dot{\overline{\phi}} + V_{,\phi\phi}\right)\delta\phi = 0. \tag{17}$$

ここでメトリックの摂動による寄与を考えなかったが、スローロール近似の最低次ではコンシステントである。次に、方程式を簡単化するためスローロール近似を用いる。式 (13) より

$$V_{,\phi\phi} \approx (-3H\dot{\overline{\phi}})_{,\phi} = -3H_{,\phi}\dot{\overline{\phi}} - 3H\frac{\ddot{\overline{\phi}}}{\dot{\overline{\phi}}}, \tag{18}$$

従って

$$\ddot{\delta\phi} + 3H\dot{\delta\phi} - \left(\nabla^2 + 3H\frac{\ddot{\overline{\phi}}}{\dot{\overline{\phi}}}\right)\delta\phi = 0. \tag{19}$$

6.2 インフレーション宇宙における Klein–Gordon 方程式

式 (19) は、このままでは解ける気がしない。そこで座標変換を行い、方程式を見やすくしてゆく。まず時間座標を

$$\mathrm{dt} \longrightarrow a(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{20}$$

のように変換する。τ は共形時間と呼ばれている。これを用いるとメトリック (5) は

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = a^2(\tau)\left(-\mathrm{d}\tau^2 + \delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j\right) = a^2(\tau)\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu \tag{21}$$

と、Minkowski メトリック $\eta_{\mu\nu}$ にファクター $a^2(\tau)$ をかけただけになる。このようなメトリックを共形メトリックと呼ぶ。場の量子論はそもそも Minkowski 空間において定式化されているものである。それを曲がった時空に適用するのは決して自明な事ではないが、このように共形メトリックを用いる事により、Minkowski 空間とのアナロジーを用いる事ができるようになる。

ダッシュを共形時間による微分として、$\dot{f} = f'/a$ および

$$\ddot{f} = \frac{1}{a^2}\left(f'' - \frac{a'}{a}f'\right) \tag{22}$$

を用いれば、式 (19) は

$$\delta\phi'' + 2\frac{a'}{a}\delta\phi' - a^2\left(\nabla^2 + 3H\frac{\ddot{\overline{\phi}}}{\dot{\overline{\phi}}}\right)\delta\phi = 0, \tag{23}$$

さらに式変形をすれば

$$(a\delta\phi)'' - a^2\left[\nabla^2 + H^2\left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2} + 3\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}\right)\right](a\delta\phi) = 0. \tag{24}$$

ここで $a''/a^3 = \ddot{a}/a + H^2 = 2H^2 + \dot{H}$ を用いた。さてこの方程式は、質量

$$\mathcal{M}^2(\phi) \equiv -a^2H^2\left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2} + 3\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}\right) \tag{25}$$

を持つ場 $a\delta\phi$ に対する、Minkowski 空間における Klein–Gordon 方程式

$$\left[\Box_\eta - \mathcal{M}^2(\phi)\right](a\delta\phi) = 0 \tag{26}$$

と読む事ができる。ここで $\nabla^2 \equiv g^{ij}\phi_{,ij} = \frac{1}{a^2}\delta^{ij}\phi_{,ij}$、$\Box_\eta \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$。ただし普通の Klein–Gordon 方程式と異なるのは質量が定数ではなく ϕ に依存する事で、さらに今スローロールを仮定している事より $\mathcal{M}^2(\phi) \approx -2a^2H^2 \approx -2\tau^{-2}$、つまり質量の２乗が負になっている。ただしスローロール近似 $a(\tau) \approx -(H\tau)^{-1}$、$\left|\dot{H}/H^2\right| \ll 1$、$\left|\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})\right| \ll 1$ を用いた。時間に依存する負の質量２乗、これが曲がった時空による実効的な効果である。

6.3　ゆらぎの解: スケール不変性

いよいよ、$\delta\phi$ を解く (量子化する)。まず $\delta\phi$ を生成 ($\hat{a}^\dagger$)・消滅 ($\hat{a}$) 演算子で展開する。

$$\delta\phi(\mathbf{x},\tau) = \int d^3\mathbf{k}\left[\hat{a}_\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}(\tau)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \hat{a}^\dagger_\mathbf{k}\varphi^*_\mathbf{k}(\tau)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right], \qquad \left[\hat{a}_\mathbf{k}, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}'}\right] = \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{27}$$

従って Klein–Gordon 方程式 (24) はスローロール 0 次近似、すなわち $\dot{H}/H^2$, $\ddot{\phi}/(H\dot{\phi})$ を無視する近似において

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right)(a\varphi_\mathbf{k}) = 0 \tag{28}$$

となる。これは解析的に解く事ができ、解は

$$\varphi_\mathbf{k}(\tau) = \frac{k}{a\tau}\left[(C_1 + k\tau C_2)\cos(-k\tau) + (C_2 - k\tau C_1)\sin(-k\tau)\right]. \tag{29}$$

次の仕事は、規格化定数 C_1, C_2 を決める事である。これはホライズンより十分内側 $-k\tau \approx k/(aH) \gg 1$ の解を、良く分かっている Minkowski 空間での量子場の真空解とマッチさせてやる事で得られる。

$$\varphi_{k\gg aH}(\tau) = \frac{k^2}{a}\left[C_2\cos(-k\tau) - C_1\sin(-k\tau)\right] = \frac{1}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2}a}e^{-ik\tau}. \tag{30}$$

従って、

$$C_2 = \frac{k^{-2}}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2}}, \qquad C_1 = -iC_2. \tag{31}$$

以上より解は、

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2}a}\left(1 - \frac{i}{k\tau}\right)e^{-ik\tau} = \frac{1}{\sqrt{2k}(2\pi)^{3/2}a}\left(1 + i\frac{aH}{k}\right)e^{ik/(aH)}. \tag{32}$$

特にスーパーホライズンスケール ($k \ll aH$) の解は、

$$\varphi_{k \ll aH} = i\frac{H}{\sqrt{2k^3}(2\pi)^{3/2}}. \tag{33}$$

この解の大きな特徴は、スケール不変性である。これを見るためにパワースペクトル $P_\varphi(k) \equiv 4\pi k^3 |\varphi_k|^2$ を定義しよう。これは $\ln k$ あたりのゆらぎのパワーで、実空間における $L \sim k^{-1}$ スケールのゆらぎの分散にほぼ等しい。するとただちに

$$P_\varphi(k \ll aH) = \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \tag{34}$$

を得る。インフレーション中では H はほぼ一定 ($\propto V(\phi) \approx$ 一定) であるから、これはゆらぎのスペクトルが k によらない、つまりゆらぎがスケール不変である事を示している。従ってゆらぎの rms はスケールに依らずに

$$|\delta\phi|_{\rm rms} \sim \frac{H}{2\pi} \qquad (\text{スーパーホライズンスケール}). \tag{35}$$

ちなみに、スローロール近似の精度を 1 次あげて $\dot{H}/H^2$ 等の項を無視しない場合、スケール不変性は若干破れる。この場合パワースペクトルは $P_\varphi(k) \propto k^{n-1}$ のようにべき乗になり、

$$n = 1 + 4\frac{\dot{H}}{H^2} - 2\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}. \tag{36}$$

$n = 1$ がスケール不変に対応している。従ってスケール不変性からのズレはそのままスローロールからのズレである。観測的には n はほとんど 1 に等しく、これはスローロールのインフレーションの予言と極めて良く一致している。

整理すると、インフレーション理論によって量子ゆらぎ $\delta\phi$ の rms 値とスペクトルを求める事ができた。これは場の量子論に基づいて規格化定数 C_1, C_2 を決める事ができたからである。観測される宇宙の大規模構造や宇宙背景放射の温度ゆらぎの種になっているのは、インフレーション理論の枠組ではこの $|\delta\phi|_{\rm rms} = H/2\pi$ である。このゆらぎが放射と物質のゆらぎに転化してゆくのである。

6.4 ゆらぎの量子性と古典性

$\delta\phi$ は量子場のゆらぎである。では量子場 $\delta\phi$ からつくられた温度ゆらぎは? やはり量子場である。しかし我々が観測している温度ゆらぎは古典量である。空のある方向の温度を電波望遠鏡で測れば、その値は観測する度に確率的に変動したりせず、常に同じ値のはずである。では、量子場はどのように古典場に変化したのだろうか...?

この問題はインフレーション理論の中でもまだちゃんと解決されていない大きな問題であるが、ヒントも一応ある。今、$\delta\phi(\mathbf{x})$ をホライズンよりも大きなスケール $L > (aH)^{-1}$ でスムーズする事を考えよう。すると、$k > aH$ を持つサブホライズンモードのゆらぎはならされてしまうので、式 (27) 中の $\varphi_{\mathbf{k}}$ が寄与するモードはスーパーホライズンモード $(k < aH)$ だけになる。一方、式 (33) より $\varphi_{k \ll aH} = iH/(\sqrt{2k^3}(2\pi)^{3/2})$ である。これを式 (27) に代入すれば、

$$\begin{aligned}
\delta\phi(\mathbf{x}|L) &= \int_{k<L^{-1}} d^3\mathbf{k}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)\varphi_{k\ll aH} = \int_{k<L^{-1}} d^3\mathbf{k}\left(\hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\right)\varphi_{k\ll aH}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \int_{k<L^{-1}} d^3\mathbf{k}\; c_{\mathbf{k}}\varphi_{k\ll aH}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \qquad (37)
\end{aligned}$$

ここで、$c_{\mathbf{k}} \equiv \hat{a}_{\mathbf{k}} - \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}$ は $\left[c_{\mathbf{k}}, c^\dagger_{\mathbf{k}'}\right] = 0$ を満たし、交換する c 数である。従って $\delta\phi(\mathbf{x}|L)$ は古典場として振舞う。以上の議論より、スーパーホライズンスケールのゆらぎは古典場として扱えるように見える。

しかし、上記のような「スムージング」という操作が果たしてインフレーションのダイナミクス中に入っているかと言えば、少なくともこれまでの議論の中には入っていない。つまり全ての k は同等に寄与し、$\delta\phi$ は量子場のままである。

このように量子場から古典場への遷移のメカニズムは、ヒントはあるもののちゃんと分かっていない。現在でも大部分の仕事はスーパーホライズンの極限で $\delta\phi$ を量子場ではなく古典場と解釈し直して議論しているだけである。一方、「まじめに」古典化を考えると、あるモデルでは生成される古典場のゆらぎの大きさが上記の議論と比べて大きく異なる、という報告もある。

インフレーション理論には具体的な部分でまだまだ不定性がたくさんあるが、この量子場–古典場の遷移の問題はその中でも最たるものであろう。これ以降の議論では、インフレーション中でのスーパーホライズンのゆらぎは自動的に古典化するとして話を進める。

7　スカラー場のゆらぎから温度ゆらぎへ

インフレーション中に生成されたスカラー場のゆらぎの計算は済んだので、次にこれを観測量である宇宙背景放射の温度ゆらぎと結びつける。そのためには、膨張宇宙での摂動論を一般相対論を用いて解かねばならない。... と言うと何だかとても大変そうだが、一般相対論的な取扱いが本質となるスーパーホライズンの極限では、問題は非常に簡単に解ける‡ 。ここでは Newton ゲージで物理的意味を持つゲージ不変量を使って議論する。数学的には、ゲージ不変量を用いればゲージの選び方で結果は変わらないが、物理的解釈は大きく変わってしまう事に注意しよう。

7.1　密度ゆらぎよりも速度場を解く

ゆらぎを解析する際、物質の立場から言えば、密度ゆらぎと速度場が本質的な量となって来る。このうちカギとなるのは、実は速度場である。スーパーホライズンスケールでは密度ゆらぎというのは定義が難しく、解釈に依存してしまう (言い方を変えると、ゲージに強く依存する)。それに比べて速度場は、ゲージの選び方に比較的依らず解釈も容易である。フルに相対論的でゲージ不変な速度場 $V_{\rm s}$ の運動方程式は、

$$V_{\rm s}' + 2\frac{a'}{a}V_{\rm s} = kC. \tag{38}$$

C は積分定数、ダッシュは共形時間による微分である。シンプルすぎて拍子抜けかもしれないが、これが全てである。厳密に言うと、ストレスフリーな断熱ゆらぎのスーパーホライズンの速度場の発展方程式は、これで尽きている。解はただちに、

$$V_{\rm s} = C\frac{k}{a^2}\int a^2 {\rm d}\tau = C\frac{k}{a^2}\int\frac{{\rm d}a}{H(a)}. \tag{39}$$

一方、スカラー場の速度場は

$$V_{\rm s}^{\phi} = k\frac{\phi'\delta\phi}{a^2(\rho_\phi + p_\phi)} \approx k\frac{\phi'\delta\phi}{a^2(\phi'/a)^2} = k\frac{\delta\phi}{\phi'} \tag{40}$$

であるから、インフレーション中 ($H(a) \approx$ 一定) において

$$V_{\rm s}^{\phi} \approx C\frac{k}{aH} = k\frac{\delta\phi}{\phi'}, \tag{41}$$

‡ 詳細は修士論文の第 3 章、もしくは集中講義ノートの第 3 章にゆずります。ただしこれらでは、ドットが共形時間微分である事に注意。

従って

$$C = \frac{aH}{\phi'}\delta\phi = \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi. \tag{42}$$

再右辺は、前節で見たように全てインフレーション中のスカラー場の運動によって求められる量である。このように、インフレーションを初期条件とする事で V_{s} の積分定数 C が求まってしまった。これがインフレーション理論の予言力である。以上より式 (38) は

$$V_{\mathrm{s}}' + 2\frac{a'}{a}V_{\mathrm{s}} = k\frac{aH}{\phi'}\delta\phi \tag{43}$$

となり、a を放射優勢期 $(\propto \tau)$ や物質優勢期 $(\propto \tau^2)$ にとる事によって任意の時期での速度場が決まる。結果を下の表にまとめておく。

7.2　速度場が重力ポテンシャルを決める

速度場が求まると、次に重力ポテンシャル Φ_{A} を求める事ができる。意外に聞こえるかもしれないが、スーパーホライズンでポテンシャルを決めるのは密度ゆらぎではなく速度場である。ただしこれは Newton ゲージで意味を持つゲージ不変量を用いている場合に正しい言い方である。

Φ_{A} もまたシンプルに

$$\Phi_{\mathrm{A}} = \frac{1}{k}\left(V_{\mathrm{s}}' + \frac{a'}{a}V_{\mathrm{s}}\right) = C\left(1 - \frac{H(a)}{a}\int\frac{\mathrm{d}\tilde{a}}{H(\tilde{a})}\right). \tag{44}$$

ここで V_{s} の解 (39) を用いた。インフレーション中では $\Phi_{\mathrm{A}} \approx 0$ である。もう少し詳しく言えば $\Phi_{\mathrm{A}} \approx C \times \mathcal{O}(\dot{\phi}^2/V)$ であり、スローロール $\dot{\phi}^2/V \ll 1$ のためポテンシャルは速度場に比べて小さい。以上の結果をまとめれば、インフレーション期から物質優勢期までのポテンシャルと速度場の発展は以下の表のようになる。ちなみに $\zeta \equiv \Phi_{\mathrm{A}} + \frac{aH}{k}V_{\mathrm{s}} = C$ は宇宙の進化を通じて保存量となっており、宇宙論的摂動論において便利な量である。

時期	重力ポテンシャル Φ_{A}	速度場 $\frac{aH}{k}V_{\mathrm{s}}$
インフレーション $(H \approx$ 一定$)$	$C \times \mathcal{O}(\dot{\phi}^2/V) \ll C$	$C = H\delta\phi/\dot{\phi}$
放射優勢 $(a \propto \tau)$	$\frac{2}{3}C$	$\frac{1}{3}C$
物質優勢 $(a \propto \tau^2)$	$\frac{3}{5}C$	$\frac{2}{5}C$

7.3 重力ポテンシャルから温度ゆらぎへ

重力ポテンシャル Φ_{A} が求まると、Sachs–Wolfe 効果[§] を通じて宇宙背景放射の温度ゆらぎが生成される。観測されるのは最終散乱面 $z \sim 1000$ での温度ゆらぎであり、そこでは既に物質優勢期であるから、観測量は物質優勢期での Sachs–Wolfe 効果:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{3}\Phi_{\mathrm{A}} = \frac{1}{5}C = \frac{H}{5\dot{\phi}}\delta\phi \tag{45}$$

となる。このように、観測量である温度ゆらぎが直接インフラトンのゆらぎとインフラトンのダイナミクスで書き下されてしまった。つまり、温度ゆらぎの観測は、初期宇宙に起こった (かもしれない) インフレーションのダイナミクスを直接「観測」している事に相当する。インフレーション理論は、そういった意味で観測的にテスト可能な初期宇宙理論なのである。

具体的な数値を入れてみよう。COBE による宇宙背景放射の温度ゆらぎの測定では、10° ビームでの rms が $|\Delta T|_{\mathrm{rms}} = 29 \pm 1\ \mu\mathrm{K}$ である。従って、

$$\frac{H}{\dot{\phi}}\left|\delta\phi\right|_{\mathrm{rms}} = \frac{H^2}{2\pi\dot{\phi}} \lesssim 5 \times 10^{-5} \tag{46}$$

を得る。ただし H はインフレーション中の Hubble パラメターであり、現在の値ではない事に注意。以上から、温度ゆらぎの測定は $H^2/\dot{\phi}$ のコンビネーションの制限になっている事が分かる。これらはインフレーションモデルの詳細によるため、モデルのテストに使う事ができる。また、式 (14) を用いればインフラトンのポテンシャル $V(\phi)$ に対する制限として書き下す事もできる。ちなみに最後を不等号にしたのは、観測される温度ゆらぎが Sachs–Wolfe 効果と後述の重力波による寄与の和であって、Sachs–Wolfe 効果を単独で見ているわけではないためである。

8 重力波の生成

さて、前節まではスカラー場の量子ゆらぎが生成する温度ゆらぎを議論した。これに加え、インフレーション中では重力波が生成され、その重力波もまた温度ゆらぎを生成する。

[§] この辺の詳細に興味のある方は、修士論文の第 3 章 1 節あるいは集中講義ノートの第 3 章 5 節をご覧下さい。

8.1　インフレーションと重力波?

インフレーションと重力波はすぐには結びつかないかもしれないが、重力波もインフレーション期の量子ゆらぎとして生成される。これはひとえに、重力波の従う運動方程式が Klein–Gordon 方程式と酷似している事による。メトリックの空間パートを

$$g_{ij} = a^2(\delta_{ij} + h_{ij}) \tag{47}$$

と展開すると、h_{ij} が重力波のモードに対応する。その運動方程式は、

$$\ddot{h}_{ij} + 3H\dot{h}_{ij} - \nabla^2 h_{ij} = 0. \tag{48}$$

スカラー場による手法と同様に共形時間を用いれば、

$$\left(\Box_\eta + \frac{a''}{a}\right)(ah_{ij}) = 0, \tag{49}$$

もしくはスローロール近似を用いて $(\Box_\eta + 2a^2H^2)\, ah_{ij} = 0$ である。これは式 (26) と同じく Minkowski 空間における Klein–Gordon 方程式で、再び「質量 2 乗」は $-2a^2H^2$ である。従ってスーパーホライズンの解は、

$$\frac{h^{(+,\times)}_{k \ll aH}}{(16\pi G)^{1/2}} = i\frac{H}{\sqrt{2k^3}(2\pi)^{3/2}}. \tag{50}$$

ここで h_{ij} のモード関数を

$$h_{\mathbf{k}ij} = h^{(+)}_{\mathbf{k}} e^{(+)}_{ij} + h^{(\times)}_{\mathbf{k}} e^{(\times)}_{ij} \tag{51}$$

と展開した。また $(16\pi G)^{1/2}$ は重力波の規格化に必要なファクターである。$+, \times$ はそれぞれ重力波の持つ固有の偏光モードで、$e^{(+,\times)}_{ij}$ は単位偏光テンサー $(e^{(\lambda)}_{ij} e^{(\lambda')ij} = \delta_{\lambda\lambda'})$ である。以上より、重力波のパワースペクトルもスケール不変で

$$P^{(\lambda)}_h(k) \equiv 4\pi k^3 \left|h^{(\lambda)}_k\right|^2 = 16\pi G\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{H}{m_{\rm pl}}\right)^2. \tag{52}$$

$m_{\rm pl} = G^{-1/2}$ は Planck 質量である。スカラー場モードと同様、スローロールに関して 1 次までとればパワースペクトルはスケール不変でなくべき乗 $P_h(k) \propto k^n$ になる。n は

$$n = 2\frac{\dot{H}}{H^2}. \tag{53}$$

8.2 重力波による温度ゆらぎ

重力波が伝播すると時空は 4 重極パターンで伸び縮みする。その時空を光子が伝播すると、重力赤方偏移によって 4 重極の温度ゆらぎが生じる。これが重力波による温度ゆらぎの生成メカニズムである。具体的に書けば、

$$\frac{\Delta T(\hat{\mathbf{n}})}{T} = -\frac{1}{2}\int \hat{n}^i \hat{n}^j h'_{ij}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{54}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ は方向余弦。これは先程の重力ポテンシャルによる Sachs–Wolfe 効果 ($\Delta T/T = \Phi_{\mathrm{A}}/3$) のような静的な効果とは異なり、動的な効果 ($h'_{ij}$) の積分である。従って、晴れ上がりから現在までの重力波の伝播の式を解かねばならない。実際、重力波はホライズンに入ると赤方偏移のために振幅が落ちてゆく。

まともに扱うのは複雑になってしまうので、おおまかに大きさを見積もる事にする。現在 4 重極として観測される非常に大角度の温度異方性は、現在まさにホライズンに入って来た重力波による寄与である。従って上述の赤方偏移を受けておらずインフレーションで生成された重力波の大きさを保存しているので、

$$\left|\frac{\Delta T}{T}\right|_{\mathrm{rms}} \sim h_{\mathrm{rms}} \sim \frac{H}{m_{\mathrm{pl}}} \lesssim 10^{-5}. \tag{55}$$

最後を不等号にしたのは、観測される温度異方性が前節で述べた Sachs–Wolfe 効果と重力波の寄与の和であって、重力波単独ではないためである。

重力波モードとスカラー場モードを分離するのは温度ゆらぎの観測だけでは結構厳しいのだが、偏光の情報を用いれば分離可能である。これは、温度ゆらぎがスカラー量であるのに対し、偏光がテンサー量であるため、偏光がテンサー量である重力波モードとスカラー量であるスカラー場モードを見分ける事ができるためである。偏光による重力波の寄与の直接測定が実現されれば、インフレーション理論にとって非常に強い制限となるだけでなく、インフレーションの枠組みそのもののテストとなる。

8.3 重力波モードとスカラー場モードの比

重力波モードとスカラー場のモードの温度ゆらぎの大きさの比をとれば、だいたい

$$\frac{\text{重力波モード}}{\text{スカラー場モード}} \approx \frac{H/m_{\mathrm{pl}}}{H^2/(2\pi\left|\dot{\phi}\right|)} = 2\pi\frac{\left|\dot{\phi}\right|}{m_{\mathrm{pl}}H} \approx \left(\frac{\dot{\phi}^2}{V}\right)^{1/2}. \tag{56}$$

スローロール条件から $\dot{\phi}^2 \ll V$ であるので、一般に重力波モードの温度ゆらぎはスカラー場モードに比べて小さくなる。例えば典型的なインフレーションモデルでは、この比は 0.1 のオーダーである。

9 インフレーション理論への観測的制限

9.1 インフレーション時の Hubble パラメターへの制限

Sachs–Wolfe 効果によるインフレーションへの制限が $H^2/\dot{\phi}$ への制限になっているのに対し、重力波からの制限はダイレクトに Hubble パラメター $H/m_{\rm pl}$ への制限になっている。これより、以下の制限を引き出す事ができる。式 (14) より、

$$\frac{H}{m_{\rm pl}} \approx \frac{(8\pi/3)^{1/2}}{m_{\rm pl}^2} V^{1/2} \lesssim 10^{-5}, \tag{57}$$

従って、$V^{1/4} \lesssim 10^{-3} m_{\rm pl} \sim 10^{16}$ GeV を得る。

たとえば 1 次相転移に基づくインフレーションモデルのように、$V^{1/4}$ が宇宙の温度と同じオーダーの場合、インフレーションが起こるエネルギースケールはおおまかに言って GUTs エネルギースケール以下という事になる。しかしこのような 1 次相転移に基づくインフレーションではインフレーションがうまく終らないという欠点があるため、現在ではこのモデルは主流ではない。

9.2 カオティックインフレーションと fine-tuning 問題

1 次相転移モデルの困難を回避して比較的うまくいっているモデルとして、カオティックインフレーションがある。これはポテンシャルにべき乗 $V(\phi) \propto \phi^n$ を仮定したものである。例えば質量を持たないスカラー場の自己 4 点相互作用 $V(\phi) = \lambda\phi^4/4$ の場合は、

$$\lambda^{1/4}\phi \lesssim 10^{-3} m_{\rm pl}. \tag{58}$$

カオティックインフレーションで十分にインフレーションを起こすためには $\phi \sim m_{\rm pl}$ でなければならないので、これより $\lambda < 10^{-12}$ を得る。このように $n = 4$ ポテンシャルでは観測されるゆらぎの大きさを説明するのに λ が極めて小さい数に tune されなければならない。素粒子論的な観点から言えば $\lambda \sim 1$ が好ましく、上記のような λ の fine-tuning は問題である。これがカオティックインフレーションの抱える fine-tuning 問題で、未だ未解決である。

質量を持つ自由スカラー場 $V(\phi)=m^2\phi^2/2$ のケースでは、

$$m^{1/2}\phi^{1/2} \lesssim 10^{-3}m_{\rm pl}, \tag{59}$$

よって $m<10^{-6}m_{\rm pl}$。m に関してはスカラー場が何者か分からない以上完全なフリーパラメターであるため何とも言えないが、カオティックインフレーションでは $m_{\rm pl}$ がスケールを決めるパラメターなので、それから作られる無次元量 $m/m_{\rm pl}$ が非常に小さいというのは fine-tuning と言えなくもない。

これらの fine-tuning 問題は、$H/m_{\rm pl}$ が非常に小さい事に由来している。つまり $H/m_{\rm pl}\sim\mathcal{O}(1)$ が理論的にもっともらしいのに対し、観測では非常に小さいのである。それは温度ゆらぎのオーダーが $\Delta T/T\approx H/m_{\rm pl}\lesssim 10^{-5}$ だからであった。これらの結果は、インフレーション理論がまだまだ不完全である事を示している。例えば、これまでの議論のように単一のスカラー場を扱うのではなく、複数のスカラー場の存在を認めてダイナミクスを解く事によって fine-tuning が解決できたりもするし、重力理論にコレクションを加えればうまくいく、という報告もある。

もちろん、スカラー場がいくつあるかとかスカラー場の相互作用の形などは、本来手でフリーに与えるものではなく理論的に導き出されるべきものであるが、この辺の理論的進展は遅々としていて先行き不透明なのが実情である。

謝辞

この講義ノートを作成するにあたり、インフレーションに関する基礎事項を教えていただくとともに、現在も共同研究を通じて様々な議論をしていただいている二間瀬敏史教授(東北大)に感謝いたします。長時間におよぶ講義を聞いていただき、熱心に議論して下さった東北大学宇宙論グループの服部誠助手、高田昌広さん、大田泉さん、岡部信広さん、浜地芳宏さんに感謝いたします。

2000 年 12 月 29 日
小松 英一郎