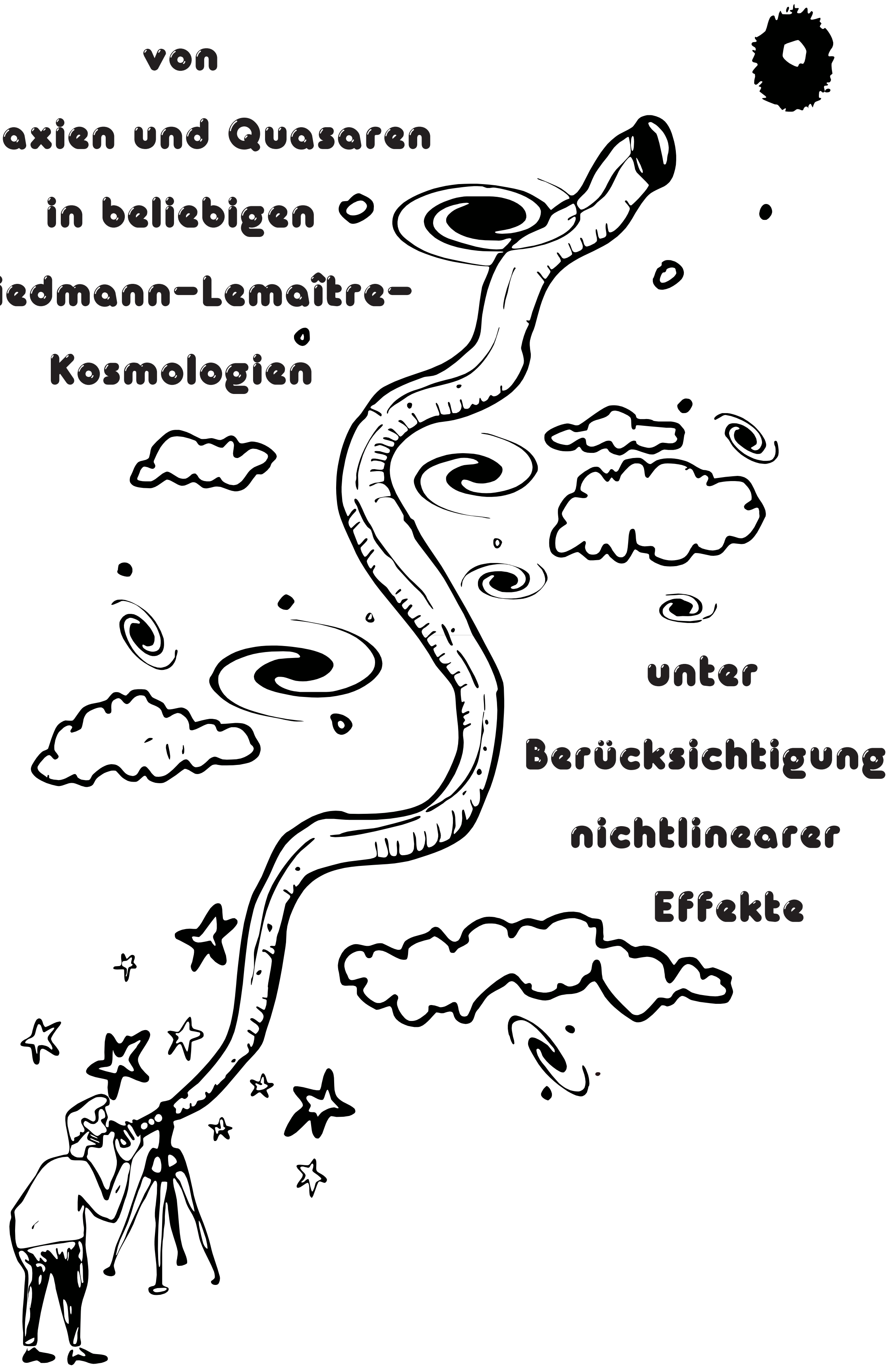
Korrelationsfunktion von Galaxien und Quasaren in beliebigen Friedmann-Lemaître-Kosmologien

unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte



Klaus Dolag, Januar 1997

Inhaltsverzeichnis

Korrelationsfunktion von Galaxien und Quasaren in beliebigen Friedmann-Lemaître-Kosmologien unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte

Diplomarbeit
vorgelegt von Klaus Dolag
an der
Technischen Universität
München

angefertigt am
Max-Planck-Institut Astrophysik, Garching

München, im Januar 1997

„Quel che lei ci ha raccontato sono tutte frottole. Il mondo, in realtà, è un disco piatto che poggia sul dorso di una gigantesca tartaruga“.
Lo scienziato si lasciò sfuggire un sorriso di superiorità prima di rispondere: „E su che cosa poggia la tartaruga?“.
„Lei è molto intelligente, giovanotto, davvero molto“, disse la vecchia signora. „Ma ogni tartaruga poggia su un'altra tartaruga!“
La maggior parte delle persone troverebbe piuttosto ridicola quest'immagine del nostro universo che poggia su una torre infinita di tartarughe, ma perchè mai noi dovremmo pensare di saperne di più? †

† Ein Gespräch zwischen einer unbekannten, alten Dame und dem Wissenschaftler Bertrand Russell nach einer öffentlichen astronomischen Tagung. Aus der italienischen Übersetzung des Buches „A BRIEF HISTORY OF TIME“ von Stephen Hawking. Sinngemäß übersetzt: *„Das was Sie uns erzählt haben, stimmt alles nicht! In Wirklichkeit ist die Welt eine flache Scheibe, die von einer Riesenschildkröte auf dem Rücken getragen wird.“ Mit einem überlegenen Lächeln hielt der Wissenschaftler ihr entgegen: „Und worauf steht die Schildkröte ?“. „Sehr schlau, junger Mann“, parierte die alte Dame. „Aber jede Schildkröte steht wieder auf einer Schildkröte !“. Die meisten Menschen würden über die Vorstellung, unser Universums sei ein unendlicher Schildkrötenturm, den Kopf schütteln. Doch woher nehmen wir die Überzeugung, es besser zu wissen ?* [Stephen Hawking]

Einleitung und Zusammenfassung

Einleitung

Der Nachweis von Gravitationslinsensystemen [Walsh, Carswell, Weymann 1979] und deren gute Übereinstimmung mit der Theorie (z.B. [Schneider, Ehlers, Falco 1992]) sind eine beeindruckende Bestätigung der von Albert Einstein [1905-1915] entwickelten *Allgemeinen Relativitätstheorie*. Immer weiter verbesserte Meßmöglichkeiten und immer bessere Instrumente haben dazu geführt, auch schwache Linseneffekte, und sei es auch nur durch statistische Methoden, messen zu können. Gerade in diesem Fall kann man aus der Größe des beobachteten Effekts auf die Parameter der ebenfalls aus der Relativitätstheorie stammenden kosmologischen Hintergrundmodelle Rückschlüsse ziehen.

Eine weitere aufregende Entdeckung in der Astrophysik war eine Klasse von Objekten, die *Quasare*[1] getauft wurden [Schechter 1976]. Diese punktförmigen, meist sehr weit entfernten[2] Objekte zeichnen sich durch ihre große Leuchtkraft aus. Die gängige Interpretation dieser Objekte ist die Vorstellung, daß es sich bei ihnen um akkretierende schwarze Löcher in frühen Galaxien handelt. Ihre meist große Entfernung zu uns macht sie zu idealen „Test-Objekten“ für das Universum, da das von ihnen ausgesandte Licht fast den gesamten sichtbaren Teil des Universums durchqueren muß, um zu uns zu gelangen. Insbesondere „integriert“ ihr Licht den Gravitationslinseneffekt aller Materie, die zwischen uns und den Quasaren liegt.

Diese Diplomarbeit behandelt die sich aufgrund dieses Effektes ergebende Korrelation zwischen den beobachtbaren Positionen der Quasare und denen von *Galaxien*. Dazu betrachte ich die Verstärkung des Lichts der Quasare durch den *schwachen Gravitationslinseneffekt* entlang des Lichtweges. Da jede Messung des Flusses mit einem Detektor eine untere Detektionsgrenze hat, führt die Verstärkung des Lichtes zu einer erhöhten Anzahl von Quasaren entlang solcher Beobachtungsrichtungen, in denen eine überdurchschnittli-

[1] Quasare steht für „**quas**i-stell**ar** objects“, kurz QSOs genannt.
[2] Mit Ausnahme der Hintergrundstrahlung sind die Quasare die entferntesten beobachtbaren Objekte.

che Materiedichte vorherrscht. Die Verstärkung kann also lichtschwache Quasare in den beobachtbaren Helligkeitsbereich heben. Dies wird auch als *magnification bias* bezeichnet (z.B. [Schneider, Ehlers, Falco 1992], [Narayan, Wallington, 1993]).

In den gängigen Modellen für die Entstehung von Galaxien wird davon ausgegangen, daß sich Galaxien bevorzugt dort bilden, wo eine Überdichte der Materie vorherrscht [Kaiser, 1984], [Dekel, Rees 1987]. Somit können im Mittel mehr Galaxien in der Umgebung von Quasaren beobachtet werden als normal. Dies läßt sich am besten durch die Korrelationsfunktion von Quasaren mit Galaxien ausdrücken. Eine derartige Korrelation wurden wiederholt in Beobachtungen gefunden:

- 1–Jansky-QSOs und Lick-Galaxien
  [Fugmann 1990] und [Bartelmann, Schneider 1993b]

- 1–Jansky-QSOs und IRAS-Galaxien
  [Bartelmann, Schneider, 1994] und [Bartsch, Schneider, Bartelmann 1996]

- 1–Jansky-QSOs und diffuser Röntgenemission
  [Bartelmann, Schneider, Hasinger 1994]

- Optisch selektierte QSOs und Zwicky-Haufen
  [Rodrigues-Williams, Hogan, 1994]

- 1–Jansky-QSOs und Zwicky-Haufen
  [Seitz, Schneider, 1995]

- Aufgrund ihrer Veränderlichkeit selektierte QSOs und Zwicky-Haufen
  [Rodrigues-Williams, Hawkins, 1995]

- 2–Jansky-QSOs und Abell-Haufen
  [Wu, Han, 1995]

- 1–Jansky QSOs-und APM-Galaxien
  [Benítez, Martínez-González, 1995]

- PKS-QSOs und ROE/NRL- COSMOS/UKST-Galaxien
  [Benítez, Martínez-González, 1996]

Hierzu habe ich meine Arbeit in 4 Kapitel aufgeteilt, in denen der Leser Schritt für Schritt bis zu der Interpretation der Ergebnisse in Kapitel vier geführt werden soll. Um den Leser nicht allzusehr von diesem roten Faden abzulenken, habe ich die Details mancher Herleitungen in den Anhang verlagert und stelle in den Kapiteln nur kurz die Vorgehensweise dar.

Zusammenfassung

Im ersten Kapitel soll zuerst eine Übersicht über das *Standard-Modell der Kosmologie* gegeben werden. Dieses beschreibt die *Raumzeit* und die sie kennzeichnenden Größen. Dabei handelt es sich um eine *homogene* und *isotrope* Lösung der *Feldgleichungen* der *Allgemeinen Relativitätstheorie*.

Ein weiterer Schwerpunkt des ersten Kapitels liegt auf der Darstellung der *Materie* im Kosmos. Auf sehr großen Skalen wird die Materie durch das Standard-Modell als homogen beschrieben. Auf den Skalen von Wolken, Galaxien und Galaxienhaufen ist die Materie jedoch nicht homogen, sondern weist eine sichtbare Struktur auf. Diese wird als Abweichung der lokalen Dichte von der mittleren Dichte im Universum beschrieben. Zu ihrer Beschreibung wird ein Gaußsches Zufallsfeld dieser Dichtefluktuationen angenommen, welches durch sein *Powerspektrum* und dessen Entwicklung mit der Zeit vollständig beschrieben wird. Ein wichtiger Punkt dieser Arbeit wird es sein, diese Entwicklung über die lineare Näherung hinaus auch im *nichtlinearen Bereich* zu berücksichtigen. Abgeschlossen wird das erste Kapitel mit der Herleitung und der Lösung der relativen Bewegungsgleichung für zwei sich ausbreitende Lichtstrahlen.

Das zweite Kapitel stellt Modelle zur Beschreibung der räumlichen Verteilung von Galaxien und Quasaren vor. Diese sind notwendig, da sich aus ihnen Gewichtsfunktionen berechnen lassen, die benötigt werden, wenn der Weg von Lichtstrahlen entlang einer Sichtlinie betrachtet wird.

Im dritten Kapitel wird dann die *Verstärkung* der Lichtstrahlen, die von Quasaren ausgehen, berechnet. Hier gehen schon einige der Ergebnisse der vorherigen Berechnungen ein. Anschließend werden die Teilergebnisse der vorangegangenen Arbeiten zu dem angestrebten Ergebnis, der *Korrelationsfunktion*, kombiniert.

Im letzten Kapitel werden die Ergebnisse dieser Arbeit dargestellt und diskutiert. Dabei zeige ich die Abhängigkeit der Resultate von den kosmologischen Parametern und dem Modell für das Powerspektrum. Weiter zeige ich, daß die nichtlineare Entwicklung des Powerspektrums einen sehr großen Einfluß auf das Ergebnis hat und damit ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit ist. Abschließend vergleiche ich meine Ergebnisse mit Messungen.

Anmerkungen

Als Notation möchte ich die gebräuchliche Summenkonvention benutzen, d.h., wenn in einer Formel gleiche Indizes sowohl oben als auch unten stehen, wird über diese summiert. Weiter laufen wie üblich die griechischen Indizes von 0 bis 3, während die lateinischen Indizes von 1 bis 3 laufen.

Kapitel 1

Kosmologie

Grundlage aller weiteren Betrachtungen ist das Modell des Universums, in dem sowohl der Beobachter als auch alle zu beobachtenden Objekte eingebettet sind. Das Standardmodell geht davon aus, daß die Materie, die das Universum ausfüllt, isotrop und homogen ist. Derartige Modelle werden *Friedmann-Lemaître-Modelle* genannt, wenn ihre Expansion einer bestimmten Gleichung, der sogenannten *Friedmann-Gleichung,* genügt.

Abweichend von dem homogenen kosmologischen Modellen kann die Materie auf kleinen Skalen nicht mehr als homogen beschrieben werden. Nach den heutigen Erkenntnissen wachsen Strukturen wie Galaxien, Galaxienhaufen, Superhaufen usw. durch Gravitation aus ursprünglichen Dichtefluktuationen, deren Herkunft noch im Unklaren liegt. Diese ursprünglichen Dichtefluktuationen werden gewöhnlich als Gaußsches Zufallsfeld beschrieben. Bisher wurde bei der Berechnung schwacher Gravitationslinsen-Effekte davon ausgegangen, daß eine lineare Beschreibung der Entwicklung dieser Fluktuationen ausreichend sei. Für meine Arbeit hat sich dies jedoch als ungenügend erwiesen und dadurch eine Berücksichtigung von nichtlinearen Effekten erfordert.

Hat man nun ein derartiges Modell des Universums konstruiert, so kann man die unterschiedliche Ausbreitung von Lichtstrahlen in verschiedenen Universen betrachten.

1.1 Das Friedmann-Lemaître-Modell

Um das Universum beschreiben zu können, ist es nötig, plausible Annahmen über die Eigenschaften des Raumes [1] zu machen. Sein zeitliches Verhalten und die Beschreibung der in einem solchen Raum eingebetteten Materie bestimmen dann die Dynamik eines

[1] im mathematischen Sinne, in unserem Fall also vierdimensional

solchen Modells.

1.1.1 Die Metrik

Mit der Allgemeinen Relativitätstheorie führte Einstein eine neue Weise ein, die Welt um uns herum zu betrachten. So kann die für uns so alltägliche Trennung von Raum und Zeit nicht beibehalten werden. Stattdessen nehmen wir als *„Abstand“* zweier Ereignisse das Linienelement der vierdimensionalen Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta, \tag{1.1}$$

wobei $\mathrm{d}x^0 = c\mathrm{d}t$ der zeitliche und $\mathrm{d}x^i$ der räumliche Koordinatenabstand ist. Die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt den Metriktensor $g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ als dynamisches Feld, welches durch die Einsteinschen Feldgleichungen beschrieben wird. Dabei sollte beachtet werden, daß die $g_{\alpha\beta}$ Funktionen der vierdimensionalen Raum-Zeitkoordinaten x^γ sind.

Die *Eigenzeit* eines Beobachters, der sich in dieser Raumzeit bewegt, ist dann als $c^{-1}\mathrm{d}s$ definiert. Unter den *„mitbewegten Koordinaten“* verstehen wir ein Koordinatensystem, das durch die Weltlinien frei fallender Beobachter definiert ist. In einem solchen Koordinatensystem bleiben die räumlichen Koordinaten für einen Beobachter konstant ($\mathrm{d}x^i = 0$). Für das Linienelement eines solchen Beobachters gilt somit in mitbewegten Koordinaten $\mathrm{d}s^2 = g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2$. Da in diesem Fall die Eigenzeit gleich der Koordinatenzeit ($\mathrm{d}x^0 = c\ \mathrm{d}t$) sein soll, folgt

$$g_{00} = 1. \tag{1.2}$$

Die Metrik kann durch zwei einfache und plausible Annahmen weiter vereinfacht werden:

- **Das Universum ist isotrop um uns.**
  Betrachten wir die leuchtende Materie, gemittelt über große Skalen[2], ist diese Bedingung gut erfüllt, z.B. [Gregory, Condon 1991]. Da jedoch nur ein geringer Prozentsatz der Materie im Kosmos leuchtet, wäre dies noch nicht ausreichend. Die Messung der Isotropie der 2.73 K-Hintergrundstrahlung hat jedoch gezeigt, daß diese Annahme ausgezeichnet erfüllt ist [Smoot et al. 1992].

- **Unsere Position im Universum ist durch nichts ausgezeichnet.**
  Diese Annahme kann nicht bewiesen werden. Da um uns keine ausgezeichnete Richtung festgestellt werden konnte, liegt diese Vorstellung, oft auch das *Kopernikanische Prinzip* genannt, aber zumindest nahe.

[2] Typischerweise einige 100 Mpc

Wir haben uns hiermit ein homogenes Universum konstruiert, da die beiden obigen Annahmen zusammengenommen eine Isotropie um jeden Punkt, und damit die Homogenität, des Universums bedeuten.
Für den Metriktensor bedeutet dies insbesondere, daß es lokal mindestens ein Bezugssystem geben muß, in dem g_{0i} gleich Null ist, da anderenfalls eine Richtung ausgezeichnet würde. Wegen der Forderung nach Isotropie um jeden Punkt folgt somit, daß es auch ein globales Koordinatensystem mit $g_{0i} = 0$ geben muß, und Gleichung (1.1) kann als

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 + g_{ij}(x^k)\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j \tag{1.3}$$

geschrieben werden. Weiter kann die räumliche Metrik, ohne die Isotropie zu verletzen, nur noch mit einer zeitabhängigen Skalenfunktion $R(t)$ expandieren bzw. kontrahieren. Damit erhalten wir die *Robertson-Walker-Metrik*

$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - R^2(t)\mathrm{d}l^2 \tag{1.4}$$

mit dem räumlichen Linienelement $\mathrm{d}l^2 = g'_{ij}\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j$. Die Skalenfunktion $R(t)$ möchte ich zur heutigen Zeit auf $R_0 = R(t_0) = 1$ normieren. Für die späteren Berechnungen erweist es sich als günstiger, die Skalenfunktion ganz vor die Raum-Zeit-Metrik zu ziehen. Hierfür ist es sinnvoll, die *konforme Zeit*

$$\eta = \int^t \frac{c\,\mathrm{d}\tilde{t}}{R(\tilde{t})} \tag{1.5}$$

einzuführen und die Skalenfunktion auf $a(\eta) = R(t(\eta))$ umzuschreiben. Die Metrik hat dann folgende Form:

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(\mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}l^2\right). \tag{1.6}$$

Für die Metrik des Raumes, die durch $\mathrm{d}l^2$ gegeben ist, fordert die Isotropie-Annahme nur, daß sie sphärisch symmetrisch sein muß, sie kann aber noch gekrümmt oder flach sein. Am besten läßt sich eine solche Metrik in Polarkoordinaten darstellen. Schreiben wir die räumliche Metrik in Polarkoordinaten, so erhalten wir mit $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\phi^2$ folgenden Ausdruck für die Metrik ([Sexl, Urbantke 1995]):

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(\mathrm{d}\eta^2 - \left(\frac{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2}{\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^2}\right)\right). \tag{1.7}$$

Diese Metrik beschreibt eine räumliche 3-Sphäre mit dem Krümmungsparameter K† .
Diese Klasse von Räumen kann in drei Gruppen aufgeteilt werden:

†Hierbei ist die Gaußkrümmung gemeint.

- $K < 0$, hyperbolischer Raum.
- $K = 0$, euklidischer Raum.
- $K > 0$, sphärischer Raum.

Jetzt können wir noch eine neue Radialkoordinate ϱ definieren und erhalten:

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(\mathrm{d}\eta^2 - \left(\frac{\mathrm{d}\varrho^2}{1 - K\varrho^2} + \varrho^2\mathrm{d}\Omega^2\right)\right) \tag{1.8}$$

mit:

$$\varrho = r\left(1 + \frac{Kr^2}{4}\right)^{-1} \tag{1.9}$$

Um wieder auf eine noch kürzere Darstellung zu gelangen, hilft es, eine neue „Radialkoordinate“ ω durch

$$\sin_K(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\left(\omega\sqrt{K}\right) & K > 0 \\ \omega & K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}}\sinh\left(\omega\sqrt{|K|}\right) & K < 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

einzuführen. Damit bekommen wir eine elegante Schreibweise für das Linienelement:

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\eta)\left(\mathrm{d}\eta^2 - \left(\mathrm{d}\omega^2 + \sin_K^2(\omega)\mathrm{d}\Omega^2\right)\right) \tag{1.11}$$

Somit haben wir durch plausible Symmetrieannahmen die Freiheit der Metrik auf eine Skalenfunktion $a(\eta)$ und den Krümmungsparameter K eingeschränkt.

1.1.2 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Die Allgemeine Relativitätstheorie verknüpft durch ihre Feldgleichungen die Struktur des Raumes (beschrieben durch den Metriktensor $g_{\alpha\beta}$ und dessen Ableitungen) mit der darin vorhandenen Materie (beschrieben durch den Energie-Impuls-Tensor der Materie). Setzen wir die obige Metrik in diese Feldgleichungen ein, so erhalten wir die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors $R(t)$.

Beginnen wir hierfür mit den Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}, \tag{1.12}$$

die den *Energie-Impuls-Tensor* $T_{\alpha\beta}$ der Materie mit dem *Einstein-Tensor* $G_{\alpha\beta}$ des Gravitationsfeldes verknüpfen. Dabei ist der Einstein-Tensor durch den *Ricci-Tensor* und die Metrik wie folgt definiert:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R^{\gamma}{}_{\gamma}g_{\alpha\beta}. \tag{1.13}$$

Der Energie-Impuls-Tensor[3] stellt den Zusammenhang zwischen der *Energiedichte* ρc^2, dem *Druck* p und der *Vierer-Geschwindigkeit* u^α her:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2}\left(\rho c^2 + p\right) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}. \tag{1.14}$$

Die *kosmologische Konstante* Λ wurde ursprünglich von Einstein eingeführt, um statische Weltmodelle zu erhalten. Seit der Erkenntnis moderner Feldtheorien, daß virtuelle Teilchen die Energie des Grundzustands eines Quantenfeldes erhöhen können, kann die kosmologische Konstante als Analogon zur *Vakuumenergie* in der *QCD* betrachtet werden. Leider weicht der in den vorhandenen Quantenfeldtheorien errechnete Wert um 120 Größenordnungen von den aus den Beobachtungen folgenden Schranken für die kosmologische Konstante ab [Goenner 1994]. Dennoch scheinen einige Modelle die Beobachtungen besser beschreiben zu können, wenn man $\Lambda \neq 0$ annimmt. Aus diesem Grund möchte ich bei meinen Betrachtungen auch solche Modelle zulassen.

Die Dynamik hängt somit von dem Parameter Λ, der Wachstumsrate des Universums, die zum heutigen Zeitpunkt durch H_0[‡] charakterisiert wird, sowie auch von den Funktionen für Druck p und Energiedichte ρc^2 ab.

1.1.3 Friedmann-Gleichung

Zur vollständigen Beschreibung dieser kosmologischen Modelle benötigen wir jetzt nur noch eine Beschreibung des zeitlichen Verhaltens des Skalenfaktors $R(t)$, des Druckes $p(t)$ und der Dichte $\rho(t)$.

Einen Zusammenhang dieser Funktionen liefern die *Friedmann-Gleichungen*

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{1.15}$$

und

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \tag{1.16}$$

die wir erhalten, wenn wir die Metrik (1.4) in die Feldgleichungen (1.12) einsetzen. In der ersten Gleichung wurde gleich die *Hubblefunktion* H eingeführt.

[3] Legt man eine Metrik von der Form (1.11) zugrunde, dann erfüllt nur noch der Energie-Impuls-Tensor $T_{\alpha\beta}$ einer idealen Flüssigkeit die Feldgleichungen (1.12).

[‡] H_0 ist der heutige Wert der Hubblefunktion, die im nächsten Abschnitt eingeführt wird.

Der Druck p und die Dichte ρ können wegen der vorausgesetzten Homogenität nur noch von der Zeit, nicht aber vom Ort abhängen. Die Kombination der zwei Friedmanngleichungen ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho R^3 c^2\right) + p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R^3 = 0. \tag{1.17}$$

Diese *Adiabatengleichung* kann auch leicht anders verstanden werden. Unter der Voraussetzung, daß das Universum keine Energie und keine Teilchen mit der Umgebung austauschen kann, ergibt sich aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik für diesen Fall dieselbe Gleichung.

1.1.4 Materiemodelle

Bis jetzt besteht unser Modell vom Kosmos aus einer Metrik, deren zeitliches Verhalten wir aus den Feldgleichungen bekommen haben. Nun brauchen wir noch eine Beschreibung der Materie durch die Zustandsgleichung $p = p(\rho)$. Hierzu will ich die Energiedichte ρc^2 der Materie mit ihrem Druck p vergleichen. Für gewöhnliche Materie[4] stellt sich heraus, daß der Druck gegenüber der Energiedichte vernachlässigt werden kann. Anders sieht es dagegen für Strahlung oder relativistische Materie aus, bei der $p = \rho c^2/3$ ist. Dies können wir in Gleichung (1.17) einsetzen und erhalten

$$\begin{array}{lll} \rho(t) = R^{-3}(t)\rho_0, & p = 0 & \text{für normale Materie,} \\ \rho(t) = R^{-4}(t)\rho_0, & p = \frac{\rho c^2}{3} & \text{für relativistische Materie.} \end{array} \tag{1.18}$$

Die Energiedichte der Strahlung nimmt also schneller ab als die der nichtrelativistischen Materie und kann heute durch die 2.73K-Hintergrundstrahlung gemessen werden. Da die Hintergrundstrahlung das Spektrum eines schwarzen Strahlers hat [Mather et al. 1990], läßt sich die heutige Dichte der Strahlung mit dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz*

$$\rho_{\mathrm{rad}} = \frac{\pi^2}{15c^2}\frac{(kT_{\mathrm{rad}})^4}{(\hbar c)^3} \simeq 4.5 \times 10^{-34}\mathrm{g\ cm}^{-3} \tag{1.19}$$

berechnen. Dies gibt einen Wert, der um ca. 5 Größenordnungen unter dem Wert für die Dichte der Materie aus Tabelle (B.14) liegt. Damit ist klar, daß das Universum heute *materiedominiert* ist.

Wird allen Größen zum jetzigen Zeitpunkt der Index 0 zugewiesen, und werden die Dichteparameter $\Omega_{\mathrm{m}}^0 = \rho_0/\rho_{\mathrm{cr}} \equiv \frac{8\pi}{3}G\rho_0/H_0^2$ und $\Omega_\lambda^0 = \frac{1}{3}c^2\Lambda/H_0^2$ eingeführt, so läßt sich die 1. Friedmanngleichung als

[4] Alle nichtrelativistische Materie, die das Universum ausfüllt.

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{\Omega_\mathrm{m}^0}{R^3} - \frac{Kc^2}{R^2 H_0^2} + \Omega_\lambda^0 \right) \tag{1.20}$$

schreiben, wobei wir den Teil für nichtrelativistische Materie aus Gleichung (1.18) verwendet haben. Da H_0 als $H(t_0)$ definiert wurde und wir R mit $R(t_0) = 1$ skalieren, bekommen wir aus der Friedmanngleichung (1.20) einen Zusammenhang zwischen der Krümmung K und den Parametern Ω_m^0 und Ω_λ^0,

$$K = \left(\frac{H_0}{c} \right)^2 (\Omega_\mathrm{m}^0 + \Omega_\lambda^0 - 1). \tag{1.21}$$

Damit wird die Friedmanngleichung (1.20) zu

$$H^2(t) = H_0^2 \left[R^{-3} \Omega_\mathrm{m}^0 + R^{-2} (1 - \Omega_\mathrm{m}^0 - \Omega_\lambda^0) + \Omega_\lambda^0 \right]. \tag{1.22}$$

Da viele Ergebnisse in der Kosmologie nur in Abhängigkeit von den kosmologischen Parametern angegeben werden können, wird gerne die einheitenlose Hubblekonstante h durch

$$H_0 = 100\ h\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{sec\,Mpc}} \tag{1.23}$$

eingeführt.

Abschließend können wir die Gleichungen (1.18) benutzen, um mit den heutigen Meßwerten den Skalenfaktor auszurechnen bei dem Materie und Strahlung gleiche Dichte hatten.

$$R_\mathrm{eq} = \frac{\rho_\mathrm{rad}}{\rho_0} \simeq 2.4 \times 10^{-5} \frac{1}{\Omega_\mathrm{m}^0 h^2}. \tag{1.24}$$

1.1.5 Zusammenfassung

Ausgehend von einem materiedominiertem Universum ($p = 0$), wird der Kosmos durch die drei Parameter H_0, Ω_m^0 und Ω_λ^0 beschrieben. Die Entwicklung des Skalenfaktors $R(t)$ der Metrik wird durch die Friedmann-Gleichung (1.15) beschrieben. Das so konstruierte Modell heißt *Standarduniversum* und wird auch *Friedmann-Lemaître-Kosmologie* genannt. Den Spezialfall $\Omega_\mathrm{m}^0 = 1$ und $\Omega_\lambda^0 = 0$ bezeichnet man als *Einstein-de Sitter-Universum*.
Abschließend möchte ich nochmals alle eingeführten Größen in einer Tabelle zusammenfassen:

Parameter:		
$H_0 \equiv \dfrac{\dot{R}_0}{R_0}$	*Hubblekonstante*	
$\Omega_\mathrm{m}^0 \equiv \dfrac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0$	*Dichteparameter*	
$\Omega_\lambda^0 \equiv \dfrac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$	*kosmologische Konstante*	
Dynamik:		
$\dot{R} = H_0\sqrt{\dfrac{\Omega_\mathrm{m}^0}{R} - \Omega_\mathrm{m}^0 + 1 - \Omega_\lambda^0\left(1 - R^2\right)}$	*Friedmann-Gleichung*	(1.25)
Weitere Bezeichnungen:		
$K = \dfrac{H_0^2}{c^2}\left(\Omega_\mathrm{m}^0 - 1 + \Omega_\lambda^0\right)$	*Krümmung*	
$q_0 = \dfrac{1}{2}\Omega_\mathrm{m}^0 - \Omega_\lambda^0$	*Bremsparameter*	
$H_0 = 100\, h \dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{s\ Mpc}}$	*Einheitenlose Hubblekonstante h*	

1.2 Entfernungen

Definiert man die Entfernungen in einer gekrümmten, vierdimensionalen Raum-Zeit anhand verschiedener Meßvorschriften, so ergeben sich verschiedene Entfernungen für das selbe Objekt. Eine Möglichkeit, die es im euklidischen Raum nicht gibt, bietet uns die Expansion des Universums. Die Messung der Fluchtgeschwindigkeit entfernter Objekte mittels der Dopplerverschiebung von Spektrallinien gibt uns eine natürliche Parametrisierung aller Entfernungsmeßmethoden. Diese analog zum euklidischen Fall definierten Entfernungen werden dann als Funktion dieses Parameters eingeführt. Die Entfernungsmaße, die ich im weiteren verwenden werde, will ich in diesem Abschnitt kurz vorstellen.

1.2.1 Rotverschiebung

Als das Licht von weit entfernten Galaxien erstmals spektroskopiert wurde, stellte man im Mittel eine Verschiebung der Spektrallinien zum roten Spektralbereich hin fest. Später stellte sich heraus, daß diese mittlere Verschiebung um so größer ist, je weiter die Galaxien von uns entfernt sind [Hubble 1936]. Dies ist leicht zu erklären, wenn wir die homogene Expansion des Universums bedenken.

Betrachten wir einen Lichtstrahl, der von der mitbewegten Quelle Q zum Zeitpunkt t_e losläuft und bei einem ebenfalls mitbewegten Beobachter B zum Zeitpunkt t_o ankommt. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit einen radialen Lichtstrahl verwenden, d.h. da dann $\mathrm{d}\Omega = 0$ ist, können wir in der Metrik (1.4) das Linienelement $\mathrm{d}l$ durch das radiale Wegelement $\mathrm{d}\omega$ ersetzen. Da für Licht $\mathrm{d}s = 0$ gilt, breitet sich der Lichtstrahl mit $|c\mathrm{d}t| = R\mathrm{d}\omega$ aus. Die mitbewegte Entfernung zwischen Beobachter und Quelle ω_QB ist nach Definition konstant, und damit

$$\omega_\mathrm{QB} = \int_Q^B \mathrm{d}\omega = \int_{t_\mathrm{e}}^{t_\mathrm{o}(t_\mathrm{e})} \frac{c}{R(t)}\mathrm{d}t = \mathrm{const.} \tag{1.26}$$

Die Ableitung von ω_QB nach t_e ist daher insbesondere gleich 0,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_\mathrm{e}}\omega_\mathrm{QB} = \frac{c}{R(t_\mathrm{o})}\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{o}}{\mathrm{d}t_\mathrm{e}} - \frac{c}{R(t_\mathrm{e})} = 0. \tag{1.27}$$

Hieraus läßt sich leicht

$$\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{o}}{\mathrm{d}t_\mathrm{e}} = \frac{R(t_\mathrm{o})}{R(t_\mathrm{e})} \tag{1.28}$$

ablesen. Identifizieren wir die Zeitintervalle $\mathrm{d}t_\mathrm{o}$ und $\mathrm{d}t_\mathrm{e}$ mit reziproken Frequenzen bzw.

den Wellenlängen des Lichts, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}t_\mathrm{o}}{\mathrm{d}t_\mathrm{e}} = \frac{\nu_\mathrm{e}}{\nu_\mathrm{o}} = \frac{\lambda_\mathrm{o}}{\lambda_\mathrm{e}}. \tag{1.29}$$

Die *Rotverschiebung* z ist als relative Änderung der Wellenlängen

$$z \equiv \frac{\lambda_\mathrm{o} - \lambda_\mathrm{e}}{\lambda_\mathrm{e}} \tag{1.30}$$

definiert. Dies führt mit der Skalierung $R(t_0) = 1$ zu

$$R(t) = \frac{R_0}{1+z} = \frac{1}{1+z}. \tag{1.31}$$

Wegen der Expansion des Universums wird die Rotverschiebung auch gerne als Entfernungsmaß verwendet.

1.2.2 Laufzeitentfernung

Die Strecke $\mathrm{d}D = -c\ \mathrm{d}t$, die der Laufzeit des Lichtes entspricht wird *Laufzeitentfernung* genannt. Es ist sinnvoll, das Vorzeichen der Zeit entgegen dem der Laufzeitentfernung zu wählen, da wir in die Vergangenheit schauen, wenn wir entferntere Objekte betrachten[5]. Erweitert man

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}R}\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}R}{\dot{R}}, \tag{1.32}$$

so kann die Friedmann-Gleichung aus Tabelle 1.25 eingesetzt werden, und man erhält mit Hilfe der Ableitung von Gleichung (1.31) das Differential $\mathrm{d}R$ zu

$$\mathrm{d}R = -\frac{\mathrm{d}z}{(z+1)^2} \tag{1.33}$$

und damit die endgültige Form

$$D(z) = \frac{c}{H_0}\int_0^z \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\sqrt{\Omega_\mathrm{m}^0(\tilde{z}+1) + (1-\Omega_\mathrm{m}^0-\Omega_\lambda^0)\frac{\Omega_\lambda^0}{(\tilde{z}+1)^2}}} \tag{1.34}$$

der Laufzeitentfernung.

[5]Für einen dem Beobachter näherkommenden Lichtstrahl schreitet die Zeit voran.

1.2.3 Mitbewegte Entfernung

Unter der *mitbewegten Entfernung* verstehen wir die Koordinatenentfernung in mitbewegten Koordinaten. Für einen Lichtstrahl, den wir wieder ohne Einschränkung der Allgemeinheit als einen radialen Lichtstrahl[6] betrachten wollen, gilt $\mathrm{d}s = 0$. Benutzen wir die gleiche Notation für die Zeit wie bei der Laufzeitentfernung, so erhalten wir aus der Metrik (1.5) die Bedingung

$$\mathrm{d}\omega = -\mathrm{d}\eta, \tag{1.35}$$

wobei wir ω als die mitbewegte Entfernung definieren. Aus der Definition der konformen Zeit (1.5) folgt das Differential

$$\mathrm{d}\eta = \frac{c}{R}\mathrm{d}t = \frac{c}{R\dot{R}}\mathrm{d}R. \tag{1.36}$$

Damit können wir das Differential der mitbewegten Entfernung als

$$\mathrm{d}\omega = -\frac{c}{R\dot{R}}\mathrm{d}R = -\frac{c}{R^2 H}\mathrm{d}R \tag{1.37}$$

schreiben, wobei ich die Definition (1.15) für die Hubblefunktion eingesetzt habe. Mit der Friedmann-Gleichung aus Tabelle (1.25) kann die Hubblefunktion ersetzt werden,

$$\mathrm{d}\omega = -\frac{c}{H_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{m}}^0 R + (1-\Omega_{\mathrm{m}}^0 - \Omega_\lambda^0)R^2 + \Omega_\lambda^0 R^4}}\mathrm{d}R. \tag{1.38}$$

Die Ableitung von Gleichung (1.31) ergibt $\mathrm{d}R = -(z+1)^{-2}\mathrm{d}z$ und somit wiederum mit Gleichung (1.31) die *mitbewegte Entfernung* ω als Funktion von z:

$$\omega(z) = \frac{c}{H_0}\int\limits_0^z \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{m}}^0(\tilde{z}+1)^3 + (1-\Omega_{\mathrm{m}}^0-\Omega_\lambda^0)(\tilde{z}+1)^2 + \Omega_\lambda^0}} \tag{1.39}$$

Analytische Ausdrücke dieser Gleichung erhalten wir für die Spezialfälle:

- Einstein-de Sitter-Modell: $\Omega_{\mathrm{m}}^0 = 1$ und $\Omega_\lambda^0 = 0$:

$$\omega(z) = \frac{c}{H_0}\int\limits_0^z \frac{d\tilde{z}}{\sqrt{(\tilde{z}+1)^3}} = \frac{2c}{H_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{z+1}}\right)$$

- $\Omega_\lambda^0 = 0$:

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \frac{c}{H_0}\int\limits_0^z \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\sqrt{(\tilde{z}+1)^2(1+\tilde{z}\Omega_{\mathrm{m}}^0)}} \\ &= \frac{c}{H_0}\frac{1}{\sqrt{1-\Omega_{\mathrm{m}}^0}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{z\Omega_{\mathrm{m}}^0+1}-\sqrt{1-\Omega_{\mathrm{m}}^0}}{\sqrt{z\Omega_{\mathrm{m}}^0+1}+\sqrt{1-\Omega_{\mathrm{m}}^0}}\right) - \ln\left(\frac{1-\sqrt{1-\Omega_{\mathrm{m}}^0}}{1+\sqrt{1-\Omega_{\mathrm{m}}^0}}\right)\right]\end{aligned}$$

[6] Damit gilt $\mathrm{d}\Omega = 0$.

1.2.4 Winkelentfernung

Die *Winkelentfernung* kann analog zum euklidischen Fall als $D_\omega \equiv \sqrt{A/\alpha}$ eingeführt werden. Hierbei sind A die Fläche der Quelle und α der Raumwinkel, unter dem die Quelle erscheint. Für diese beiden Größen gilt die Beziehung:

$$\frac{\text{Fläche der Quelle}}{\text{Kugeloberfläche}} = \frac{\text{Raumwinkel der Quelle}}{\text{Raumwinkel der Kugel}} \tag{1.40}$$

Die Kugeloberfläche ist dabei die Kugeloberfläche zur Zeit der Emission des Lichtes von der Quelle bei der Rotverschiebung z. Deswegen kann die Kugeloberfläche als

$$A = 4\pi(a_\mathrm{e} r_\mathrm{e})^2 \tag{1.41}$$

geschrieben werden. Damit erhalten wir den Zusammenhang

$$\frac{A}{4\pi(a_\mathrm{e} r_\mathrm{e})^2} = \frac{\alpha}{4\pi}. \tag{1.42}$$

Bedenken wir, daß sich der Radius r_e der Kugel als die in der Metrik (1.11) eingeführte Radialkoordinate $\sin_K(\omega(z))$ schreiben läßt, können wir die Winkelentfernung D_ω als

$$D_\omega(z) = a_\mathrm{e} r_\mathrm{e} = \frac{1}{z+1}\sin_K(\omega(z)) \tag{1.43}$$

identifizieren.

1.2.5 Leuchtkraftentfernung

Im euklidischen Raum verteilt sich die Strahlungsleistung=Leuchtkraft=L einer isotrop in alle Raumrichtungen strahlenden Quelle auf die Kugeloberfläche[7] $A = 4\pi r^2$. Die von einem Beobachter in der Entfernung r gemessene Strahlungsleistung pro Flächeneinheit wird auch als Fluß S bezeichnet und ergibt sich somit zu

$$S = \frac{L}{4\pi r^2}. \tag{1.44}$$

In dem durch die Metrik (1.11) definierten Raum gilt dies jedoch nicht mehr. Berechnen wir in dieser Metrik die sich ergebende Leuchtkraft, so können wir Gleichung (1.44) als Definition der *Leuchtkraftentfernung*

$$D_\mathrm{L} \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi S}} \tag{1.45}$$

[7] Damit ist die zum jetzigen Zeitpunkt berechnete Kugeloberfläche gemeint, deswegen entfällt hier, im Gegensatz zu der Winkelentfernung, der Skalenfaktor, da wir ihn auf 1 skaliert haben.

verwenden. Die Strahlungsleistung L der Quelle bei einer Frequenz ν_e kann durch

$$L = \frac{N(\nu_\mathrm{e})h\nu_\mathrm{e}}{\Delta t_\mathrm{e}} \tag{1.46}$$

ausgedrückt werden. $N(\nu_\mathrm{e})$ bezeichnet die Anzahl der Photonen, die bei der Frequenz ν_e im Zeitintervall Δt_e emittiert werden. Für den Beobachter ergibt sich durch die Expansion des Universums eine Verschiebung der Frequenzen von ν_e nach ν_0. Weiter vergrößert sich das Eigenzeitintervall[8] für den Beobachter von Δt_e auf Δt_0. Aus der Metrik (1.11) ergibt sich die Fläche, auf die sich der Strahlungsfluß verteilt, zu $A = 4\pi \sin_K^2(\omega(z))$. Damit ist der Strahlungsfluß S_0 für den Beobachter

$$S_0 = \frac{N(\nu_\mathrm{e})h\nu_0}{\Delta t_0 4\pi \sin_K^2(\omega(z))}. \tag{1.47}$$

Dabei haben wir die vorausgesetzt, daß die Zahl der Photonen eine Erhaltungsgröße[9] ist. Identifizieren wir nun S_0 mit dem Fluß S und setzen diese Gleichung zusammen mit (1.46) in die Definition der Leuchtkraftentfernung (1.45) ein, so ergibt sich

$$D_\mathrm{L} = (1+z)\sin_K(\omega(z)). \tag{1.48}$$

Dabei ergeben sich die Terme $\frac{\nu_\mathrm{e}}{\nu_0}$ und $\frac{\Delta t_0}{\Delta t_\mathrm{e}}$ aus den Gleichungen (1.29) und (1.30) jeweils zu $(z+1)$. Vergleichen wir dieses Resultat mit der Winkelentfernung (1.43), so erhalten wir den Zusammenhang

$$D_\mathrm{L}(z) = (z+1)^2 D_\omega(z) \tag{1.49}$$

[Etherington 1933].

1.2.6 Zusammenfassung

Alle vorgestellten Entfernungsmaße ergeben sich aus Meßvorschriften. Als Konsequenz daraus ergibt sich, daß bei astrophysikalischen Problemstellungen die Entfernung bevorzugt benutzt wird, die der gemessenen Größe entspricht. Abbildung 1.1 zeigt deshalb die verschiedenen Entfernungsmaße, die ich in Tabelle (1.50) nochmals zusammengefaßt habe, im Vergleich. Um den Unterschied zu der im euklidischen Raum benutzten Entfernung nochmals zu unterstreichen, sei erwähnt, daß die Winkelentfernung im Allgemeinen nicht monoton mit der Rotverschiebung wächst, sondern bei großer Rotverschiebung wieder abnehmen kann.

---

[8] Vergleiche hierzu Gleichung (1.29)

[9] Diese Behauptung ist nicht trivial zu beweisen. Siehe hierzu [Schneider, Ehlers, Falco 1992].

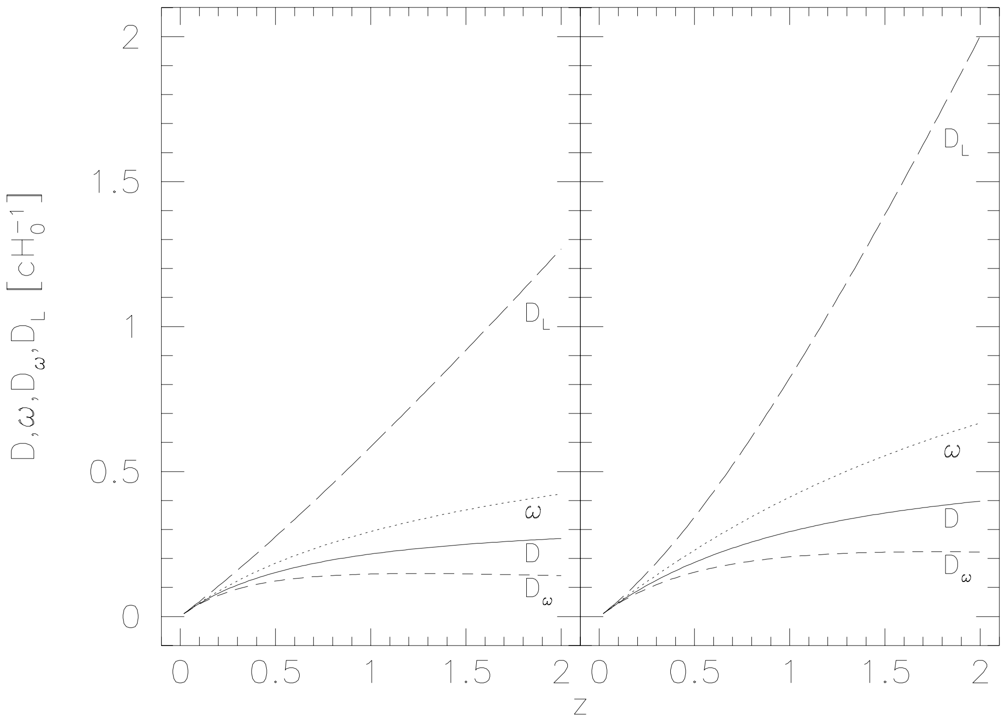


Abbildung 1.1: Entfernungsmaße für $\Omega_\mathrm{m}^0 = 1, \Omega_\lambda^0 = 0$ und für $\Omega_\mathrm{m}^0 = 0.2, \Omega_\lambda^0 = 0.8$.

Rotverschiebung	$R = \dfrac{1}{1+z}$
Laufzeitentfernung	$D(z) = \dfrac{c}{H_0} \int\limits_0^z \dfrac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\sqrt{\Omega_\mathrm{m}^0(\tilde{z}+1) + (1-\Omega_\mathrm{m}^0-\Omega_\lambda^0)\frac{\Omega_\lambda^0}{(\tilde{z}+1)^2}}}$
mitbewegte Entfernung	$\omega(z) = \dfrac{c}{H_0} \int\limits_0^z \dfrac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\sqrt{\Omega_\mathrm{m}^0(\tilde{z}+1)^3 + (1-\Omega_\mathrm{m}^0-\Omega_\lambda^0)(\tilde{z}+1)^2 + \Omega_\lambda^0}}$
Winkelentfernung	$D_\omega(z) = a_\mathrm{e} r_\mathrm{e} = \dfrac{1}{z+1} \sin_K(\omega(z))$
Leuchtkraftentfernung	$D_\mathrm{L}(z) = (z+1)^2 D_\omega(z)$

(1.50)

1.3 Materiemodelle

Die Beschreibung der Materie in unserem Universum kann in drei Teile aufgeteilt werden. Der erste ist die Entwicklung der Dichte der Materie, die auf großen Skalen homogen ist und durch Ω_m und Ω_λ beschrieben wird. Der zweite ist die Beschreibung von Abweichungen auf kleinen Skalen und deren Entstehung im frühen Universum. Der letzte Teil ist schließlich die Entwicklung dieser Fluktuationen nach der Frühphase unseres Universums.

Für die letzten beiden Punkte ist es unvermeidlich, Annahmen über die Materie, die das Universum ausfüllt, zu machen. Dies wird dadurch erschwert, daß nur ein kleiner Bruchteil der Materie, die wir aufgrund der Dynamik kosmischer Objekte vermuten, sichtbar ist. Es bleibt also die Frage, welche Zusammensetzung die restliche *dunkle Materie* hat. Eine Unterscheidung zwischen den vielen Möglichkeiten ist die zwischen *heißer* (HDM) und *kalter* (CDM) dunkler Materie. Gemeint ist damit, ob die Geschwindigkeit der Partikel groß genug ist, um die Bildung von Strukturen[10] zu unterdrücken. Dies ist der Fall, wenn die Geschwindigkeit so groß ist, daß diese Partikel in den Potentialmulden der Dichtefluktationen nicht mehr eingefangen werden können.

1.3.1 Entwicklung der Dichteparameter

In einem materiedominierten Universum ergibt sich aus der Zeitentwicklung der Hubblefunktion (1.22) die Zeitentwicklung des Dichteparameters $\Omega_\mathrm{m} = \frac{8\pi}{3} G\rho/H^2$ und der kosmologischen Konstante $\Omega_\lambda = \frac{1}{3} c^2 \Lambda/H^2$. Eingesetzt erhält man die Gleichungen

$$\Omega_\mathrm{m}(a) = \frac{\Omega_\mathrm{m}^0}{a + \Omega_\mathrm{m}^0(1-a) + \Omega_\lambda^0(a^3 - a)} \tag{1.51}$$

und

$$\Omega_\lambda(a) = \frac{\Omega_\lambda^0 a^3}{a + \Omega_\mathrm{m}^0(1-a) + \Omega_\lambda^0(a^3 - a)}. \tag{1.52}$$

Diese Gleichungen belegen, daß sich unabhängig von den heutigen Werten von Ω_m^0 und Ω_λ^0 das frühe Universum als Einstein-de Sitter-Modell mit $\Omega_\mathrm{m} = 1$ und $\Omega_\lambda = 0$ beschreiben läßt.

[10] Je kälter die dunkle Materie ist, desto mehr kleine Strukturen können gebildet werden.

1.3.2 Dichtefluktuationen

Ein geeigneter Weg, die lokalen Abweichungen von der homogenen Dichte zu beschreiben, beginnt mit der Einführung des *Dichtekontrastes*

$$\delta = \frac{\rho - \langle\rho\rangle}{\langle\rho\rangle}. \tag{1.53}$$

Dieser läßt sich statistisch als Zufallsfeld behandeln. Da diese Fluktuationen laut Theorie möglicherweise aus Quantenfluktuationen beim Urknall entstanden sind, können wir für sie ein Gaußsches Zufallsfeld[11] annehmen. Diese werden dann in einer möglichen inflationären Phase[12] des Universums durch das exponentielle Anwachsen der Skalen stark gestreckt, bevor sich durch Eigengravitation die Strukturen bilden, die wir heute beobachten können. Dieses Gaußsche Zufallsfeld wird durch den Mittelwert $\langle\delta\rangle = 0$ und die Standardabweichung $\langle\delta^2\rangle$ vollständig beschrieben.

Die Standardabweichung der Dichtefluktuationen charakterisiert man gebräuchlicherweise durch ihr *Powerspektrum* $P_\delta(k)$, das durch

$$\left\langle \hat{\delta}(\vec{k})\hat{\delta}^*(\vec{k}')\right\rangle = (2\pi)^3 P_f(k)\delta^\ddagger(\vec{k}-\vec{k}') \tag{1.54}$$

mit den Fluktuationen δ bzw. deren Fouriertransformierten $\hat{\delta}(\vec{k})$ verknüpft ist. Die Wellenzahl k entspricht dem Inversen der Wellenlänge der Dichtefluktuation; dementsprechend beschreiben wir die Größe einer Dichtefluktuation im weiteren durch k^{-1}. Genaugenommen gilt die Fouriertransformation nur in flachen Räumen, doch solange die Skalen k^{-1} wesentlich kleiner als der Krümmungsradius des Raumes sind, können wir die Fouriertransformation benutzen. Eine analytische Darstellung dieses Spektrums kann aus Störungsrechnungen zusammen mit einigen plausiblen Annahmen gewonnen werden, z.B. [Bardeen et al. 1986]. Eine mathematische Beschreibung des Wachstums von δ in der Frühphase des Universums, in dem die Größe der Dichtefluktuationen vergleichbar dem oder größer als der Horizont [13] sind, kann nicht vollständig in kurzer Form gegeben werden. Deswegen werde ich mich an dieser Stelle mit der Präsentation der Ergebnisse begnügen. Für tiefergehende Studien empfehle ich Kapitel 4 des Buches von Padmanabhan ([Padmanabhan 1993]).
In der Frühzeit des Universums gibt es zwei für das Wachstum der Dichtefluktuationen charakteristische Zeitskalen. Die erste ist die Zeit t_{ent}, bei der die Fluktuationen in den

[11] Dies folgt mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.

[12] Diese Phase kann durch $\ddot{R} > 0$ beschrieben werden.

‡ Damit ist das Dirac-δ gemeint.

[13] Damit ist die Entfernung $\int_0^t c d\tilde{t}$ gemeint, die das Licht seit dem Urknall zurücklegen konnte.

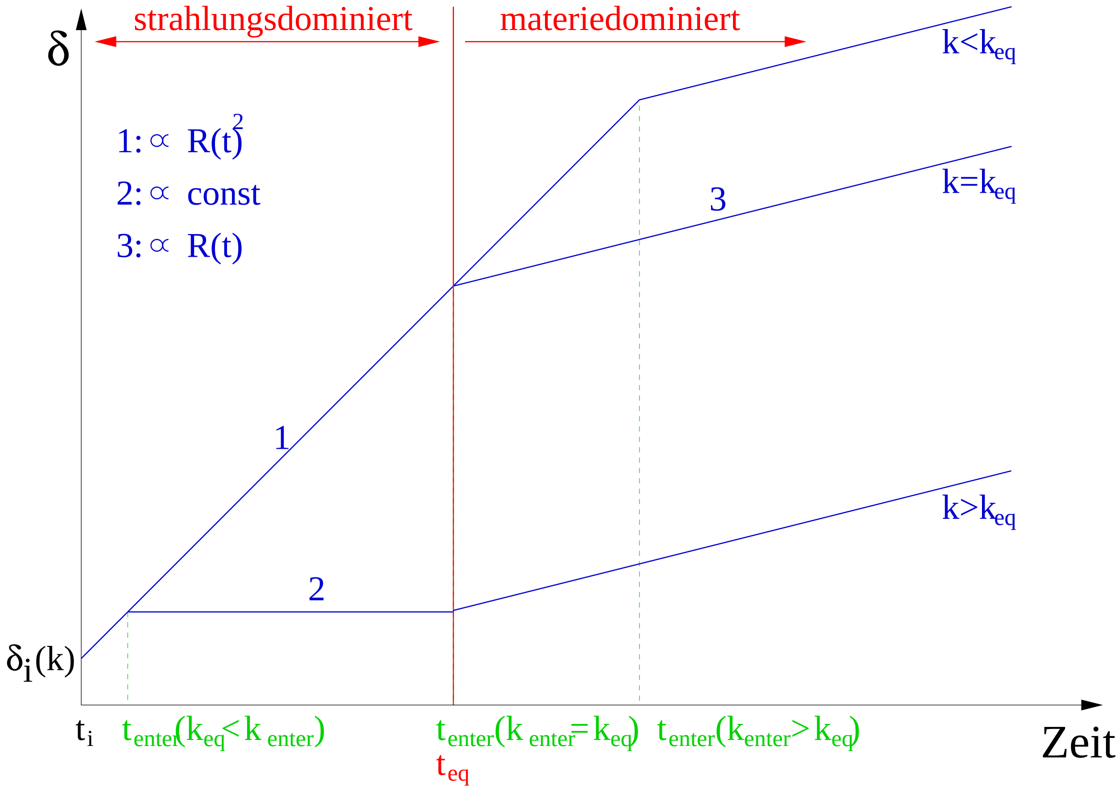


Abbildung 1.2: Darstellung des Wachstums einer anfänglichen Fluktuationen $\delta_i(k)$ in Abhängigkeit ihrer Größe k^{-1}. Bereich 1 zeigt das Wachstum, falls die Fluktuation erst nach der Gleichgewichtszeit $t_{\rm eq}$ in den Horizont eintritt. Bereich 2 zeigt die Unterdrückung der Fluktuation, wenn sie schon früh in der strahlungsdominierten Phase in den Horizont eintritt. Bereich 3 zeigt das Wachstum nach dem Eintritt in den Ereignishorizont in der materiedominierten Phase.

Horizont eintreten. Dies ist dann der Fall, wenn die Größe der Dichtefluktuation der Größe des Horizontes entspricht. Die zweite charakteristische Zeit $t_{\rm eq}$ ist die, bei der Gleichgewicht zwischen Strahlung und Materie herrscht[14]. Lineare Störungsrechnung ergibt für die Dichtefluktuationen folgendes Verhalten in einem Einstein-de Sitter-Universum[15]:

- $\delta \propto R^2$, wenn die Dichtefluktuation noch nicht in den Ereignishorizont eingetreten ist.

- $\delta \approx$ const während der strahlungsdominierten Phase, nachdem die Fluktuation in den Ereignishorizont eingetreten ist.

[14] Vergleiche hierzu Gleichung (1.24).

[15] In Abschnitt (1.3.1) habe ich gezeigt, daß sich der frühe Kosmos immer als Einstein-de Sitter-Universum beschreiben läßt.

- $\delta \propto R$, wenn die Materie über die Strahlung dominiert und die Fluktuationen schon in den Horizont eingetreten sind.

Abbildung (1.2) verdeutlicht diese Abhängigkeit nochmals. Die Varianz $\langle\delta^2\rangle$ im Realraum läßt sich als

$$\begin{aligned}\left\langle\delta^2\right\rangle &\sim \text{Volumen im Fourierraum (= Anzahl der Moden)}\\ &\quad \times \text{Varianz im Fourierraum} \left(\left\langle\delta_k^2\right\rangle \propto P_k\right)\\ &\sim k^3\left\langle\hat{\delta}(\vec{k})\right\rangle = k^3 P_\delta(k) \end{aligned} \tag{1.55}$$

schreiben, und so ergibt sich zu einem frühen Zeitpunkt i

$$\left\langle\delta_{(i)}^2\right\rangle \approx k^3 P_\delta^{(i)}(k). \tag{1.56}$$

Betrachten wir Fluktuationen mit kleinen Wellenvektoren k, so wachsen diese anfänglichen Fluktuationen $\delta_{(i)}$ nach obiger Betrachtung[16] proportional zum Quadrat des Skalenfaktors[17], und damit ist

$$\delta_{\mathrm{ent}} = R^2(t_{\mathrm{ent}})\delta_{(i)}. \tag{1.57}$$

Der Zusammenhang zwischen der Wellenlänge λ der Störung und dem Zeitpunkt t_{ent}, zu dem sie in den Horizont eintritt, ist durch den Zusammenhang $ct_{\mathrm{ent}} = \lambda$ gegeben. Setzen wir dies in die Gleichung (1.57) ein, dann erhalten wir

$$\delta_{\mathrm{ent}} = k^{-2}(t_{\mathrm{ent}})\delta_{(i)}. \tag{1.58}$$

Weiter gehen wir von folgender Annahme aus: „*Die in Fluktuationen enthaltene Masse innerhalb des Horizontes $\langle\delta_{\mathrm{ent}}^2\rangle$ ist unabhängig von t.*“. Diese Behauptung kann nicht bewiesen werden. Man kann sie jedoch plausibel machen, in dem man andere Ansätze aufgrund von physikalischen Überlegungen ausschließt. Dies werde ich an zwei Möglichkeiten verdeutlichen.

- Als erstes Beispiel möchte ich einen Exponentialansatz diskutieren. Wäre $\langle\delta_{\mathrm{ent}}^2\rangle \propto \exp(t/t_{\mathrm{skala}})$, dann gäbe es noch eine dritte Zeitskala t_{skala}. Dafür ist uns kein physikalischer Grund bekannt, und es gibt auch keine Beobachtungen, die eine derartige Zeitskala vermuten lassen.

[16] Bereich 1 von Abbildung (1.2)

[17] Der Skalenfaktor $R(t_{\mathrm{ent}})$ ist proportional zur Wellenlänge λ, und damit ist $R(t_{\mathrm{ent}}) \propto \lambda \propto \frac{1}{k}$.

- Um keine neue Zeitskala einzuführen, könnten wir einen skalenfreien Potenzansatz machen. Wäre $\langle\delta^2_{\rm ent}\rangle \propto t^\alpha$, dann wäre für $\alpha < 0$ die ganze Materie in Fluktuationen im Universum in den kleinen Skalen und damit schon früh in den Horizont eingetreten. Dies hätte das entstehende Universum sofort wieder kollabieren lassen. Für $\alpha > 0$ jedoch würde immer mehr Masse in den Störungen sitzen, die gerade in den Horizont eintreten. Dies wäre mit der Isotropie und Homogenität auf großen Skalen nicht verträglich.

Damit ist $\langle\delta^2_{\rm ent}\rangle$ unabhängig von t, und somit auch unabhängig von k. Aus Gleichung (1.58) erhalten wir dann unmittelbar $\delta^2_{(i)} \propto k^4$, und eingesetzt in Gleichung (1.56) ergibt sich

$$P_\delta^{(i)} \propto k^4 k^{-3} = k, \tag{1.59}$$

das *Harrison-Zel'dovich-Spektrum* [Harrison 1970],[Peebles, Yu 1970],[Zel'dovich 1972].

Auf kleinen Skalen (= große k) spielt die Zusammensetzung der dunklen Materie eine wichtige Rolle. Die Fluktuationen mit großem $k_{\rm ent}$ treten sehr früh in den Horizont ein und werden dann während der strahlungsdominierten Phase $\propto k^{-2}$ relativ zu großen Skalen (= kleine k) unterdrückt (Phase 2 in Abbildung (1.2)). Damit erhalten wir im Limes für $k \to \infty$ den Zusammenhang

$$P_\delta^{(i)}(k \to \infty) \propto k^{-4} P_\delta^{(i)} = k^{-3}. \tag{1.60}$$

Für CDM erhalten wir zusammengefaßt

$$P_\delta^{\rm CDM}(k) \propto \left\{ \begin{array}{ll} k & k \ll k_{\rm eq} \\ k^{-3} & k \gg k_{\rm eq} \end{array} \right. . \tag{1.61}$$

Für HDM-Modelle haben die Partikel der dunklen Materie größere Geschwindigkeiten. Damit werden kleine Fluktuationen sogar noch weiter am Wachstum gehindert, so daß das Powerspektrum für große k exponentiell abfällt. Für CDM und HDM läßt sich dieser Verlauf als

$$P_\delta^{\rm CDM}(k) = A_{\rm CDM}\, k \frac{k_{\rm eq}^4}{(k^2 + k_{\rm eq}^2)^2} \tag{1.62}$$

und

$$P_\delta^{\rm HDM}(k) = A_{\rm HDM}\, k \exp{(-\frac{k}{k_{\rm eq}})}, \tag{1.63}$$

realisieren. Dabei ist $k_{\rm eq}$ die inverse Wellenlänge der Störung, die zum Zeitpunkt des Gleichgewichts von Strahlung und Materie in den Horizont eintritt. Diese Wellenlänge läßt sich als

$$\lambda_{\rm eq} = \frac{ct_{\rm eq}}{R_{\rm eq}} \tag{1.64}$$

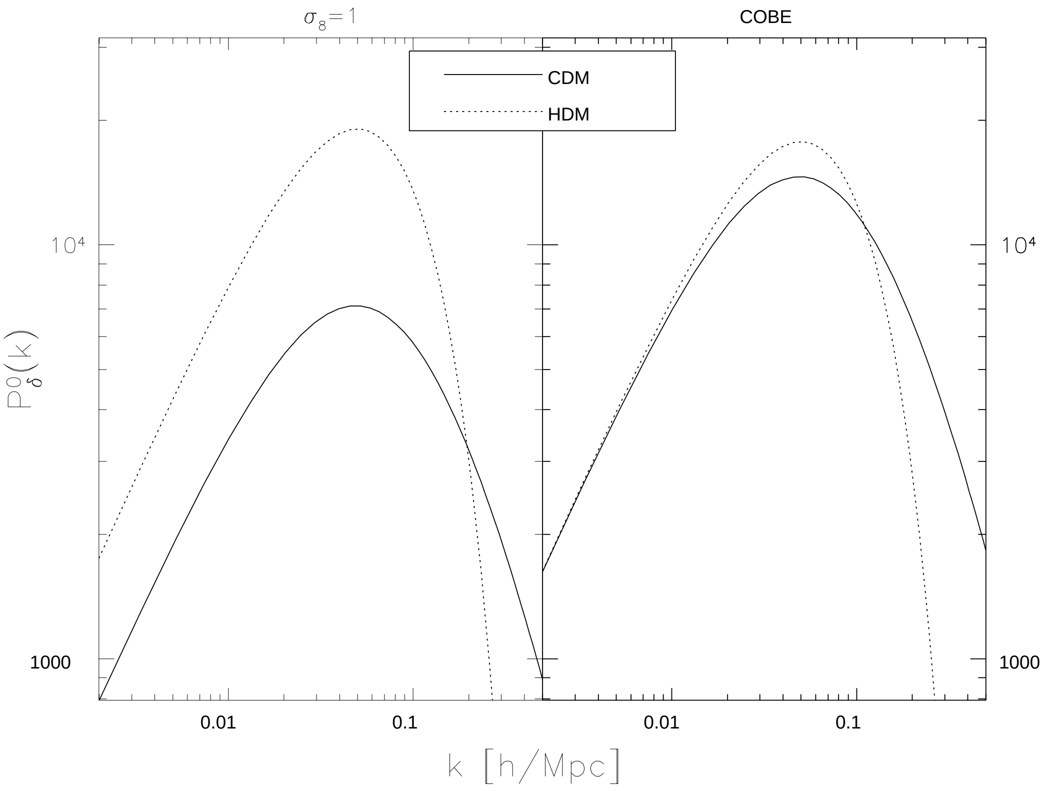


Abbildung 1.3: Darstellung verschiedener Spektren: Links $\sigma_8 = 1.0$, rechts COBE. Die durchgezogenen Linien sind jeweils CDM, die gestrichelten HDM. Weiter wurde $h = 0.5$, $\Omega_\mathrm{m}^0 = 1$ und $\Omega_\lambda^0 = 0$ benutzt. Der Wert für σ_8 bei der Cobenormierung von CDM wäre 2.86, bei einer Normierung nach der Clusterhäufigkeit wäre der Wert für σ_8 gleich 0.5.

schreiben. Der Zeitpunkt t_eq ist sehr früh, so daß noch $R \ll 1$ und damit $\Omega_\mathrm{m} \simeq 1$ gilt[18]. In diesem Fall vereinfacht sich die Friedmanngleichung (1.22) zu

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2 = H^2(t) = H_0^2 \Omega_\mathrm{m}^0 R^{-3}(t). \tag{1.65}$$

Für den Zeitpunkt des Gleichgewichts zwischen Materie und Strahlung gilt der Zusammenhang

$$t_\mathrm{eq} = \int\limits_0^{t_\mathrm{eq}} \mathrm{d}t = \int\limits_0^{R_\mathrm{eq}} \frac{\mathrm{d}R}{\dot{R}(t)} = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\mathrm{m}^0}} R_\mathrm{eq}^{\frac{3}{2}}, \tag{1.66}$$

wobei ich Gleichung (1.32) verwendet habe. Dies können wir nun zusammen mit R_eq aus

[18]siehe hierzu Abschnitt (1.3.1)

Gleichung (1.24) in Gleichung (1.64) einsetzen und erhalten

$$k_{\rm eq} = \frac{1}{\lambda_{\rm eq}} \simeq 0.1\; h\Omega^0_{\rm m} \frac{h}{\rm Mpc}. \tag{1.67}$$

Somit bleibt nur noch die Amplitude als Parameter übrig. Diese kann auf mehrere Weisen gemessen werden:

- Aus Zählungen von Galaxien auf einer festgelegten Skala: Hier wird gerne eine Sphäre mit $R = 8h^{-1}$Mpc genommen, da dort ursprünglich $\sigma_8 = 1^{\ddagger}$ gemessen wurde.

- Messungen der Häufigkeit von Galaxienhaufen ergeben allerdings einen etwas anderen Wert für σ_8. Eke et al. ([Eke,Cole,Frenk 1996]), Viana et al. ([Viana, Liddle 1996]) und Pen et al. ([Pen 1996]) geben leicht verschiedene Werte an, die jedoch in ihren Fehlergrenzen miteinander kompatibel sind. Ich habe die Näherungsformeln von Eke et al. für σ_8 in verschiedenen kosmologischen Modellen verwendet. Diese lauten

  $$\sigma_8 = (0.50)\Omega^0_{\rm m}{}^{-0.47+0.10\Omega^0_{\rm m}} \qquad \text{für} \quad \Omega^0_\lambda = 0, \tag{1.68}$$

  und

  $$\sigma_8 = (0.50)\Omega^0_{\rm m}{}^{-0.53+0.13\Omega^0_{\rm m}} \qquad \text{für} \quad \Omega^0_{\rm m} + \Omega^0_\lambda = 1. \tag{1.69}$$

- Aus der Messung der Anisotropie der Hintergrundstrahlung durch COBE[19].

Der Unterschied in den Normierungen besteht darin, bei welcher Skala die Normierung gemessen wird. Durch die Messung der Hintergrundstrahlung mißt COBE wegen seiner begrenzten Winkelauflösung nur sehr große Strukturen zum Zeitpunkt der Entkopplung von Materie und Strahlung. Die Normierung anhand der Häufigkeit von Galaxienhaufen dagegen mißt eher die „kleinen“ Strukturen.

Dr. Tsafrir Kolatt[20], dem ich an dieser Stelle herzlich danken möchte, hat mir ein Programm zur Verfügung gestellt, welches das Powerspektrum für verschiedenste Modelle und Normierungen berechnet. Eine Zusammenfassung dieser Modelle findet sich im Anhang (B.1) in Tabelle (B.1).

Abbildung (1.3) zeigt diese Modellspektren für verschiedene Normierungen. Wie deutlich zu sehen, ist es nicht möglich, das CDM-Spektrum zugleich für $\sigma_8 = 1$ und COBE zu normieren.

[‡] $\sigma_R^2 = \int \mathrm{d}^3k\; P(k)\; W_R^2(k)$ mit $W_R = \frac{j_1(kR)}{kR}$ und der sphärischen Besselfunktion j_1.

[19] **CO**smic microwave **B**ackground **E**xplorer

[20] Dr. Kolatt arbeitet an der Universität von Kalifornien in Santa Cruz und an der Hebräischen Universität in Jerusalem.

1.3.3 Entwicklung der Dichtefluktuationen

Mit der Expansion des Universums expandieren auch die Fluktuationen. Ist nun a nicht mehr klein, so kann das Universum nicht mehr in jedem Fall als Einstein-de Sitter-Kosmos beschrieben werden. In diesem Fall wird das Wachstum der Fluktuationen gebremst[21]. Im linearen Fall, d.h. wenn man von dem Wachstum aufgrund der Eigengravitation nur den linearen Anteil berücksichtigt, kann dieses durch

$$\delta(a) = a\, g(a)\, \delta_0 \tag{1.70}$$

beschrieben werden. Carrol et al. ([Carroll, Press, Turner 1992]) geben für $g(a)$ die Näherungsformel

$$g(a) = \frac{5}{2}\Omega_{\mathrm{m}}(a)\left[\Omega_{\mathrm{m}}^{\frac{4}{7}}(a) - \Omega_\lambda(a) + \left(1 + \frac{\Omega_{\mathrm{m}}(a)}{2}\right)\left(1 + \frac{\Omega_\lambda(a)}{70}\right)\right]^{-1} \tag{1.71}$$

an. Die Abhängigkeit von Ω_{m} und Ω_λ von dem Skalenfaktor a wird durch die Gleichungen (1.51) und (1.52) beschrieben. Wenn wir das heutige Powerspektrum der Fluktuationen $P_\delta^0(k)$ linear auf die frühere Zeit abbilden, dann erhalten wir

$$P_\delta(k, a) = [a\, g(a)]^2 P_\delta^0(k). \tag{1.72}$$

N-Teilchen-Simulationen haben gezeigt, das diese lineare Entwicklung nur für ausreichend kleine k richtig ist. Sowohl Jain et al. ([Jain, Mo, White 1996]) als auch Peacock und Dodds ([Peacock, Dodds 1996]) haben aus ihren Simulationen eine Korrektur berechnet, um das linear entwickelte Spektrum auf das nichtlineare Spektrum abzubilden. Zuerst wird das *dimensionslose Powerspektrum*

$$\Delta_{\mathrm{l}}(k) = 4\pi k^3 P_\delta(k) \tag{1.73}$$

berechnet. Bei der nichtlinearen Entwicklung muß man berücksichtigen, daß die Moden der Dichtefluktuationen durch den k-Raum wandern. Beide Gruppen verwendeten den Ansatz von Hamilton et al. ([Hamilton, Kumar, Lu, Matthews 1991]), daß der Zusammenhang zwischen einer anfänglichen Mode k und deren Wellenzahl k_{nl} nach der nichtlinearen Entwicklung durch

$$k_{\mathrm{nl}} = k\,[1 + \Phi(\Delta_{\mathrm{l}}(k))]^{\frac{1}{3}} \tag{1.74}$$

gegeben sei. Dabei ist die zentrale Annahme, daß es sich bei Φ um eine universelle Funktion handle. Mit dieser Funktion Φ läßt sich auch das dimensionslose, nichtlinear entwickelte Powerspektrum Δ_{nl} als

$$\Delta_{\mathrm{nl}}(k_{\mathrm{nl}}) = \Phi(\Delta_{\mathrm{l}}(k)) \tag{1.75}$$

[21] Wir verlassen somit Phase 3 von Abbildung (1.2).

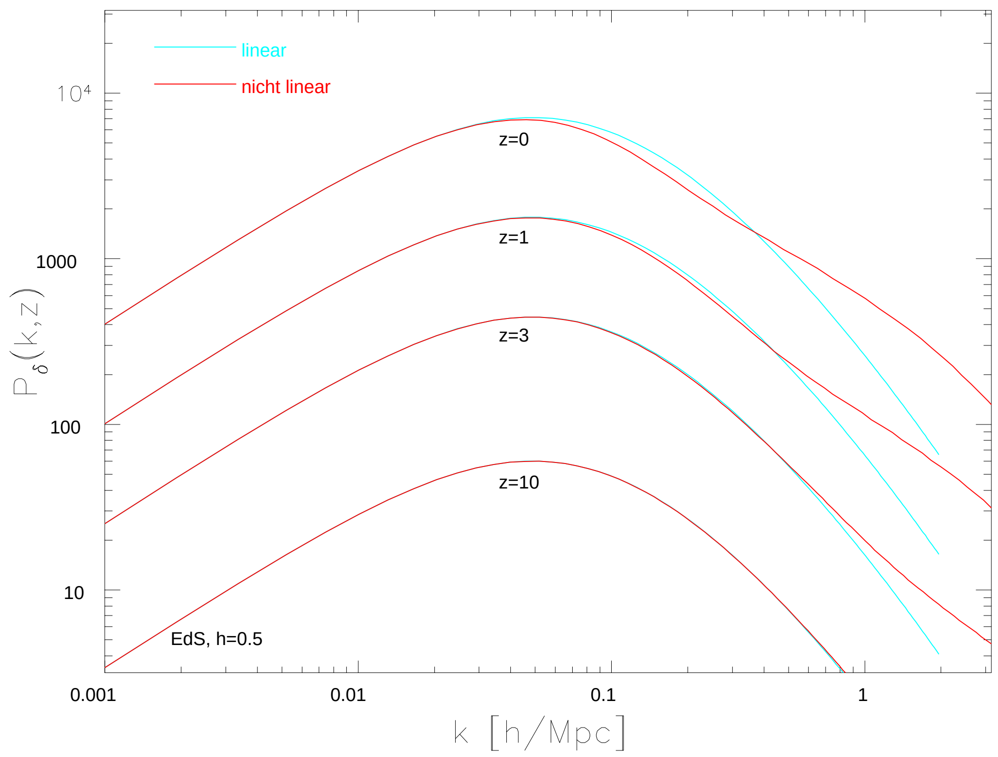


Abbildung 1.4: Vergleich der linearen und nichtlinearen Entwicklung für ein CDM-Spektrum. Weiter wurde $\sigma_8 = 1.0$, $h = 0.5$, $\Omega^0_{\mathrm{m}} = 1$ und $\Omega^0_\lambda = 0$ benutzt.

ausrechnen. Durch Invertierung von Gleichung (1.73) erhalten wir den endgültigen Ausdruck für $P_\delta(k)$ im nichtlinearen Fall.
Die universale Funktion Φ wird als

$$\Phi(x) = x \left[\frac{1 + B\beta x + [A\, x]^{\alpha\beta}}{1 + \left([A\, x]^\alpha g^3(\Omega)[V\sqrt{x}]\right)^\beta} \right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{1.76}$$

angegeben, mit den Parametern

$A = 0.482 \left(1 + \frac{n}{3}\right)^{-0.947}$
$B = 0.226 \left(1 + \frac{n}{3}\right)^{-1.778}$
$\alpha = 3.310 \left(1 + \frac{n}{3}\right)^{-0.224}$
$\beta = 0.862 \left(1 + \frac{n}{3}\right)^{-0.287}$
$V = 11.55 \left(1 + \frac{n}{3}\right)^{-0.423}$

und $n(k)$, welches die *effektive Potenz* des linear entwickelten Powerspektrums bei der

Wellenzahl $k/2$ ist,

$$n(k) = \left.\frac{\mathrm{d}\ln(P_\delta(\tilde{k}))}{\mathrm{d}\ln(\tilde{k})}\right|_{\tilde{k}=\frac{k}{2}} . \tag{1.77}$$

Diese Näherung versagt jedoch an den Stellen, an denen $n(k)$ für ein Spektrum kleiner als -3 wird. Dies tritt bei den CDM-Spektren nicht auf, jedoch lassen sich so die HDM-Spektren in der nichtlineren Entwicklung nicht für alle benötigten k-Werten berechnen. Deswegen habe ich für HDM-Spektren auf das analytische Ergebnis für die nichtlineare Entwicklung von [Schneider, Bartelmann 1995] zurückgegriffen.

1.3.4 Zusammenfassung

In diesen Abschnitt habe ich eine Beschreibung der Materie, die unseren Kosmos ausfüllt, vorgestellt. Ausgegangen sind wir dabei von einer homogenen und isotropen Beschreibung der Materie in unserem Universum, dem wir kleine Dichtefluktuationen hinzugefügt haben. Weiter haben wir dann betrachtet, wie sich diese Störungen bis zum heutigen Zeitpunkt entwickeln. Im wesentlichen läßt sich dieses Modell durch drei Eigenschaften beschreiben.

- Die Gleichungen (1.51) und (1.52) beschreiben die zeitliche Entwicklung der Parameter Ω_m und Ω_λ des homogenen Ausgangsmodells.

- Die inhomogene Verteilung der Materie im Universum wird durch das Powerspektrum (1.62) und (1.63) beschrieben, je nach Art der nicht sichtbaren Materie.

- Die Entwicklung dieser Inhomogenitäten wird durch Gleichung (1.72) in einer vereinfachten Weise, bzw. durch Gleichung (1.75) in einer etwas allgemeineren Art beschrieben. Die nichtlineare Entwicklung für HDM-Spektren wird durch die Gleichungen von [Schneider, Bartelmann 1995] beschrieben.

1.4 Lichtablenkung

Um ein vollständiges Bild davon zu bekommen, wie sich Licht im Universum ausbreitet, müssen zwei Dinge beachtet werden. Erstens wird das Licht aufgrund der Geometrie des Raumes abgelenkt. Zweitens wird das Licht auf seinem Weg von der Quelle zum Beobachter an den lokalen Dichtefluktuationen abgelenkt. Diese zwei Effekte geschehen auf sehr unterschiedlich großen Längenskalen, so daß sich beide einfach zu einer Bewegungsgleichung addieren lassen. Die Lösung dieser Bewegungsgleichung zeigt uns dann, wie sich Lichtstrahlen durch unser Universum ausbreiten.

1.4.1 Ausbreitung des Lichts im Universum

In unserer Vorstellung vom Universum betrachten wir dieses auf großen Skalen als homogen und isotrop. Seitz et al. haben in ([Seitz, Schneider, Ehlers 1994]) die Gleichung für die Ausbreitung zweier Lichtstrahlen in einem isotropen Universum wie folgt zusammengefaßt:

$$\ddot{\vec{\xi}} = T\vec{\xi}, \tag{1.78}$$

wobei $\vec{\xi}$ der Abstandsvektor der beiden Lichtstrahlen und

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{R} - \mathrm{Re}(\mathcal{F}) & \mathrm{Im}(\mathcal{F}) \\ \mathrm{Im}(\mathcal{F}) & \mathcal{R} + \mathrm{Re}(\mathcal{F}) \end{pmatrix} \tag{1.79}$$

die „*optische Gezeitenmatrix*" ist. Dabei ist zu beachten, daß $\vec{\xi}$ als die physikalische Strecke zwischen den beiden Lichtstrahlen und die Punkte als Ableitungen nach dem affinen Parameter λ zu verstehen sind. In einem isotropen Universum mit einer Robertson-Walker-Metrik habe ich Gleichung (1.78) auf die Form

$$\frac{1}{R^4}\frac{\mathrm{d}^2\xi_i}{\mathrm{d}\omega^2} + \frac{2H}{cR^3}\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{3H_0^2\Omega_{\mathrm{m}}^0}{2c^2R^5}\xi_i \tag{1.80}$$

gebracht. Dies wird in Anhang (A.1) ausführlich beschrieben.

Weiter habe ich jetzt noch den Abstand der beiden Lichtstrahlen, wie in Anhang (A.2) beschrieben, auf die *mitbewegte Entfernung* zu transformieren und erhalte so die Oszillatorgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}\omega^2} + Kx_i = 0, \tag{1.81}$$

wobei sich K aus Tabelle (1.25) entnehmen läßt. Die Lösungen dieser Differentialgleichung haben die Form

$$x(\omega) = \begin{cases} A\sin\left(\sqrt{K}\omega\right) + B\cos\left(\sqrt{K}\omega\right) & K > 0 \\ A\omega + B & K = 0 \\ A\sinh\left(\sqrt{|K|}\omega\right) + B\cosh\left(\sqrt{|K|}\omega\right) & K < 0 \end{cases} . \tag{1.82}$$

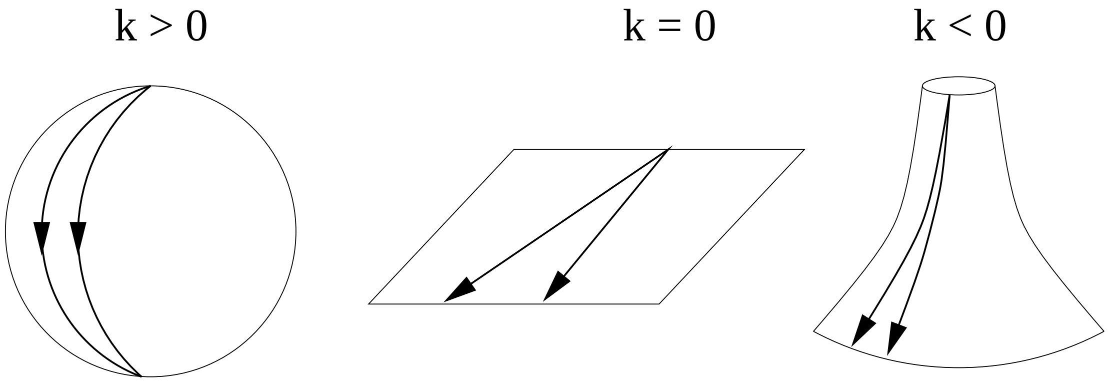


Abbildung 1.5: Ausbreitung zweier Lichtstrahlen im geschlossenen ($K > 0$), flachen ($K = 0$) und offenen ($K < 0$) Universum

Die Abbildung (1.5) illustriert die unterschiedliche Ausbreitung von Licht für verschiedene Krümmungsparameter. Im geschlossenen Universum treffen zwei Lichtstrahlen, die unter einem beliebigen Winkel loslaufen, irgendwann wieder aufeinander. In einem flachen Universum laufen sie stetig unter dem gleichen Winkel auseinander, während sie in einem offenen Universum unter einem stets anwachsenden Winkel divergieren. Aus Tabelle (1.25) kann der Zusammenhang zwischen der Raumkrümmung K und den Dichteparametern Ω_{m}^0 und Ω_λ^0 abgelesen werden.

1.4.2 Ablenkung des Lichts durch Dichtefluktuationen

Wie bereits besprochen, existieren auf kleinen Skalen Dichtefluktuationen, die durch ihr Gravitationspotential die Ausbreitung des Lichts beeinflussen. Aus den Feldgleichungen erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{x}} = -2\nabla_\perp \phi(\vec{x}, t), \tag{1.83}$$

die wir bis auf den Faktor 2 auch aus der Newtonschen Gravitationslehre erhalten würden. Dabei bezeichnet $\vec{x}$ den Abstand zwischen einem Lichtstrahl, der sich ungestört ausbreitet, und einem Lichtstrahl, der durch Dichtefluktuationen gestört wird. Abbildung (1.6) zeigt dies noch einmal etwas detaillierter. Nun kann ich die Bewegungsgleichung (1.83) auf

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}}{\mathrm{d}\omega^2} = -\frac{2}{c^2}\nabla_\perp \phi(\vec{\omega}, \eta) \tag{1.84}$$

umformen. Dies ist möglich, da lokal die Transformation $\frac{d}{dt} = -\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}$ nur den Faktor c ergibt. Da diese Beeinflussung des Lichts auf sehr viel kleineren Skalen stattfindet, als die im vorigen Kapitel betrachteten Zusammenhänge, kann ich dies einfach durch Hinzufügen

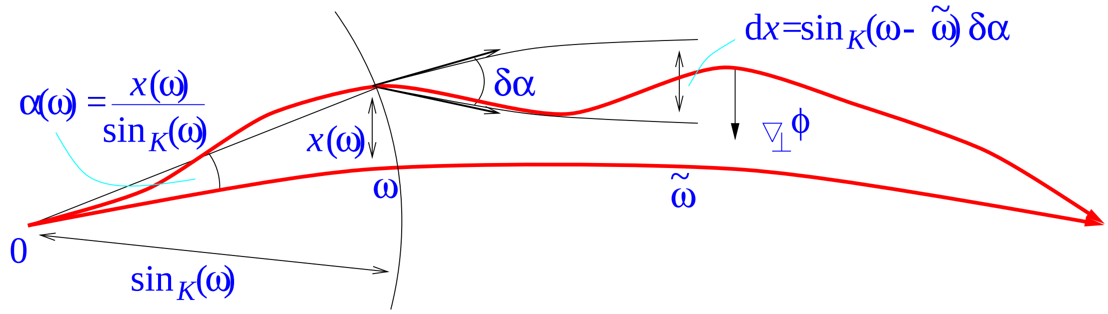


Abbildung 1.6: Ablenkung eines Lichtstrahls an Fluktuationen relativ zur Sichtlinie, die, um die Krümmung des Raumes zu verdeutlichen, auch gekrümmt dargestellt ist.

eines Inhomogenitätsterms in Gleichung (1.81) berücksichtigen. Die Differentialgleichung 2. Ordnung, die sich daraus ergibt, hat die Form

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(\vec{\omega},\eta)}{\mathrm{d}\omega^2} + K\ \vec{x}(\vec{\omega},\eta) = -\frac{2}{c^2}\nabla_\perp\phi(\vec{\omega},\eta). \tag{1.85}$$

Diese Differentialgleichung beschreibt den Abstand zweier Lichtstrahlen, die sich im Universum ausbreiten, von denen nur einer von den Dichtefluktuationen beeinflußt wird. Somit beschreibt sie den Unterschied in der Position eines Lichtstrahls, der von den Fluktuationen abgelenkt wird, zu der Position, die er haben würde, wenn es keine Fluktuationen gäbe. Gleichung (1.85) wird in Komponentenschreibweise zu

$$\frac{\mathrm{d}x_j(\vec{\omega},\eta)}{\mathrm{d}\omega^2} + K\ x_j(\vec{\omega},\eta) = -\frac{2}{c^2}\phi_{,j}(\vec{\omega},\eta). \tag{1.86}$$

Als Randbedingungen für diese Differentialgleichung wählen wir $x(0) = 0$ (die zwei Lichtstrahlen starten vom gleichen Punkt) und $\frac{\partial x}{\partial\omega}(0) = 0$ (die Lichtstrahlen laufen in die gleiche Richtung los). Für ϕ gilt die Potentialgleichung

$$\Delta\phi = 4\pi G\varrho R^2 = 4\pi G\bar{\varrho}R^2\delta. \tag{1.87}$$

Die mittlere Dichte ergibt sich aus dem Ergebnis der Adiabatengleichung (1.17) mit der Tabelle (1.25) zu

$$\bar{\varrho} = R^{-3}\bar{\varrho}_0 = \frac{3H_0^2\Omega_\mathrm{m}^0}{8\pi G R^3} \tag{1.88}$$

Damit wird Gleichung (1.87) zu

$$\Delta\phi = \frac{3H_0^2\Omega_\mathrm{m}^0}{2R}\delta \tag{1.89}$$

1.4.3 Lösung der Bewegungsgleichung

Die allgemeine Lösung kann mittels der Greensfunktion aus der homogenen Lösung (1.82) konstruiert werden (Bronstein, Seite 453ff). Dies wird in Anhang (A.3) durchgeführt. In unserem Fall ist die Inhomogenität $f_i(\omega) = -\frac{2}{c^2}\phi(\vec{\omega},\eta)_{,i}$. Eingesetzt in Gleichung (A.24) und mit der Greensfunktion (A.23) ergibt sich die Lösung als:

$$x_i(\vec{\omega}) = -\frac{2}{c^2}\int\limits_0^\infty \phi(\vec{\omega},\eta)_{,i} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\left(\sqrt{K}\,(\omega-\tilde{\omega})\right) & K>0 \\ \omega-\tilde{\omega} & K=0 \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}}\sinh\left(\sqrt{|K|}\,(\omega-\tilde{\omega})\right) & K<0 \end{array} \right\} \mathrm{d}\tilde{\omega} \tag{1.90}$$

1.4.4 Ablenkwinkel für radiale Lichtstrahlen

In unserem Fall läßt sich Gleichung (1.90) als

$$\Delta x_i(\vec{\omega}) = -\frac{2}{c^2}\int\limits_0^\omega \sin_K(\omega-\tilde{\omega})\phi_{,i}(\vec{\omega},\eta)\mathrm{d}\tilde{\omega} \tag{1.91}$$

schreiben, wobei ich auf die Funktion $\sin_K(x)$ aus Gleichung (1.10) zurückgegriffen habe und Δr_i den Abstandsvektor der beiden Lichtstrahlen, der auf die Sphäre des Beobachters projiziert wird, darstellt. Betrachtet man den Winkel, den die beiden Lichtstrahlen einschließen, wenn der Beobachter in eine Richtung $\vec{\theta}$ blickt, dann erhält man den Winkel α

$$\alpha_i(\vec{\theta},\omega) = \frac{\Delta x_i(\vec{\omega})}{\sin_K(\omega)} = -\frac{2}{c^2}\int\limits_0^\omega \frac{\sin_K(\omega-\tilde{\omega})}{\sin_K(\omega)}\phi_{,i}(\vec{\tilde{\omega}},\eta)\mathrm{d}\tilde{\omega} \tag{1.92}$$

Dises Ergebnis stimmt mit dem von ([Seljak 1996]) von 1995 überein.

Die Scherung eines infitesimalen Lichtbündels ist durch den Scherungstensor γ_{ij},

$$\gamma_{ij}(\vec{\theta},\omega) \equiv \frac{\partial\alpha_i(\vec{\theta},\omega)}{\partial\theta_j} = -\frac{2}{c^2}\int\limits_0^\omega \frac{\sin_K(\omega-\tilde{\omega})}{\sin_K(\omega)}\phi_{,ij}(\tilde{\omega}\theta_1,\tilde{\omega}\theta_2,\tilde{\omega},\eta)\mathrm{d}\tilde{\omega} \tag{1.93}$$

gegeben.

Kapitel 2

Gewichtsfunktionen

Im vorherigen Kapitel habe ich die Scherung ausgerechnet, die ein Lichtstrahl, der sich durch das Universum bis zum Beobachter ausbreitet, entlang seines Weges erfährt. Ziel im nächsten Kapitel wird es sein, die Verstärkung auszurechnen, die das Licht eines Quasars erfahren hat, der in einer bestimmten Richtung vom Beobachter gesehen werden kann. Dies führt auf die Auswertung eines Integrals entlang des Weges, den der Lichtstrahl zurücklegt. Da wir Quasare und Galaxien nur detektieren, wenn ihr Fluß größer als die Detektionsgrenze ist, nehmen wir, wenn wir zu größeren Rotverschiebungen gehen, nur noch sehr helle Objekte wahr. Um diese Selektion zu berücksichtigen, konstruiere ich mir aus den *Leuchtkraftfunktionen*[1] für diese Objektklassen normierte Verteilungsfunktionen, mit denen ich das Integral entlang der Sichtlinie gewichten werde.

Bevor ich dies nun machen will, möchte ich noch kurz die *k-Korrektur* besprechen, die man benötigt, um scheinbare Helligkeiten m in Leuchtkräfte L korrekt umzurechnen.

2.1 Die k-Korrektur

In dem folgenden Abschnitten werden wir die Formeln (2.7) und (2.6) dazu benutzt, um einem astronomischen Objekt aufgrund seiner Magnitude m eine Leuchtkraft L zuzuordnen. Zu beachten ist dabei jedoch, daß die Magnitude m für ein Frequenzintervall, beziehungsweise für speziell definierte Filter, gemessen wird. Achtet man darauf, daß als Referenzwerte der Sonne auch immer die mit denselben Filtern definierten bzw. gemessenen Werte verwendet werden, so sind diese Gleichungen korrekt. Ich habe als Referenzwerte der Sonne

[1] Dies entspricht der Anzahl der Objekte pro Leuchtkraftintervall.

$M_\odot = 4.79$ im Visuellen[2] und $M_\odot = 5.48$ im Blauen[3] verwendet.

Je weiter ein Objekt von uns entfernt ist, desto mehr ist sein Spektrum in den roten Bereich hin verschoben[4]. Dies führt dazu, daß die Bestimmung der Magnitude m eines Objektes aufgrund der Messung in einem bestimmten Frequenzband nicht mehr korrekt ist. Dieser Fehler hängt also sowohl von der Rotverschiebung als auch von der ursprünglichen Farbe[5] des Objektes ab. Nähern wir die spektrale Energieverteilung f_ν in dem uns interessierenden Bereich durch ein Potenzgesetz

$$f_\nu \propto \nu^{-\alpha}, \tag{2.1}$$

so ergibt sich hierfür die sogenannte *k-Korrektur* zu

$$m_k = -2.5(1+\alpha)\log_{10}(1+z). \tag{2.2}$$

Wie bereits erwähnt, hängt α von der ursprünglichen spektralen Energieverteilung im Bereich, in dem die Magnitude m der Objekte gemessen wird, ab. Ich habe folgende k-Korrektur benutzt:

- Spektralindex für k-Korrektur der Galaxien: $\alpha_{\mathrm{G}} = -1.5$.
- Spektralindex für k-Korrektur der Quasare: $\alpha_{\mathrm{Q}} = -0.75$.

[2]Die Magnitude wird über den ganzen sichtbaren Spektralbereich gebildet.

[3]Das Maximum des *B Bandes* liegt bei 4400Å.

[4]Vergleiche hierzu Kapitel (1.2.1).

[5]Die Farbe eines Objekts ist als $m_< - m_>$ definiert, wobei $m_{<(>)}$ die Magnitude bei kürzerer(längerer) Wellenlänge ist.

2.2 Galaxien

In diesem Abschnitt werde ich aus einem Modell für die *Leuchtkraftverteilung* von Galaxien eine *Rotverschiebungsverteilung* berechnen. Ziel ist es schließlich, daraus eine Gewichtsfunktion für eine Galaxie bei einer Rotverschiebung von z_{gal} zu erhalten.

2.2.1 Leuchtkraftverteilung von Galaxien

Schechter ([Schechter 1976]) publizierte erstmals einen neuen analytischen Ausdruck für die Leuchtkraftverteilung von Galaxien,

$$\phi(L)\mathrm{d}L = \phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\nu} \exp(-\frac{L}{L^*})\mathrm{d}(\frac{L}{L^*}), \tag{2.3}$$

was einer Kombination von *Potenzgesetz* und *Exponentialfunktion* entspricht. Dabei ist $\phi(L)dL$ die Anzahl von Galaxien pro Volumen in einem Leuchtkraftintervall von L bis $L+\mathrm{d}L$. Die Parameter L^*, ϕ^* und ν müssen aus Galaxienkatalogen bestimmt werden. Hierbei wird angenommen, daß die Galaxien keine nennenswerte Entwicklung durchlaufen, so daß die Referenzleuchtkraft ein einfacher Parameter und keine Funktion der Rotverschiebung ist.

Da ich meine Gewichtsfunktionen später sowieso normieren werde, kann ich den Parameter ϕ^* weglassen[6]. Die restlichen Parameter sind von vielen verschiedenen Autoren aus etlichen Galaxienkatalogen bestimmt worden. Ich werde im weiteren die von Marzke et al. ([Marzke, Geller, Huchra 1994]) bestimmten Werte,

- $\nu = -0.81$
- $L^* = (1.1 \pm 0.1)10^{10} L_{\odot} h^{-2}$

benutzen. Für die einheitenlose Leuchtkraft $l = \frac{L}{L^*}$ ergibt sich somit

$$\mathrm{d}\phi(l) = l^{-\nu} \exp(-l)\mathrm{d}l. \tag{2.4}$$

Interessiert man sich nicht nur für das Intervall von L bis $L+\mathrm{d}L$, sondern für alle Galaxien mit einer Leuchtkraft $L > L_{\mathrm{min}}$, so kann Gleichung (2.4) zu

$$\Phi(l_{\mathrm{min}}) = \int_{l_{\mathrm{min}}}^{\infty} \phi(\tilde{l})\mathrm{d}\tilde{l} = \Gamma(\nu+1, l_{\mathrm{min}}) \tag{2.5}$$

integriert werden. Da die Schechterfunktion später noch normiert werden muß und bei $l = 0$ eine Singularität besitzt, verwende ich bei der Normierung einen Abschneideparameter $l_{\mathrm{abs}} = 10^{-4}$. Dies bedeutet, daß ich $\Phi(l) = 0$ setze für alle $l < l_{\mathrm{abs}}$.

[6] Dieser kürzt sich bei der Normierung der Gewichtsfunktion heraus.

2.2.2 Rotverschiebungsverteilung der Galaxien

Die Helligkeit von Objekten, die ein Beobachter am Himmel sehen kann, wird in einem logarithmischen Maßsystem, den *Magnituden*, gemessen. Dabei können wir die *scheinbare Magnitude*[7] m in eine *absolute Magnitude*[8] M mittels

$$\frac{D_{\rm L}^2(z)}{(10\ \mathrm{pc})^2} = 10^{-0.4(M-m)} \tag{2.6}$$

umrechnen, wenn wir die Rotverschiebung z des Objektes kennen. Dabei ist $D_{\rm L}$ die in Kapitel 1.2.5 eingeführte Leuchtkraftentfernung. Nehmen wir die Sonne als Referenz, so kann mittels

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{-0.4(M-M_\odot)} \tag{2.7}$$

die Leuchtkraft L eines Objektes aus dessen Magnitude M ausgerechnet werden. Die entsprechenden Größen der Sonne tragen dabei den Index $\odot$.

Gleichung (2.5) beschreibt die Verteilung von Galaxien mit einer Leuchtkraft l in Einheiten von L^* größer als eine Grenzleuchtkraft $l_{\rm min}$. Aus der Kombination von Gleichung (2.6) und (2.7) erhält man die Leuchtkraft $l_{\rm gal}$ einer Galaxie aus der Magnitude $m_{\rm gal}$ und ihrer Rotverschiebung $z_{\rm gal}$ zu

$$l_{\rm gal}(m_{\rm gal}, z_{\rm gal}) = \frac{L_\odot}{L^*} \frac{(z_{\rm gal}+1)^4 D_\omega^2(z_{\rm gal})}{(10\ \mathrm{pc})^2} 10^{-0.4(M_\odot - m_{\rm gal})}. \tag{2.8}$$

Dabei habe ich auch die Definition (1.49) der Leuchtkraftentfernung eingesetzt.

2.2.3 Gewichtsfunktion der Galaxien

Die Gewichtsfunktion

$$W_{\rm G}(z) = \frac{\mathrm{d}N(z)}{\mathrm{d}z} \tag{2.9}$$

gibt uns darüber Aufschluß, wie viele Galaxien wir in dem Intervall z bis $z + \mathrm{d}z$ erwarten. Im weiteren werde ich die scheinbare Magnitude, die eine Galaxie haben muß, damit sie von dem Detektor noch wahrgenommen wird, mit $m_{\rm Det}$ bezeichnen. Damit läßt sich $\mathrm{d}N(z)$ als

$$\mathrm{d}N(z) = \mathrm{d}V(z)\ n(z)\ \Phi(l(m_{\rm Det}, z)) \tag{2.10}$$

[7] Die scheinbare Magnitude ist die Helligkeit, die ein astronomisches Objekt für einen Beobachter an der Position der Erde hat.

[8] Die absolute Magnitude ist die Helligkeit, die ein Beobachter in 10 pc Entfernung von dem astronomischen Objekt sehen würde.

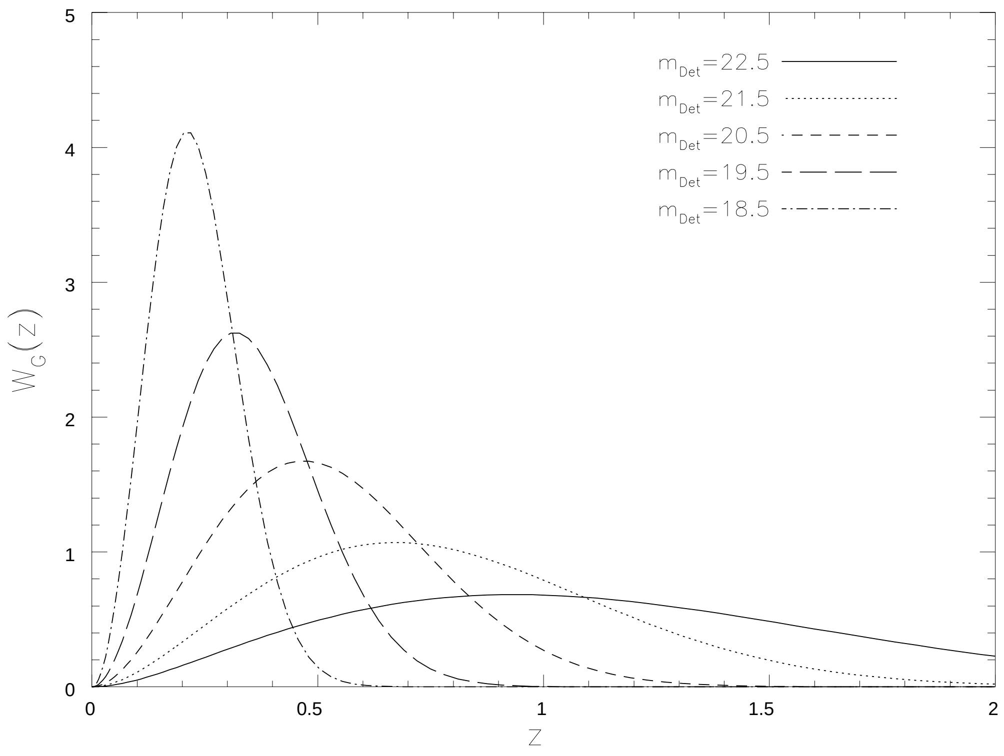


Abbildung 2.1: Gewichtsfunktion für Galaxien für verschiedene $m_{\rm Det}$. Weiter wurden $h = 0.5$, $\Omega^0_{\rm m} = 1$ und $\Omega^0_\lambda = 0$ benutzt.

schreiben. Unter der Voraussetzung, daß zu der ursprünglichen Anzahl n_0 der Galaxien bei sehr hoher Rotverschiebung[9] keine neuen Galaxien hinzukommen[10], ist die Anzahldichte $n(z)$ bei der Rotverschiebung z durch

$$n(z) = n_0(z+1)^3 \tag{2.11}$$

gegeben. Das Volumenelement, das den Rotverschiebungsbereich von z bis $z + \mathrm{d}z$ einschließt, ist aus geometrischen Überlegungen durch

$$\mathrm{d}V = 4\pi D^2_\omega(z)(c\,\mathrm{d}t) \tag{2.12}$$

gegeben. Das Differential $\mathrm{d}t$ kann mit Gleichung (1.32), Gleichung (1.33) als

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{(z+1)^2\dot{R}} \tag{2.13}$$

[9]Galaxien sind meist alt, d.h. sie sind bei großen Rotverschiebungen entstanden.

[10]Der Ansatz geht davon aus, daß Galaxien praktisch keine Evolution durchlaufen.

geschrieben werden. Dies können wir nun mit Tabelle (1.25) in Gleichung (2.10) einsetzen, wodurch sich $\widetilde{W}_{\mathrm{G}}$ als

$$\widetilde{W}_{\mathrm{G}}(m_{\mathrm{gal}}, z_{\mathrm{gal}}) = \frac{4\pi c\, n_0 (z_{\mathrm{gal}}+1) D_\omega^2(z_{\mathrm{gal}})}{H_0 \sqrt{\Omega_{\mathrm{m}}^0 z_{\mathrm{gal}} + 1 + \Omega_\lambda^0((z_{\mathrm{gal}}+1)^{-2} - 1)}} \Gamma(\nu+1, l_{\mathrm{gal}}(m_{\mathrm{gal}}, z_{\mathrm{gal}})) \tag{2.14}$$

schreiben läßt. Diese Funktion müssen wir noch normieren, wobei wir den Faktor $4\pi c\, n_0/H_0$ gleich weglassen können, da sich bei der Normierung Konstanten herauskürzen. Als Normierung erhalten wir

$$C = \int_0^\infty \widetilde{W}_{\mathrm{G}}(m_{\mathrm{gal}}, z_{\mathrm{gal}})\, \mathrm{d}z \tag{2.15}$$

und damit die Gewichtsfunktion

$$W_{\mathrm{G}}(m_{\mathrm{gal}}, z_{\mathrm{gal}}) = \frac{1}{C} \frac{(z_{\mathrm{gal}}+1) D_\omega^2(z_{\mathrm{gal}})}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{m}}^0 z_{\mathrm{gal}} + 1 + \Omega_\lambda^0((z_{\mathrm{gal}}+1)^{-2} - 1)}} \Gamma(\nu+1, l_{\mathrm{gal}}(m_{\mathrm{gal}}, z_{\mathrm{gal}})). \tag{2.16}$$

Hier ist jetzt nur noch zu beachten, daß aufgrund der k-Korrektur die Magnitude m_{gal} noch mittels Gleichung (2.2) korrigiert werden muß. Darstellungen der Gewichtsfunktion für verschiedene Detektorgrenzen zeigt Abbildung (2.1).

2.3 Quasare

Bei der Bestimmung der Gewichtsfunktion für Quasare können wir analog zu den Galaxien vorgehen. Dennoch ergeben sich zwei größere Unterschiede zu den Galaxien. Der erste ist die nicht zu vernachlässigende Evolution, die Quasare durchlaufen. Dies führt zu einer etwas anders parametrisierten Leuchtkraftfunktion. Der zweite Unterschied liegt darin, daß ich nur Quasare berücksichtigen will, die einen Mindestabstand von $z_{\rm min}$ haben. Deswegen setze ich bei der Gewichtsfunktion die untere Integrationsgrenze auf $z_{\rm min}$. Für Quasare mit $z < z_{\rm min}$ wird die Gewichtsfunktion deswegen auf 0 gesetzt.

2.3.1 Leuchtkraftverteilung von Quasaren

Für Quasare erweist es sich als nicht möglich, eine Leuchtkraftfunktion $\phi(L)$ anzugeben, die über den großen Rotverschiebungsbereich, in dem wir Quasare beobachten, mit den Messungen konsistent ist. Dies ändert sich jedoch, wenn berücksichtigt wird, daß die Quasare eine Evolution durchlaufen. Pei ([Pei 1994]) berechnete unter der Berücksichtigung dieser Tatsache eine Leuchtkraftfunktion $\phi(L, z)$, die im Einklang mit allen bisher erstellten Quasarkatalogen ist. Hierzu kombinierte er die Arbeiten von Hartwick & Schade ([Hartwick, Schade, 1990]), deren Leuchtkraftfunktion aus 15 Quasarkatalogen mit ca. 10^3 Quasaren im Rotverschiebungsbereich von $0.1 \lesssim z \lesssim 3.3$ gewonnen wurde, mit der von Warren et al. ([Warren, Hewett, Osmer 1994]), die aus 4 Katalogen zusammen mit ihren eigenen Beobachtungen die Leuchtkraftfunktion aus ca. 200 Quasaren im Rotverschiebungsbereich von $2.0 \lesssim z \lesssim 4.5$ berechnet haben.

Pei gibt als Ergebnis die Leuchtkraftfunktion

$$\mathrm{d}\phi(L, z) = \frac{\frac{\phi_*}{L_z}}{\left(\frac{L}{L_z}\right)^{\beta_{\rm t}} + \left(\frac{L}{L_z}\right)^{\beta_{\rm h}}} \mathrm{d}L \tag{2.17}$$

an, wobei die Evolution der Quasare in die Funktion $L_{\rm z}$ gesteckt wird. Der ursprüngliche Ansatz, die Evolution zu beschreiben, war ein einfaches Potenzgesetz $L_{\rm z} \propto (1+z)^{\gamma}$ ([Hartwick, Schade, 1990]). Doch es hat sich gezeigt, daß dies nur eine gute Beschreibung bis $z \lesssim 2.2$ ist. Pei verwendete deswegen einen gaußförmigen Ansatz

$$L_{\rm z} = L_*(1+z)^{-(1+\alpha)} \exp\left[-\frac{(z-z_*)^2}{2\sigma_*^2}\right]. \tag{2.18}$$

für die Evolution der Quasare. Dies liefert eine geeignete Beschreibung der Leuchtkraftfunktion in einem Bereich von $0 \lesssim z \lesssim 4.5$. Die in diesen Formeln eingeführten Parameter

hängen noch von dem kosmologischen Hintergrundmodell und dem Spektralindex $\alpha^\dagger$ ab. Pei hat die Parameter für die Leuchtkraftfunktion für zwei verschiedene Bremsparameter q_0 mit jeweils verschiedenen Spektralindizes α angegeben. Diese habe ich in Tabelle (B.8) im Anhang (B.2) zusammengefaßt. Die Abhängigkeit von der Hubblekonstante h fällt bei Einführung von $l = \frac{L}{L_z}$ heraus, und die Abhängigkeit vom Bremsparameter q_0 ist auch vernachlässigbar ([Hartwick, Schade, 1990]). Deswegen habe ich die von Pei angegebenen Parameter, falls nötig[11], für beliebige Spektralindizes α linear extrapoliert. Somit ergeben sich die Parameter ϕ_* und L_* zu:
$L_* = L_\odot 10^{13.03-0.78(\alpha+0.5)} h^{-2}$
$\phi_* = 10^{2.95+1.16(\alpha+0.5)}$
Analog zu der Leuchtkraftfunktion von Galaxien möchte ich die einheitenlose Leuchtkraft $l = \frac{L}{L_z}$ einsetzen. Die minimale Leuchtkraft L, die ein Quasar in einer Entfernung $z_{\rm qso}$ hat, kann analog zu den Galaxien mit der Gleichung (2.8) berechnet werden. Damit ergibt sich die Leuchtkraftverteilung für Quasare mit einer scheinbaren Magnitude größer als $m_{\rm qso}$ zu

$$\Phi(m_{\rm qso}, z_{\rm qso}) = \int\limits_{l(m_{\rm qso},z_{\rm qso})}^{\infty} \phi(l, z_{\rm qso}) \mathrm{d}l = \int\limits_{l(m_{\rm qso},z_{\rm qso})}^{\infty} \frac{\phi_*}{l^{\beta_{\rm t}} + l^{\beta_{\rm h}}} \mathrm{d}l. \tag{2.19}$$

Da über einige Größenordnungen integriert werden muß und Gleichung (2.19) wegen der starken l-Abhängigkeit des Integranden numerisch nicht einfach auf einmal integriert werden kann, habe ich dieses Integral in 10 Bereiche von je einer Größenordnung aufgeteilt, in denen ich das Integral mit großer Präzision berechnen konnte. Für einen beliebigen Wert von l muß jetzt nur noch das Integral bis zur nächsten Bereichsgrenze numerisch berechnet werden, dann kann der Rest aus einer Tabelle ermittelt werden. Auch bei dieser Funktion benötigen wir später noch die Normierung, für die ich analog zu den Galaxien einen Abschneideparameter $l_{\rm min} = 10^{-5}$ eingeführt habe.

2.3.2 Gewichtsfunktion der Quasare

Analog zu den Galaxien ergibt sich auch hier die Gewichtsfunktion für die Quasare als $W_{\rm Q} = \mathrm{d}N/\mathrm{d}z$ mit der analogen Definition von $\mathrm{d}N$. Der einzige Unterschied zu den Galaxien ist die Entwicklung der Quasare, die aber schon in der Leuchtkraftfunktion $\Phi(m_{\rm Det}, z)$ enthalten ist. Somit ergibt sich $\mathrm{d}N(z)$ zu $\mathrm{d}V(z)(z+1)^3\Phi(m_{\rm Det}, z)$, und damit die Gewichts-

† Die k-Korrektur aus Kapitel 2.1 ist somit schon berücksichtigt, d.h. $m_{\rm qso}$ darf deswegen nicht mehr korrigiert werden!

[11] Wenn sie in den angegebenen Fehlern nicht kompatibel waren.

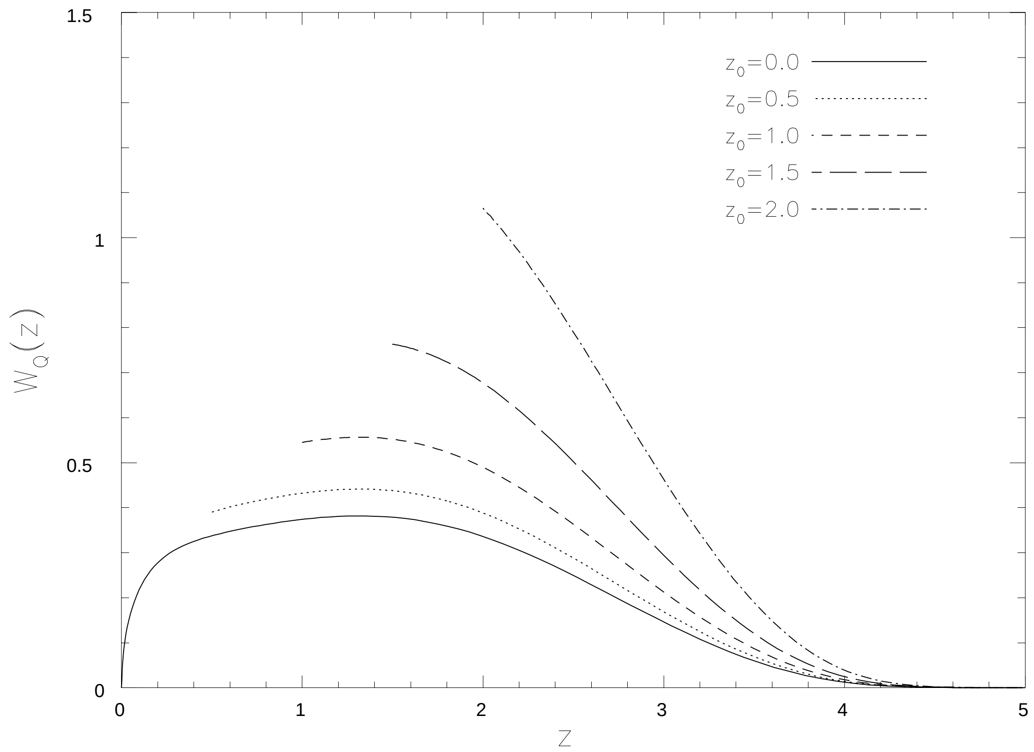


Abbildung 2.2: Gewichtsfunktion für Quasare für verschiedene z_{min}. Weiter wurden $h = 0.5$, $\Omega_{\mathrm{m}}^0 = 1$, $\Omega_\lambda^0 = 0$ und $m_{\mathrm{Det}} = 19.0$ benutzt.

funktion

$$\widetilde{W}_{\mathrm{Q}}(z_{\mathrm{qso}}, m_{\mathrm{qso}}) = \frac{4\pi c(z_{\mathrm{qso}}+1) D_\omega^2(z_{\mathrm{qso}})}{H_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{m}}^0 z_{\mathrm{qso}} + 1 + \Omega_\lambda^0((z_{\mathrm{qso}}+1)^{-2}-1)}} \Phi(m_{\mathrm{qso}}, z_{\mathrm{qso}}), \tag{2.20}$$

wobei analog zu den Galaxien C^* die Normierung

$$C^* = \int_{z_{\mathrm{min}}}^{\infty} \widetilde{W}_{\mathrm{Q}}(m_{\mathrm{gal}}, z_{\mathrm{gal}})\,\mathrm{d}z \tag{2.21}$$

dieser Funktion ist. Damit erhalten wir die Quasargewichtsfunktion

$$W_{\mathrm{Q}}(z_{\mathrm{qso}}, m_{\mathrm{qso}}) = \frac{1}{C^*} \frac{(z_{\mathrm{qso}}+1) D_\omega^2(z_{\mathrm{qso}})}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{m}}^0 z_{\mathrm{qso}} + 1 + \Omega_\lambda^0((z_{\mathrm{qso}}+1)^{-2}-1)}} \Phi(m_{\mathrm{qso}}, z_{\mathrm{qso}}). \tag{2.22}$$

Abbildung (2.2) zeigt die Gewichtsfunktion für Quasare für verschiedene Mindestabstände z_{min} in einem Einstein-de Sitter-Universum mit $h = 0.5$.

Kapitel 3

Korrelationsfunktion

In den vorangegangenen Kapiteln habe ich Modelle für unser Universum ebenso wie für die darin beobachtete Materie vorgestellt. In diesem Kapitel möchte ich nun all diese Modelle kombinieren und so einen Zusammenhang zwischen den Modellparametern und den Beobachtungen konstruieren.

Im ersten Teil dieses Kapitels zeige ich, welcher Zusammenhang zwischen der Verstärkung und dem Dichtekontrast besteht. Danach zeige ich, wie wir die Korrelationsfunktion, die durch die beobachtbaren Anzahldichten der Quasare und der Galaxien definiert ist, durch die aus der Theorie kommenden Größen wie Dichtekontrast und Verstärkung darstellen können. Schließlich kann ich die Varianz des Dichtekontrastes durch das Powerspektrum der Fluktuationen ausdrücken und erhalte somit einen analytischen Ausdruck für die Winkelkorrelationsfunktion, der nur noch von den bisher eingeführten Modellparametern abhängt.

3.1 Der schwache Linseneffekt der Gravitation

Die Wechselwirkung von Licht mit dem Gravitationsfeld führt nicht nur, wie in Kapitel (1.4) gezeigt, dazu, daß die Lichtstrahlen von entfernten Objekten abgelenkt werden. Auch die Bilder dieser Objekte werden durch den Linseneffekt verzerrt. Die Flächenhelligkeit einer Quelle bleibt jedoch durch den Gravitationslinseneffekt unverändert[1]. Ist nun die Fläche, unter der ein Objekt für den Beobachter erscheint, größer als in Abwesenheit der Gravitationslinsen, so erscheint das Objekt heller. Es wurde durch den Gravitationslinseneffekt verstärkt.

[1] Dies kann direkt aus *Liouville's Theorem* gefolgert werden und ist unter anderem in dem Buch von ([Schneider, Ehlers, Falco 1992]) nachgelesen werden.

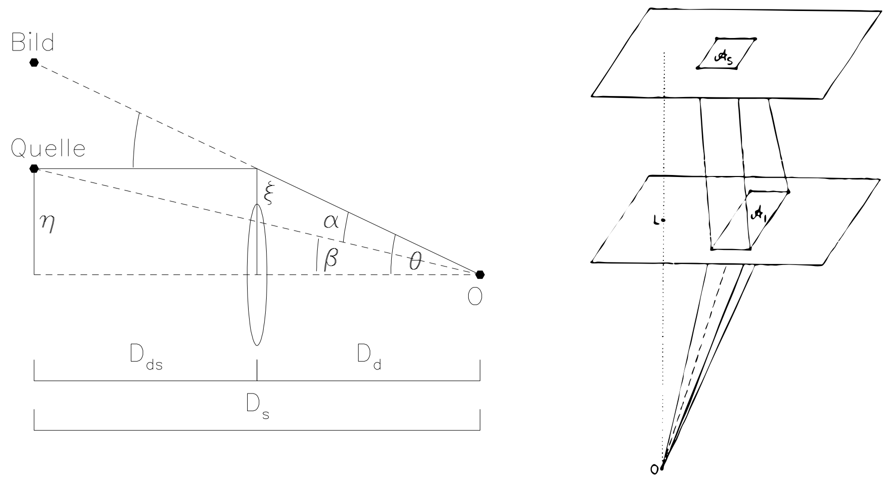


Abbildung 3.1: Abbildung zur Veranschaulichung der Linsengeometrie. Links aus eine Abbildung aus [Narayan, Bartelmann, 1996] zu den Abständen zwischen Beobachter, Linse und Quelle mit den zugehörigen Winkeln, rechts aus [Schneider, Ehlers, Falco 1992] ist die Vergrößerung der Fäche der Quelle durch die Linse abgebildet.

3.1.1 Abbildungseigenschaften

Um die Abbildungseigenschaften einer Gravitationslinse besser beschreiben zu können, möchte ich die Geometrie einer solchen Konfiguration kurz näher beschreiben. Dazu möchte ich mit der Festlegung einer optischen Achse beginnen. Diese möchte ich mit der radialen Achse eines Polarkoordinatensytems, in dem wir als Beobachter im Ursprung sitzen, gleichsetzen. Wird das Licht durch Dichtefluktuationen abgelenkt, so erscheint ein Objekt für den Beobachter an der Position $\vec{\theta}$, obwohl sich seine wahre Position bei $\vec{\beta}$ befindet. Damit erhalten wir die wahre Position des Objektes aus der Linsengleichung

$$\vec{\beta}(\vec{\theta}) = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}). \tag{3.1}$$

Dabei ist $\vec{\alpha}(\vec{\theta})$ der Winkel zwischen dem sich in einem homogenen Universum ausbreitenden Lichtstrahl und dem von Dichtefluktuationen abgelenkten Lichtstrahl, den ich bereits in Kapitel (1.4.4) hergeleitet habe. Die linke Seite von Abbildung (3.1) verdeutlicht dies noch einmal. Lokal läßt sich diese Abbildung durch ihre Jacobimatrix

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} \tag{3.2}$$

beschreiben, und wir erhalten das Differential

$$\mathrm{d}\vec{\beta} = \mathcal{A}\mathrm{d}\vec{\theta}. \tag{3.3}$$

Die Gleichung (3.1) beschreibt uns die Linsengleichung als eine Abbildung von einem Bild auf seine Quelle, und somit gibt uns $\mathcal{A}$ die Verzerrung an, die ein Bild erfährt, wenn wir es auf die Quelle zurück abbilden. Damit erhalten wir die Fläche A_{Quelle} der Quelle durch die Determinante von $\mathcal{A}$ aus der Fläche A_{Bild} des Bildes durch

$$A_{\mathrm{Quelle}} = \det(\mathcal{A}) A_{\mathrm{Bild}}. \tag{3.4}$$

Die rechte Seite von Abbildung (3.1) verdeutlich noch einmal diesen Zusammenhang. Später werden wir nicht die Abbildung von den Bildern auf die Quellen, sondern umgekehrt, von den Quellen auf die Bilder, benötigen. Da wir aber nur die Determinante benötigen, können wir die Determinante der inversen Abbildung durch die Determinante von $\mathcal{A}$ als $\det(\mathcal{A})^{-1}$ schreiben.

3.1.2 Verstärkung

Unter der *Verstärkung* verstehen wir das Verhältnis der Flächen von Bild und Quelle. Damit können wir sie als

$$\mu \equiv \frac{A_{\mathrm{Bild}}}{A_{\mathrm{Quelle}}} = \frac{1}{\det(\mathcal{A})} \tag{3.5}$$

definieren. Setzen wir die Definition der Jacobimatrix $\mathcal{A}$ aus Gleichung (3.2) zusammen mit Gleichung (3.1) ein, so erhalten wir den Zusammenhang

$$\mu = \frac{1}{\det(\mathcal{A})} = \frac{1}{\det\left(\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}}\right)} = \frac{1}{\det\left(\delta_{ij} - \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial \vec{\theta}}\right)} = \frac{1}{\det(\delta_{ij} - \gamma_{ij})}. \tag{3.6}$$

Dabei ist γ_{ij} die in Gleichung (1.93) eingeführte Scherung. Da wir die Ablenkung von Licht aufgrund der Gravitation nur als kleine Störung mit $|\vec{\alpha}| \ll 1$ durch „kleine“ Dichtefluktuationen mit $\phi \ll c^2$ betrachten, können wir davon ausgehen, daß die Komponenten der Scherung $|\gamma_{ij}| \ll 1$ sind. Damit läßt sich die Determinante von $\mathcal{A}$ noch ein wenig vereinfachen, und wir erhalten die Verstärkung als

$$\mu = \frac{1}{(1-\gamma_{11})(1-\gamma_{22}) + \gamma_{12}\gamma_{21}} \approx \frac{1}{1 - \mathrm{tr}(\gamma_{ij})} \approx 1 + \mathrm{tr}(\gamma_{ij}) + \mathcal{O}(|\gamma|^2). \tag{3.7}$$

Analog zum Dichtekontast δ will ich nun die Abweichung der Verstärkung von ihrem Mittelwert

$$\delta\mu \simeq \frac{\mu - \langle\mu\rangle}{\langle\mu\rangle} \tag{3.8}$$

betrachten. Bedenken wir, daß der Mittelwert $\langle\mu\rangle$ der Verstärkung aufgrund der Energieerhaltung eins sein muß, ergibt sich die relative Verstärkung zu

$$\delta\mu = \mathrm{tr}(\gamma_{ij}) = \gamma_{11} + \gamma_{22}, \tag{3.9}$$

wobei ich gleich den Zusammenhang aus Gleichung (3.7) benutzt habe. Jetzt können wir das in Kapitel (1.4.4) hergeleitete Ergebnis für γ_{ij} einsetzen und erhalten

$$\delta\mu(\vec{\theta},\omega) = -\frac{2}{c^2}\int\limits_0^{\omega} \frac{\sin_K(\omega-\tilde{\omega})}{\sin_K(\omega)} \left(\phi_{,11}(\tilde{\omega}\theta_1,\tilde{\omega}\theta_2,\tilde{\omega},\eta) + \phi_{,22}(\tilde{\omega}\theta_1,\tilde{\omega}\theta_2,\tilde{\omega},\eta)\right) \mathrm{d}\tilde{\omega}. \tag{3.10}$$

Die Summe $\phi_{,11} + \phi_{,22}$ über die zweiten Ableitungen des Potentials ϕ können wir durch den Laplace-Operator $\Delta\phi$ ausdrücken. Dies ist deswegen möglich, da die dritte Komponente[2] von $\Delta\phi$ keinen Beitrag zu dem Integral liefert[3], wenn das Licht eine Potentialmulde durchläuft. Damit erhalten wir

$$\delta\mu(\vec{\theta},\omega) = -\frac{2}{c^2}\int\limits_0^{\omega} \frac{\sin_K(\omega-\tilde{\omega})}{\sin_K(\omega)} \Delta\phi(\tilde{\omega}\theta_1,\tilde{\omega}\theta_2,\tilde{\omega},\eta)\mathrm{d}\tilde{\omega}. \tag{3.11}$$

Setzen wir jetzt für $\Delta\phi$ die umgeformte Poisson-Gleichung (1.89) ein, so erhalten wir den Zusammenhang

$$\delta\mu(\vec{\theta},\omega) = +\frac{3H_0^2\Omega_\mathrm{m}^0}{c^2}\int\limits_0^{\omega} \frac{\sin_K(\tilde{\omega})\sin_K(\omega-\tilde{\omega})}{\sin_K(\omega)} \frac{\delta(\vec{\theta},\tilde{\omega})}{a(\tilde{\omega})}\mathrm{d}\tilde{\omega} \tag{3.12}$$

zwischen der relativen Verstärkung $\delta\mu$ und dem Dichtekontrast δ. Dieses Ergebnis kann anschaulich leicht erläutert werden. Den zweiten Faktor des Integranden können wir als linear auf unsere Zeit extrapolierten Dichtekontrast interpretieren, während wir die Entfernungsfaktoren als die Geometriefaktoren aus der Linsengleichung identifizieren können[4]. Also kann man diese Faktoren auch als:

$$\delta_0 \simeq \frac{\delta}{a}$$

und

$$\frac{D_\mathrm{d}D_\mathrm{ds}}{D_\mathrm{s}} \mathrel{\widehat{=}} \frac{\sin_K(\tilde{\omega})\sin_K(\omega-\tilde{\omega})}{\sin_K(\omega)}$$

schreiben. Die Verstärkung kann also als Integral über den linear extrapolierten Dichtekontrast, der mit der Linseneffektivität gewichtet wird, gedeutet werden.

[2] Das ist die Komponente entlang der Sichtlinie.

[3] Vorausgesetzt, das Potential ändert sich mit der Zeit nicht wesentlich.

[4] Vergleiche hierzu Abbildung (3.1).

3.2 Anzahldichten von Galaxien und Quasaren

Im vorigen Abschnitt habe ich einen Zusammenhang zwischen der Verstärkung, die wir mittels der Quasare messen wollen, und dem Dichtekontrast, dem wir die Galaxien zuordnen, konstruiert. Jetzt möchte ich einen Zusammenhang zu beobachtbaren Größen herstellen. Die einfachste Meßmethode, die wir uns vorstellen können, ist das Abzählen von Objekten. Mit der so gemessenen Anzahldichte an verschiedenen Orten können wir statistische Aussagen über diese Objekte, z.B. über ihre Korrelationsfunktion, treffen.

3.2.1 Winkelkorrelationsfunktion ξ_{QG}

Die Winkelkorrelationsfunktion $\xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\phi})$ gibt uns Aufschluß darüber, wie die Anzahldichten von Quasaren und Galaxien mit einem Winkelabstand $\vec{\phi}$ voneinander zusammenhängen. Bezeichnen wir die Anzahldichte von Quasaren in der Blickrichtung $\vec{\theta}$ mit einem Fluß größer als S durch $n_{\mathrm{Q}}(S,\vec{\theta})$ und die Anzahldichte der Galaxien in der Blickrichtung $\vec{\theta}$ mit $n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta})$, so läßt sich $\xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\phi})$ als

$$\xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\phi}) = \frac{\left\langle \left[n_{\mathrm{Q}}(S,\vec{\theta}) - \langle n_{\mathrm{Q}}(S)\rangle\right] \left[n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}+\vec{\phi}) - \langle n_{\mathrm{G}}\rangle\right]\right\rangle}{\langle n_{\mathrm{G}}\rangle \langle n_{\mathrm{Q}}(S)\rangle} \tag{3.13}$$

schreiben, wobei die $\langle\rangle$ eine Mittelung über den Winkel $\vec{\theta}$ bedeuten, und $\vec{\phi}$ der betrachtete Winkelabstand ist. Das Ergebnis dieser Korrelationsfunktion läßt sich leicht interpretieren.

- $\xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\phi}) > 0$ bedeutet, daß Quasare bevorzugt dort zu sehen sind, wo auch Galaxien zu beobachten sind.

- $\xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\phi}) = 0$ falls die Positionen der Quasare und der Galaxien statistisch unabhängig sind.

- $\xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\phi}) < 0$ wenn wir Quasare besonders häufig dort sehen, wo keine Galaxien zu beobachten sind.

Die Quasare sind von den Galaxien räumlich weit genug getrennt, um sie als physikalisch und damit auch statistisch unabhängig von den Galaxien zu betrachten. Dennoch erwarten wir aufgrund des schwachen Gravitationslinseneffekts ein positives Signal für die Winkelkorrelationsfunktion. Wie ich im vorigen Abschnitt gezeigt habe, ist es durch den Linseneffekt möglich, das Licht von Quasaren zu verstärken. Prinzipiell kann mit einem Detektor eine Quelle nur dann gemessen werden, wenn ihr Fluß einen gewissen Grenzwert überschreitet. Wird eine schwache Quelle nun verstärkt, so kann es passieren, daß sie, obwohl sie intrinsisch nicht hell genug wäre, trotzdem detektiert wird. Damit erwarten wir mehr Quasare dort, wo die Verstärkung groß ist. Wir sprechen hierbei vom sogenannten „magnification bias“ (vergleiche hierzu z.B. [Schneider, Ehlers, Falco 1992] oder [Narayan, Wallington, 1993]). Eine große Verstärkung wird durch einen großen Dichtekontrast hervorgerufen. Wir wollen nun die vereinfachte Annahme machen, daß die Galaxien bevorzugt dort entstehen, wo eine erhöhte Dichte vorliegt. Dies wird auch als „galaxy bias“ ([Kaiser, 1984], [Dekel, Rees 1987]) bezeichnet. Somit folgt unmittelbar eine Korrelation zwischen Galaxien und Quasaren, und damit die Erwartung $\xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\phi}) > 0$ für hinreichend kleine Winkel $\vec{\phi}$ [Bartelmann 1995].

3.2.2 Anzahldichte der Galaxien

Um von der meßbaren Größe $n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta})$ auf den aus der Theorie stammenden Dichtekontrast zu gelangen, führe ich als erstes die relative Anzahldichte $\delta n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta})$ analog zum Dichtekontrast durch

$$\delta n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}) = \frac{n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}) - \langle n_{\mathrm{G}} \rangle}{\langle n_{\mathrm{G}} \rangle} \tag{3.14}$$

ein. Weiter möchte ich als einfachsten Zusammenhang den linearen Zusammenhang zwischen relativer Anzahldichte und Dichtekontrast

$$\delta n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}) = b\delta(\vec{\theta}) \tag{3.15}$$

annehmen. Der Proportionalitätsfaktor b wird auch *bias*-Faktor genannt. Somit erhalten wir den Zusammenhang

$$\frac{n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}) - \langle n_{\mathrm{G}} \rangle}{\langle n_{\mathrm{G}} \rangle} = b\delta(\vec{\theta}). \tag{3.16}$$

3.2.3 Anzahldichte der Quasare

Ganz so einfach wie bei den Galaxien ist der Zusammenhang für die Quasare und die Verstärkung nicht zu finden. Um einen analytischen Ausdruck zu erhalten, möchte ich die Anzahldichte der Quasare nicht wie in Kapitel (2.3.1) als doppeltes Potenzgesetz, sondern als einfaches Potenzgesetz

$$\tilde{n}_{\mathrm{Q}}(\tilde{S}, \vec{\theta}) \propto \tilde{S}^{a} \tag{3.17}$$

mit dem Exponenten a annehmen. Dabei bezeichnet die Tilde die Größen in Abwesenheit von Verstärkung durch Gravitationslinsen. Dies ist möglich, da wir das doppelte Potenzgesetz jederzeit lokal durch ein einfaches Potenzgesetz nähern können. Da wir nur kleine Verstärkungen betrachten, erhalten wir durch diese auch nur kleine Veränderungen des

Flusses $\widetilde{S}$. Für solche kleinen Änderungen stellt die lokale Näherung durch ein einfaches Potenzgesetz eine gute Approximation dar. Berücksichtigen wir nun Gravitationslinseneffekte, so ändern sich zwei Dinge. Einerseits wird der Fluß $\widetilde{S}$ für den Beobachter um den Faktor $\mu(\vec{\theta})$ auf

$$S = \mu(\vec{\theta})\widetilde{S} \tag{3.18}$$

erhöht. Andererseits wird auch der Raumwinkel $\widetilde{\Omega}$ für den Beobachter um den Faktor $\mu(\vec{\theta})$ auf

$$\Omega = \mu(\vec{\theta})\widetilde{\Omega} \tag{3.19}$$

gedehnt. Damit bekommen wir bei Anwesenheit von Gravitationslinsen die Anzahldichte $n_{\mathrm{Q}}(S,\vec{\theta})$ durch

$$n_{\mathrm{Q}}(S,\vec{\theta}) = \frac{1}{\mu(\vec{\theta})}\tilde{n}_{\mathrm{Q}}\left(\frac{S}{\mu},\vec{\theta}\right). \tag{3.20}$$

Verwenden wir nun den Potenzansatz aus Gleichung (3.17), so erhalten wir

$$n_{\mathrm{Q}}(S,\vec{\theta}) \propto \frac{1}{\mu(\vec{\theta})^{a+1}}S^{a}. \tag{3.21}$$

Auch für die Quasare möchte ich an dieser Stelle eine relative Anzahldichte

$$\delta n_{\mathrm{Q}}(\vec{\theta}) = \frac{n_{\mathrm{Q}}(S,\vec{\theta}) - \langle n_{\mathrm{Q}}(S)\rangle}{\langle n_{\mathrm{Q}}(S)\rangle} \tag{3.22}$$

einführen. Jetzt können wir die lezten beiden Gleichungen kombinieren und erhalten somit

$$\delta n_{\mathrm{Q}}(\vec{\theta}) = \frac{1}{\mu(\vec{\theta})^{a+1}} - 1 = \mu(\vec{\theta})^{-a-1} - 1, \tag{3.23}$$

wobei wir gleich berücksichtigt haben, daß der Mittelwert der Verstärkung $\langle\mu\rangle$ eins ist, und sich daher der Mittelwert $\langle n_{\mathrm{Q}}(S)\rangle$ zu S^a ergibt. Analog zu Kapitel (3.1.2) können wir davon ausgehen, daß für unsere Betrachtungen die Abweichungen der Verstärkung klein sind, und können sie somit als

$$\mu(\vec{\theta}) = 1 + \delta\mu(\vec{\theta}) \tag{3.24}$$

schreiben. Damit können wir für kleine $\delta\mu(\vec{\theta})$ die Gleichung (3.23) entwickeln und erhalten

$$\mu(\vec{\theta})^{-a-1} - 1 \simeq (-a-1)\delta\mu(\vec{\theta}). \tag{3.25}$$

Zusammengefaßt können wir somit Gleichung (3.20) als

$$\frac{n_{\mathrm{Q}}(S,\vec{\theta}) - \langle n_{\mathrm{Q}}(S)\rangle}{\langle n_{\mathrm{Q}}(S)\rangle} = (-a-1)\delta\mu(\vec{\theta}). \tag{3.26}$$

schreiben, wobei a aus Gleichung (3.17) die Stärke des magnification bias bestimmt.

3.2.4 Winkelkorrelationsfunktion $\xi_{\mu\delta}$

Setzen wir die Ergebnisse (3.16) und (3.26) in die Definition der Korrelationsfunktion (3.13) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\phi}) &= (-a-1)b\left\langle \delta\mu(\vec{\theta})\delta(\vec{\theta}+\vec{\phi})\right\rangle \\ &\equiv (-a-1)b\,\xi_{\mu\delta}(\vec{\phi}). \end{aligned} \tag{3.27}$$

Hier habe ich gleich analog zur Definition der Korrelationsfunktion (3.13) die Winkelkorrelation $\xi_{\mu\delta}$ zwischen dem Dichtekontrast und der Verstärkung eingeführt. Da der Faktor $(-a-1)b$ nur eine einfache Skalierung bedeutet, werde ich ab jetzt $\xi_{\mu\delta}$ als „die Korrelationsfunktion" bezeichen. Ich werde mich auch im letzten Kapitel darauf beschränken, $\xi_{\mu\delta}$ zu besprechen. Sinnvolle Werte sind $b \approx 1$ [Kauffmann, Nusser, Steinmetz 1996] und $a = -4\,...\,-5$ [Bartelmann 1995].

3.3 Dichtekontrast und Verstärkung

Im vorigen Abschnitt habe ich den Zusammenhang zwischen der Korrelationsfunktion $\xi_{\mu\delta}(\vec{\phi})$, der relativen Verstärkung $\delta\mu(\vec{\theta})$ und dem Dichtekontrast $\delta(\vec{\theta}+\vec{\phi})$ eingeführt. In diesem Abschnitt will ich beschreiben, wie wir diese nur noch richtungsabhängigen Größen $\delta\mu(\vec{\theta})$ und $\delta(\vec{\theta}+\vec{\phi})$ durch die $\delta\mu(\vec{\theta},\omega)$ und die im ersten Kapitel eingeführte Größe $\delta(\vec{\theta},\omega,\eta)$ ausdrücken können.

3.3.1 Projizierte Verstärkung

Die Verstärkung, die ein Lichtstrahl, der den Beobachter aus der Richtung $\vec{\theta}$ erreicht, erfährt, ist das Integral der lokalen Verstärkung entlang des Weges des Lichtstrahls. Dieses Integral muß jedoch noch mit der Quasarverteilung W_{Q} entlang des Weges gewichtet werden. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta\mu(\vec{\theta}) &= \int_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\omega W_{\mathrm{Q}}(\omega)\delta\mu(\vec{\theta},\omega) \\ &= \int_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\omega W_{\mathrm{Q}}(\omega)\frac{3H_0^2\Omega_{\mathrm{m}}^0}{c^2}\int_0^{\omega}\frac{\sin_K(\tilde{\omega})\sin_k(\omega-\tilde{\omega})}{\sin_K(\omega)a(\tilde{\omega})}\delta(\vec{\theta},\tilde{\omega})\mathrm{d}\tilde{\omega}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

wobei die Obergrenze $\omega_{\max}$ von den kosmologischen Parametern abhängt und als $\omega_{\max} = \omega(z\to\infty)$ zu verstehen ist. Die Gewichtsfunktion $W_{\mathrm{Q}}(\omega)$ ist die von z auf ω transformierte

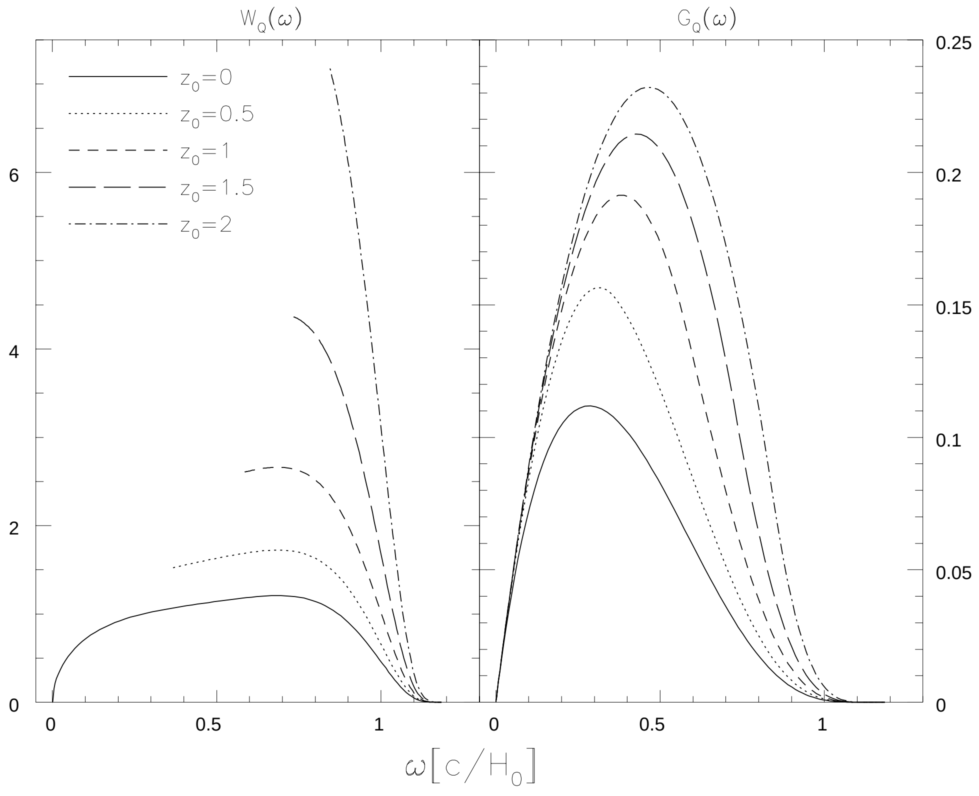


Abbildung 3.2: Gewichtsfunktion für Quasare für verschiedene z_0. Weiter wurden $h = 0.5$, $\Omega_\mathrm{m}^0 = 1$, $\Omega_\lambda^0 = 0$ und $m_\mathrm{Det} = 19.0$ benutzt.

Gewichtsfunktion für Quasare aus Kapitel (2.3.2). Man bedenke dabei, daß die Gewichtsfunktion nach dieser Transformation über ω normiert ist.
Durch geschicktes Ändern der Integrationsreihenfolge kann (3.28) auch wie folgt geschrieben werden

$$\delta\mu(\vec{\theta}) = 3\Omega_\mathrm{m}^0 \int_0^{\omega_\mathrm{max}} \mathrm{d}\omega G_\mathrm{Q}(\omega) \frac{\delta(\vec{\theta},\omega)}{a(\omega)}, \tag{3.29}$$

wobei die Funktion

$$G_\mathrm{Q}(\omega) = \sin_K(\omega) \frac{H_0^2}{c^2} \int_\omega^{\omega_\mathrm{max}} \frac{\sin_K(\tilde{\omega}-\omega)}{\sin_K(\tilde{\omega})} W_\mathrm{Q}(\tilde{\omega}) \mathrm{d}\tilde{\omega} \tag{3.30}$$

eingeführt wurde. Abbildung (3.2) zeigt die Gewichtsfunktion W_Q und die modifizierte Gewichtsfunktion G_Q für verschiedene Werte von z_0.

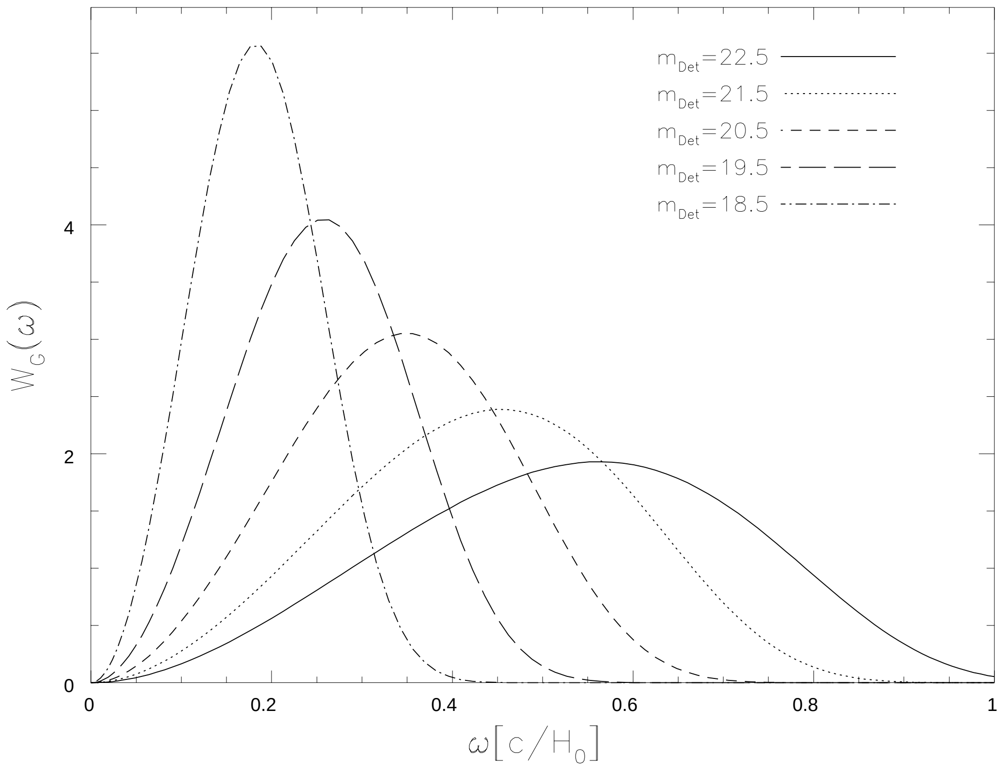


Abbildung 3.3: Gewichtsfunktion für Galaxien für verschiedene m_{Det}. Weiter wurden $h = 0.5$, $\Omega_{\mathrm{m}}^0 = 1$ und $\Omega_\lambda^0 = 0$ benutzt.

3.3.2 Projizierter Dichtekontrast

Der Dichtekontrast in einer beliebigen Richtung $\vec{\theta}$ kann ebenfalls als Integral entlang des Lichtweges geschrieben werden. Analog zu der Verstärkung muß auch hier der Integrand gewichtet werden, nur diesmal mit der Galaxienverteilung $W_{\mathrm{G}}(\omega)$. Daraus erhalten wir

$$\delta(\vec{\theta}) = \int_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\omega \delta(\vec{\theta}, \omega, \eta) W_{\mathrm{G}}(\omega). \tag{3.31}$$

Die Gewichtsfunktion $W_{\mathrm{G}}(\omega)$ ist hier ebenfalls die von z auf ω transformierte Gewichtsfunktion für Galaxien aus Kapitel (2.2.3), die nach der Transformation über ω normiert ist. Abbildung (3.3) zeigt die Gewichtsfunktion W_{G} für verschiedene, minimal detektierten Helligkeiten m_{Det} von Galaxien.

Damit haben wir die Funktionen $\delta\mu(\vec{\theta})$ und $\delta(\vec{\theta})$ berechnet, die wir in Gleichung (3.27) einsetzen müssen, um die Korrelationsfunktion zu erhalten.

3.4 Korrelation von Galaxien und Quasaren

Bevor wir die Korrelationsfunktion nun endgültig ausrechnen, müssen wir noch einen geeigneten Weg finden, den Dichtekontrast δ durch das in Kapitel (1.3.2) eingeführte Powerspektrum und dessen in Kapitel (1.3.3) beschriebenes zeitliches Verhalten auszudrücken. Wir werden hier einem Weg folgen, den Kaiser [Kaiser, 1992] 1992 erstmals aufzeigte.

3.4.1 Berechnung der Korrelationsfunktion

Kaiser benutzte die Tatsache, daß die Fouriertransformierte des Powerspektrums P_p einer Größe p mit ihrer Autokorrelationsfunktion

$$\xi_{pp}(\vec{\phi}) = \int \mathrm{d}^2\kappa \frac{1}{(2\pi)^2} P_p(\vec{\kappa}) \exp(-i\vec{\kappa}\vec{\phi}) \tag{3.32}$$

gleichgesetzt werden kann. Er zeigte den Zusammenhang

$$P_p(\vec{\kappa}) = \int_0^1 \mathrm{d}\omega \frac{q^2(\omega)}{\omega^2} P_f\left(\frac{\vec{\kappa}}{\omega}\right), \tag{3.33}$$

zwischen dem Spektrum P_p einer Projektion

$$p(\vec{\theta}) = \int_0^1 \mathrm{d}\omega\; q(\omega) f(\vec{\theta}, \omega), \tag{3.34}$$

und dem Spektrum P_f der projizierten Funktion f. Für ein homogenes, isotropes Zufallsfeld f kann dies als Analogon zu *Limbers Gleichung* (e.g., [Peebles 1993], Eq. (7.47)) im Fourier-Raum interpretiert werden. Wir erhalten sie, wenn wir die dω-Integration in eine Summe über Schalen der Größe $\Delta\omega$ überführen, und dabei $\Delta\omega$ so wählen können, daß die Skala, auf der sich die Gewichtsfunktionen q ändern, groß gegenüber $\Delta\omega$ und gleichzeitig die Skala, die charakteristisch für die Funktion f ist, klein gegenüber $\Delta\omega$ ist. In unserem Fall skalieren die Gewichtsfunktionen im Bereich $c/H_0 \approx 3000$ Mpc, während die Dichtefluktuationen, die der Funktion f entsprechen, eine typische Längenskala von 10 Mpc haben. Damit ist diese Bedingung in unserem Fall gut erfüllt. In Anhang (A.4) habe ich diese Rechnung nachvollzogen. Dies läßt sich auch leicht auf ein allgemeines Universum[5], ein Powerspektrum, das zusätzlich noch von der Zeit abhängt, und auf die Korrelationsfunktion von zwei verschiedenen Größen, die beide Projektionen von f mit verschiedenen

[5]Damit ist ein Universum mit $(\Omega_{\mathrm{m}}^0, \Omega_\lambda^0) \neq (1, 0)$ gemeint.

Gewichten q_0 und q_1 sind, verallgemeinern. Dabei erhalten wir das Ergebnis

$$P_{p_0 p_1}(\vec{\kappa}) = \int\limits_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\omega \frac{q_0(\omega) q_1(\omega)}{\sin_K^2(\omega)} P_f\left(\frac{\vec{\kappa}}{\sin_K(\omega)}, a\right). \tag{3.35}$$

Dies kann nun in Gleichung (3.32) eingesetzt werden, und wir erhalten die Korrelationsfunktion zwischen den beiden Projektionen p_0 und p_1 als Funktion der Gewichte q_0 und q_1 sowie des Powerspektrums der Funktion f. In unserem Fall ist Gleichung (3.29) die Projektion von $\delta(\vec{\theta}, \omega)$ mit der Gewichtsfunktion $\frac{3\Omega_{\mathrm{m}}^0 G_{\mathrm{Q}}(\omega)}{a(\omega)}$ und Gleichung (3.31) die Projektion von $\delta(\vec{\theta}, \omega)$ mit der Gewichtsfunktion $W_{\mathrm{G}}(\omega)$. Der Einfachheit halber, und um sie übersichtlich zu gestalten, haben wir diese Herleitung mit einheitenlosen Größen durchgeführt. Bei der Berücksichtigung von Einheiten erhalten wir nur einen zusätzlichen Faktor c/H_0 in Gleichung (3.35). Dies kann man auch leicht durch den Vergleich mit den Einheiten der Entfernungen und der Gewichtsfunktionen sehen. Damit lautet diese Gleichung spezialisiert auf die Winkelkorrelationsfunktion von δ und μ

$$P_{\mu\delta}(\vec{\kappa}) = 3\Omega_{\mathrm{m}}^0 \frac{c}{H_0} \int\limits_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\tilde{\omega} \frac{G_{\mathrm{Q}}(\tilde{\omega}) W_{\mathrm{G}}(\tilde{\omega})}{a(\tilde{\omega}) \sin_K^2(\tilde{\omega})} P_\delta\left(\frac{\vec{\kappa}}{\sin_K(\tilde{\omega})}, a\right). \tag{3.36}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (3.32) ein, so erhalten wir die Winkelkorrelationsfunktion von δ und μ

$$\xi_{\mu\delta}(\vec{\phi}) = 3\Omega_{\mathrm{m}}^0 \frac{c}{H_0} \int\limits_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\tilde{\omega} \frac{G_{\mathrm{Q}}(\tilde{\omega}) W_{\mathrm{G}}(\tilde{\omega})}{a(\tilde{\omega}) \sin_K^2(\tilde{\omega})} \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}^2\kappa}{(2\pi)^2} P_\delta\left(\frac{\vec{\kappa}}{\sin_K(\tilde{\omega})}, a\right) \exp(-i\vec{\kappa}\vec{\phi}). \tag{3.37}$$

$\vec{\kappa}$ ist die Fourier-Konjungierte zu dem Winkel $\vec{\phi}$. Wegen der Isotropie des Universums hängt das Spektrum P_δ nur vom Betrag von $\vec{k}$ ab. Aus demselben Grund hängt auch die Korrelationsfunktion nur von $|\vec{\phi}|$ ab. Damit läßt sich das Integral über $\mathrm{d}^2\kappa$ noch in ein Integral über $|\vec{\kappa}|$ und einen Winkel aufteilen, und wir erhalten

$$\xi_{\mu\delta}(\vec{\phi}) = 3\Omega_{\mathrm{m}}^0 \frac{c}{H_0} \int\limits_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\tilde{\omega} \frac{G_{\mathrm{Q}}(\tilde{\omega}) W_{\mathrm{G}}(\tilde{\omega})}{a(\tilde{\omega}) \sin_K^2(\tilde{\omega})} \int\limits_0^{\infty} \frac{\kappa \mathrm{d}\kappa}{2\pi} P_\delta\left(\frac{\kappa}{\sin_K(\tilde{\omega})}, a\right) \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{2\pi} \exp(-i\kappa\phi\cos(\vartheta)), \tag{3.38}$$

wobei ϑ der Winkel zwischen $\vec{\kappa}$ und $\vec{\phi}$ ist. Nun können wir noch das Integral $\mathrm{d}\vartheta$ mit J_0, der nullten Ordnung der Besselfunktion erster Art, identifizieren und erhalten

$$\xi_{\mu\delta}(\phi) = 3\Omega_{\mathrm{m}}^0 \frac{c}{H_0} \int\limits_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\tilde{\omega} \frac{G_{\mathrm{Q}}(\tilde{\omega}) W_{\mathrm{G}}(\tilde{\omega})}{a(\tilde{\omega})} \int\limits_0^{\infty} \frac{k \mathrm{d}k}{2\pi} P_\delta(k, a) J_0(\sin_K(\tilde{\omega}) k\phi), \tag{3.39}$$

wobei ich alle κ's mit der Variablentransformation $\kappa = \sin_K(\omega) k$ auf k umgeschrieben habe. Damit haben wir den gesuchten Ausdruck für die Korrelationsfunktion gefunden.

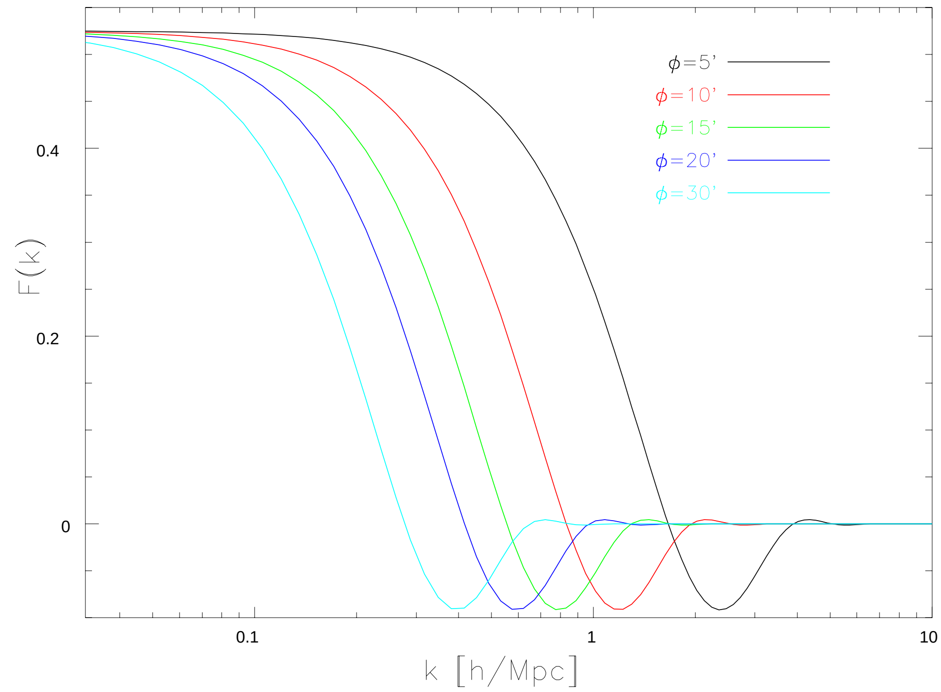


Abbildung 3.4: Filterfunktion $F(k,\phi)$ als Funktion von k für verschiedene Winkel ϕ von 5' bis 30'. Weiter wurden $h = 1.0$, $\Omega_{\mathrm{m}}^0 = 1$ und $\Omega_\lambda^0 = 0$ benutzt.

3.4.2 Evolution der Dichtefluktuationen

In dem Fall, in dem wir nur die lineare Entwicklung des Powerspektrums annehmen wollen, kann diese Gleichung noch einmal vereinfacht werden. Dabei können wir Gleichung (1.72) verwenden, $P_\delta(k,a)$ durch $a^2 g^2(a) P_\delta^0(k)$ ersetzen und erhalten

$$\xi_{\mu\delta}(\phi) = 3\Omega_{\mathrm{m}0}^0 \frac{c}{H_0} \int\limits_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\tilde{\omega} \frac{G_{\mathrm{Q}}(\tilde{\omega}) W_{\mathrm{G}}(\tilde{\omega}) a(\tilde{\omega}) g^2(a(\tilde{\omega}))}{\sin_K^2(\tilde{\omega})} \int\limits_0^\infty \frac{k\mathrm{d}k}{2\pi} P_\delta^0 \left(\frac{k}{\sin_K(\tilde{\omega})} \right) J_0(\sin_K(\tilde{\omega}) k \phi). \tag{3.40}$$

Nach Einführung einer *Filterfunktion* F erhalten wir den anschaulichen Ausdruck

$$\xi_{\mu\delta}(\phi) = \int\limits_0^\infty \frac{k\mathrm{d}k}{2\pi} P_\delta^0(k) F(k,\phi) \tag{3.41}$$

für die Korrelationsfunktion in der linearen Entwicklung. Dabei habe ich F als

$$F(k,\phi) = 3\Omega_0 \frac{c}{H_0} \int\limits_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\tilde{\omega} a(\tilde{\omega}) g^2(a(\tilde{\omega})) G_{\mathrm{Q}}(\tilde{\omega}) W_{\mathrm{G}}(\tilde{\omega}) J_0(\sin_K(\tilde{\omega}) k\phi) \tag{3.42}$$

definiert. Abbildung (3.4) zeigt diese Filterfunktion für einige Winkel. Wie gut zu sehen ist, werden „kleinskalige“ Dichtefluktuationen mit $k \gtrsim 1\frac{h}{\mathrm{Mpc}}$, das entspricht $\lambda \lesssim 1\frac{\mathrm{Mpc}}{h}$, herausgefiltert.

3.5 Zusammenfassung

Abschließend möchte ich noch einmal die Ergebnisse dieses Kapitels darstellen. Auf der Grundlage des Standardmodells für unser Universum, zu dem wir noch die Theorie der Dichtefluktuationen hinzugefügt haben, haben wir die Korrelationsfunktion zwischen der Verstärkung und dem Dichtekontrast konstruiert. Mit Gleichung (3.26) erhalten wir daraus die Korrelatonsfunktion zwischen Galaxien und Quasaren. Dabei gingen die meßbaren Verteilungen von Galaxien und Quasaren ein.

3.5.1 Korrelationsfunktion im nichtlinearen Fall

Für den Fall, daß wir das Powerspektrum $P_\delta(k,a)$ der Dichtefluktuationen zu jedem Zeitpunkt kennen, erhalten wir die Korrelationsfunktion zu:

$$\boxed{\xi_{\mu\delta}(\phi) = 3\Omega_{\mathrm{m}}^0 \frac{c}{H_0} \int\limits_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\tilde{\omega} \frac{G_{\mathrm{Q}}(\tilde{\omega}) W_{\mathrm{G}}(\tilde{\omega})}{a(\tilde{\omega})} \int\limits_0^{\infty} \frac{k\mathrm{d}k}{2\pi} P_\delta(k,a) J_0(\sin_K(\tilde{\omega}) k\phi),}$$

3.5.2 Korrelationsfunktion im linearen Fall

Kennen wir das anfängliche Powerspektrum $P_\delta^0(k)$ der Dichtefluktuationen und nehmen ein lineares Wachstum der Fluktuationen an, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_{\mu\delta}(\phi) &= \int\limits_0^{\infty} \frac{k\mathrm{d}k}{2\pi} P_\delta^0(k) F(k,\phi) \\ F(k,\phi) &= 3\Omega_{\mathrm{m}}^0 \frac{c}{H_0} \int\limits_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\tilde{\omega}\, a(\tilde{\omega}) g^2(a(\tilde{\omega})) G_{\mathrm{Q}}(\tilde{\omega}) W_{\mathrm{G}}(\tilde{\omega}) J_0(\sin_K(\tilde{\omega}) k\phi) \end{aligned}}$$

Kapitel 4

Ergebnisse

In diesem Kapitel will ich die Ergebnisse meiner Berechnungen präsentieren. Dabei beginne ich mit dem Vergleich des Ergebnisses einer Arbeit von Matthias Bartelmann, der die Korrelationsfunktion für einen Spezialfall berechnet hat [Bartelmann 1995]. Dabei werde ich die Vorzüge, die die Korrelationsfunktion als Hilfsmittel zur Bestimmung des kosmologischen Modells hat, aufzeigen. Anschließend werde ich ausführlich die Erweiterungen, die meine Berechnungen kennzeichnen, besprechen. Dies sind die Ergebnisse für die verschiedenen Normierungen des Powerspektrums und seine nichtlineare Entwicklung. Weiter werde ich auch den Einfluß der Parameter h, Ω_{m}^{0} und Ω_{λ}^{0} des kosmologischen Modells besprechen. Danach zeige ich die Abhängigkeit der Korrelationsfunktion von den übrigen in die Berechnung einfließenden Parametern m_{Det}, z_0 und den verschiedenen Parametermengen, die unterschiedliche Autoren zur Beschreibung der Störungsspektren angeben. Ein wichtiges Ergebnis dabei ist der sehr geringe Einfluß dieser Parameter. Für die Gewichtsfunktionen bedeutet dies, daß das Ergebnis nicht von den relativ großen Unsicherheiten in der Bestimmung der Verteilungsfunktionen und in der Bestimmung der Helligkeiten abhängt. Das Ergebnis hängt ebensowenig von der Realisierung der einzelnen Materiemodelle, sondern nur von den physikalischen Eigenschaften der dunklen Materie (z.B. CDM oder HDM) ab. Somit ist die Interpretation meiner Ergebnisse unabhängig von diesen Parametern. Am Ende zeige ich noch eine Messung der Korrelationsfunktion, die ich mit den theoretischen Berechnungen vergleiche, bevor ich meine Arbeit mit einer kurzen Zusammenfassung abschließen will.

4.1 Vergleich mit früheren Rechnungen

Eine Berechnung der Korrelationsfunktion zwischen Galaxien und Quasaren liegt mir nur von Bartelmann ([Bartelmann 1995]) vor. Er berechnete die Korrelationsfunktion für den Spezialfall der linearen Entwicklung des Powerspektrums in einem Einstein-de Sitter-Universum für die Materiemodelle CDM und HDM. Einen weiteren Unterschied zu meiner Arbeit stellen die Leuchtkraftfunktionen für Quasare und Galaxien dar, die in die Arbeit von Bartelmann nur in vereinfachter Form eingegangen sind. Da meine Arbeit mit den genaueren Leuchtkraftfunktionen jedoch seine Ergebnisse gut reproduziert, ist der Einfluß der genaueren Leuchtkraftfunktionen nur gering.

Das Ergebnis für den linearen Fall zeigt uns schon die Möglichkeiten auf, die uns die Korrelationsfunktion zur Bestimmung des kosmologischen Modells bietet. Betrachten wir hierzu Abbildung (4.1), die die von mir berechnete Korrelationsfunktion $\xi_{\mu\delta}$ für die Materiemodelle CDM, MDM und HDM in einem Einstein-de Sitter-Universum mit $h = 0.5$ zeigt. Deutlich zu sehen sind die unterschiedlichen Formen der Korrelationsfunktionen für die verschiedenen Materiemodelle. Während beim CDM-Spektrum die Korrelationsfunktion einen deutlichen Anstieg zu kleinen Winkeln hin zeigt, wird die Korrelationsfunktion für HDM zu kleinen Winkeln hin immer flacher. Die Korrelationsfunktion für das MDM-Spektrum liegt, wie nicht anders zu erwarten, in ihrer Form dazwischen.

Dies ist leicht einzusehen, wenn wir das analytische Ergebnis

$$\xi_{\mu\delta}^{\mathrm{CDM}}(\phi) = D_0 - D_1\phi + D_2\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3) \tag{4.1}$$

$$\xi_{\mu\delta}^{\mathrm{HDM}}(\phi) = C_0 - C_2\phi^2 + \mathcal{O}(\phi^4) \tag{4.2}$$

aus der Arbeit von Bartelmann ([Bartelmann 1995]) betrachten. Die Konstanten D_i und C_i lassen sich als

$$D_0, D_1, D_2 = \frac{3A_{\mathrm{CDM}}k_0^3}{2}\left\{K_0, \frac{4K_1k_0}{\pi}, \frac{3K_2k_0^2}{4}\right\} \tag{4.3}$$

$$C_0, C_2 = \frac{12A_{\mathrm{HDM}}}{\pi\lambda_{\mathrm{eq}}^3}\left\{K_0, \frac{3K_2}{\lambda_{\mathrm{eq}}^2}\right\} \tag{4.4}$$

schreiben, wobei die K_i als

$$K_i = \int_0^1 \omega^i(1-\omega)^2 G_{\mathrm{Q}}(\omega)W_{\mathrm{G}}(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{4.5}$$

zu verstehen sind. Vernachlässigen wir für $\phi \to 0$ alle höheren Ordnungen in ϕ, so sehen wir, daß wir für die Korrelationsfunktion des HDM-Spektrums aus Gleichung (4.2) eine

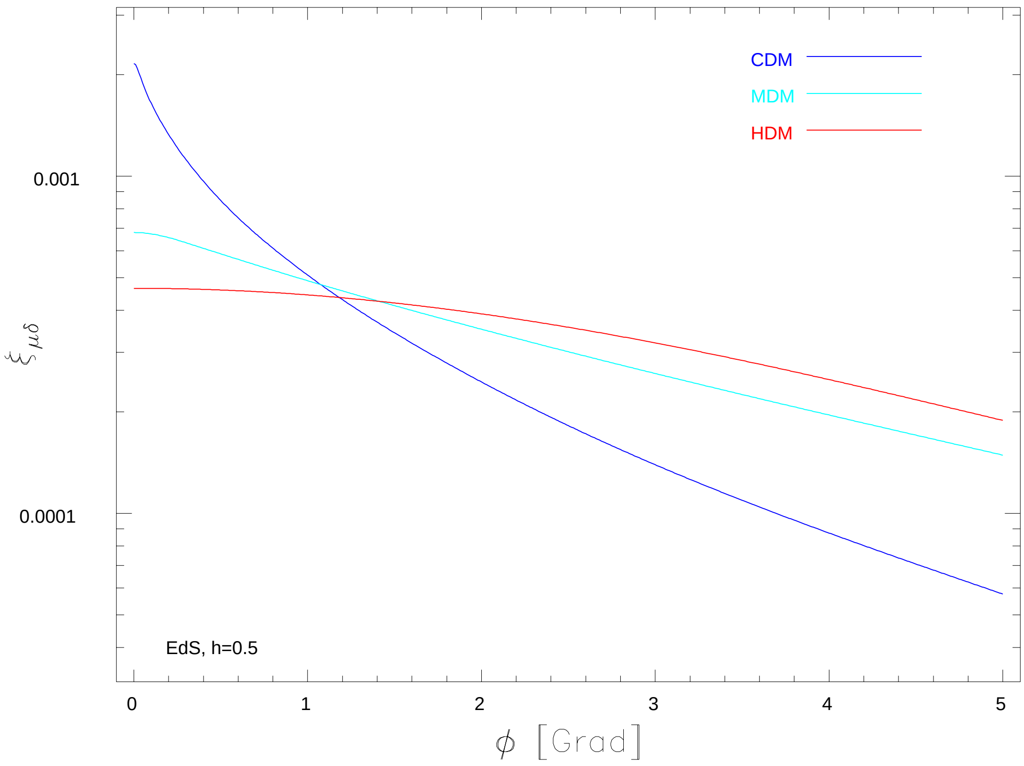


Abbildung 4.1: Korrelationsfunktion in einem Einstein-de Sitter-Universum mit $h = 0.5$ für verschiedene Materiemodelle. Das Powerspektrum wurde linear entwickelt und auf $\sigma_8 = 1$ normiert. Weiter ist $m_{\mathrm{Det}} = 20.5$ und $z_0 = 0.3$.

Konstante bekommen. Für das CDM-Spektrum dagegen liefert uns Gleichung (4.1) die Steigung D_1 für die Korrelationsfunktion kleiner Winkel.

Die Amplitude[1] der Korrelationsfunktion liegt dabei noch deutlich unter der gemessenen Amplitude, so daß bisher oft die Meinung vertreten wurde, der Gravitationslinseneffekt sei als Erklärung für die gemessene Korrelation von Galaxien und Quasaren nicht ausreichend ([Benítez, Martínez-González, 1995]). Ich werde später zeigen, daß dies bei Berücksichtigung der nichtlinearen Entwicklung des Powerspektrums nicht mehr der Fall ist. Der Einfluß der Parameter des kosmologischen Modells ändert, wie wir später sehen werden, nicht den unterschiedlichen Verlauf für verschiedene Materiemodelle, so daß diese weiterhin gut zu unterscheiden sind. Dies unterstreicht nochmals die Möglichkeit, die Korrelationsfunktion als Hilfsmittel zur Bestimmung der Art der dunklen Materie, die unser Universum ausfüllt, heranzuziehen.

[1] Damit ist $\xi_{\mu\delta}(0)$ gemeint.

4.2 Neue Ergebnisse

Bis zu diesem Punkt haben meine Berechnungen die bisherigen bestätigt. Nun möchte ich die neuen Ergebnisse besprechen, die sich unter Berücksichtigung von verschiedenen Normierungen der Dichtefluktuationen, von nichtlinearen Effekten der zeitlichen Entwicklung dieser Fluktuationen und von den verschiedenen kosmologischen Parametern ergeben.

4.2.1 Normierung und nichtlineare Entwicklung

Anschaulich gesprochen, fixieren die verschiedenen Normierungen das Powerspektrum, dessen funktionalen Verlauf ich in Kapitel (1.3.2) motiviert habe, bei den Wellenzahlen, an denen sie gemessen werden. COBE fixiert das Spektrum bei großen Strukturen (= kleinen Wellenzahlen), während die σ_8- und die Cluster-Normierung das Spektrum bei jeweils unterschiedlichen, jedoch viel größeren Wellenvektoren festlegen[2]. Wie schon erwähnt wurde, sind diese Normierungen meist nicht äquivalent. Da die Amplitude der Korrelationsfunktion gegenüber diesen Variationen relativ empfindlich ist, d.h. eine starke Abhängigkeit besitzt, muß die korrekte Normierung aus anderen, astrophysikalischen Überlegungen festgelegt werden, bevor aus der Amplitude der Korrelationsfunktion quantitative Schlüsse gezogen werden können. So ist sie für die COBE-Normierung um einen Faktor ≈ 10 größer als bei der Cluster-Normierung. Für die $\sigma_8 = 1$-Normierung ergibt sich eine Amplitude, die zwischen diesen zwei Extremfällen liegt. Dies wird durch Abbildung (4.2) verdeutlicht, in der durch die gestrichelten Linien die Korrelationsfunktionen für die nichtlineare Entwicklung der Dichtefluktuationen dargestellt sind. Dargestellt sind CDM-Modelle (links) und HDM-Modelle (rechts) für die COBE-Normierung (grün), $\sigma_8 = 1$-Normierung (blau) und die Cluster-Normierung (rot). Trotz dieser Unterschiede aufgrund der verschiedenen Normierungen bleiben qualitative Schlüsse, wie ich sie im vorigen Abschnitt aus der Form der Korrelationsfunktion gezogen habe, unverändert.

Die Berücksichtigung des nichtlinearen Wachstums der Dichtefluktuationen bewirkt eine wichtige Änderung im Ergebnis. Die Korrelationsfunktion wird dadurch, unabhängig vom verwendeten Materiemodell, zu kleinen Winkeln hin wesentlich steiler. Dies führt dazu, daß die Amplitude für die Korrelationsfunktion für HDM-Modelle, abhängig von der gewählten Normierung, bis zu ≈ 3 mal größer ist als in der linearen Entwicklung. Das interresantere Ergebnis erhalten wir jedoch für das CDM-Spektrum. Die Korrelationsfunktion ist in diesem Fall in allen Normierungen um einem Faktor von ≈ 10 größer als im Fall der linearen Entwicklung. Dies ist insbesondere deswegen wichtig, da es zeigt, daß der Gravi-

[2] Dies ist besonders deutlich in Abbildung (1.3) zu sehen.

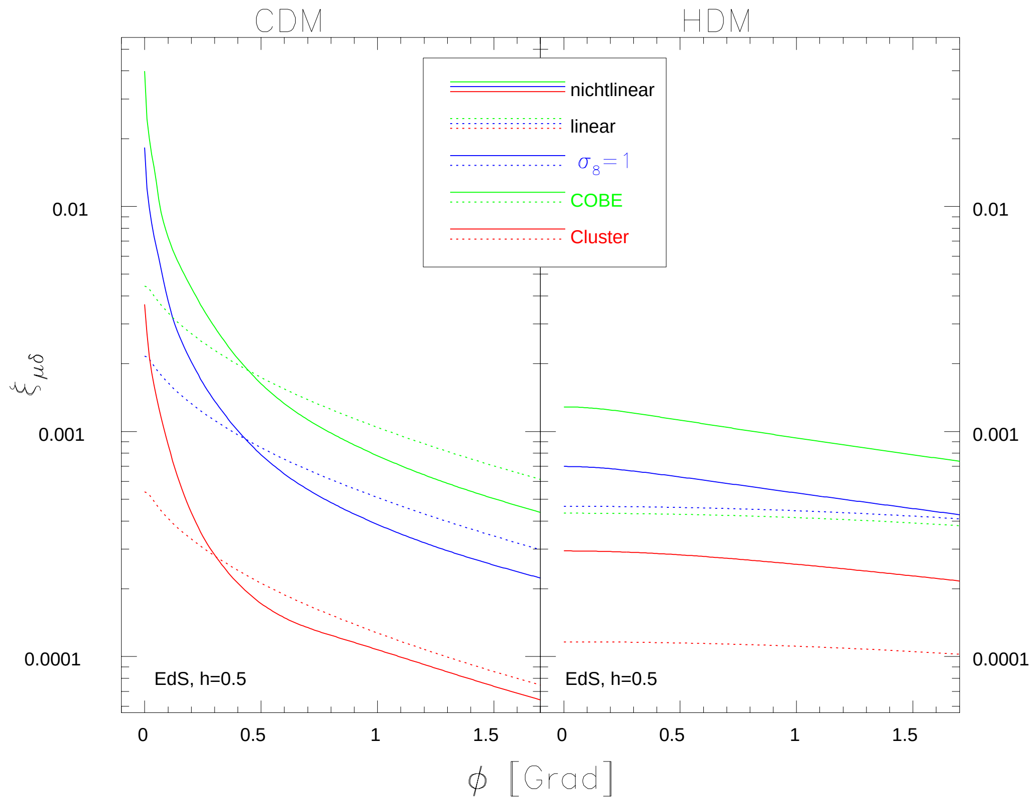


Abbildung 4.2: Vergleich der linearen mit der nichtlinearen Entwicklung des Powerspektrums anhand der Korrelationsfunktionen auf kleinen Winkel für die Materiemodelle CDM (links) und HDM (rechts). Die Korrelationsfunktionen sind für ein Einsten-de Sitter Universum mit $h = 0.5$ für die drei verschiedenen Normierungen, COBE (grün), $\sigma_8 = 1$ (blau) und Cluster (rot) aufgetragen. Es wurde $m_{\rm Det} = 20.5$ und $z_0 = 0.3$ verwendet.

tationslinseneffekt nicht zu klein ist, um die gemessene Korrelationsfunktion zu erklären, sondern daß bisher einfach noch nicht alle wichtigen Effekte berücksichtigt worden waren. Dies ist deutlich in Kapitel (4.4) zu sehen, wo ich meine Berechnungen mit den Messungen vergleiche. Da somit durch die Berücksichtigung des nichtlinearen Wachstums der Dichtefluktuationen eine Erklärung der beobachteten Korrelation von Galaxien und Quasaren möglich geworden ist, ist es sinnvoll, weitere Schlüsse aus dieser berechneten Korrelationsfunktion zu ziehen. Als erstes ist hierbei zu erwähnen, daß die gemessene Korrelationsfunktion zu kleinen Winkeln hin sehr stark ansteigt, und somit durch ein HDM-Modell nicht beschrieben werden kann. Aus diesem Grund möchte ich meine weiteren Diskusionen auf die Ergebnisse für CDM-Modelle beschränken.

In Abbildung (4.2) sind zum Vergleich die Korrelationsfunktionen für die lineare Entwicklung der Dichtefluktuationen (gepunktete Linien) und die nichtlineare Entwicklung der Dichtefluktuationen (durchgezogene Linien) in einem Einstein-de Sitter-Universum mit $h = 0.5$ dargestellt. Links wurden CDM-Modelle verwendet, während rechts die Korrelationsfunktion für HDM-Modelle dargestellt wird. Die verschiedenen Farben repräsentieren die drei verschiedenen, gängigen Normierungen; COBE-Normierung (grün), $\sigma_8 = 1$-Normierung (blau) und die Cluster-Normierung (rot). Da der interessante Teil der Korrelationsfunktion bei kleineren Winkeln liegt, habe ich die Winkelskala entsprechend angepaßt. Abgesehen von der COBE- und $\sigma_8 = 1$-Normierung für HDM[†] zeigt diese Abbildung das große Problem der Normierung des Powerspektrums. Gut zu sehen ist, daß die Normierungen mittels COBE, $\sigma_8 = 1$ und der Clusterhäufigkeit nicht äquivalent sind und sich somit auch deutlich verschiedene Korrelationsfunktionen ergeben. Ebenfalls gut zu erkennen ist der stark unterschiedliche Verlauf der Korrelationsfunktion zu kleinen Winkeln hin für verschiedene Materiemodelle. Dies ist eine Grundeigenschaft der Korrelationsfunktion, denn sie bleibt für jede Wahl von möglichen anderen Parametern erhalten.

4.2.2 Ergebnisse für verschiedene Kosmologien

In diesem Abschnitt möchte ich die Ergebnisse für verschiedene Parameter des kosmologischen Modells präsentieren. Diese Abhängigkeiten sind unterschiedlich, je nachdem welche Normierung für das Powerspektrum der Fluktuationen gewählt wird. Dies liegt daran, daß die einzelnen Normierungen selbst unterschiedlich stark von diesen Parametern abhängen. So gibt z.B. die Normierung nach der Clusterhäufigkeit einen Wert für σ_8 der von Ω^0_{m} und Ω^0_λ abhängt[3], während die Normierung $\sigma_8 = 1$ per Definition nicht von den Parametern des kosmologischen Modells abhängt.

Beginnen möchte ich mit dem Vergleich der Korrelationsfunktion für verschiedene kosmologische Modelle. Abbildung (4.3) zeigt die Korrelationsfunktion für die nichtlineare Entwicklung der Dichtefluktuationen, wobei die unterschiedlichen verwendeten Farben die drei gängigen Normierungen kennzeichnen. Links sind mit unterschiedlichen Linienarten die Wrgebnisse für $h = 0.5$ in einem Einstein-de Sitter-Universum, einem flachen Universum mit niedriger Dichte und einem offenen Universum dargestellt. Rechts sind durch die verschiedenen Linienarten die verschiedenen Korrelationsfunktionen für verschiedene Werte der Hubblekonstante h in einem Einstein-de Sitter-Universum abgebildet. Um die Darstellung übersichtlich zu halten, habe ich den rechten Graphen anders als den linken skaliert. Die Korrelation von Galaxien und Quasaren ist dabei um so stärker, je größer die Summe von Ω^0_{m} und Ω^0_λ ist. Dabei überwiegt Ω^0_{m}, so daß die Korrelation in einem

[†]Für HDM sind die mittels COBE und die mittels σ_8 normierten Spektren äquivalent.

[3]Vergleiche hierzu Gleichungen (1.68) und (1.69).

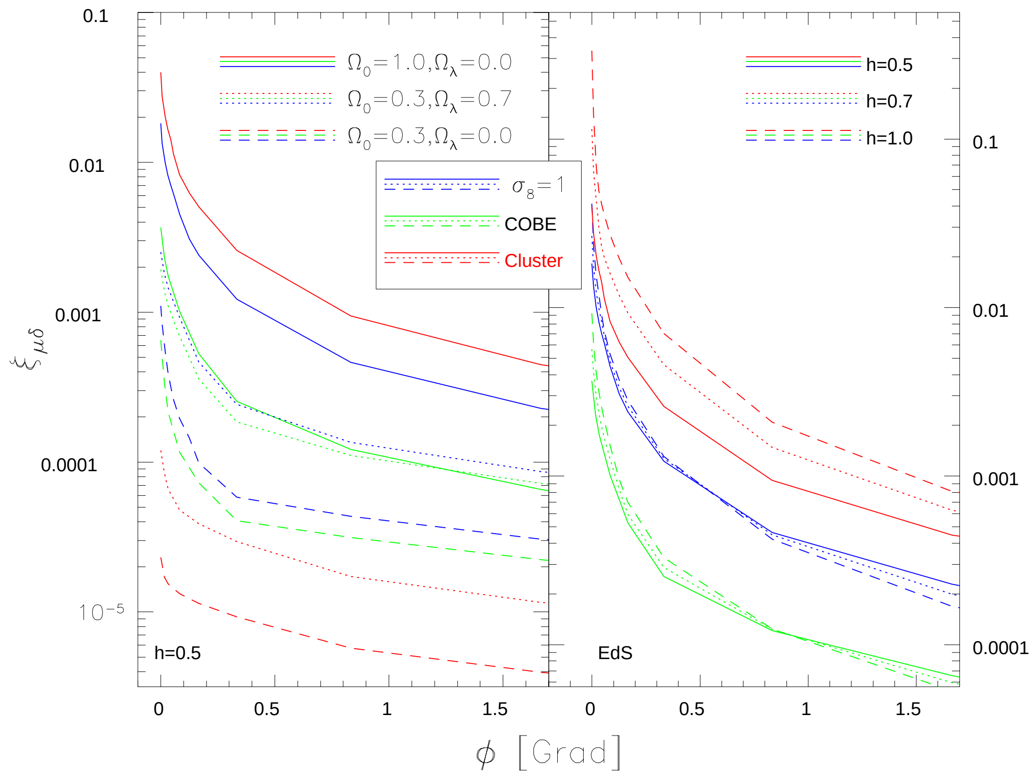


Abbildung 4.3: CDM-Korrelationsfunktionen für verschiedene Kosmologien (dargestellt durch die verschiedenen Linienarten) in allen drei Normierungen (dargestellt durch die verschiedenen Farben). Links für $h = 0.5$ der Vergleich eines Einstein-de Sitter-Universums (durchgezogene Linien) mit einem flachen Universum mit niedriger Dichte (gepunktete Linien) und einem offenen Universum (gestrichelte Linien). Rechts in einem Einstein-de Sitter-Universum der Vergleich von $h = 0.5$ (durchgezogene Linien) mit $h = 0.7$ (gepunktete Linien) und $h = 1.0$ (gestrichelte Linien). Man beachte die unterschiedlichen Skalierungen ! Weiter wurde $m_{\rm Det} = 20.5$ und $z_0 = 0.3$ verwendet.

flachen Universum um so größer ist, je größer $\Omega_{\rm m}^0$ ist. Wir erhalten weiter eine geringere Korrelation, wenn wir den Wert für die Hubblekonstante verkleinern.

Einer detaillierteren Beschreibung der Abhängigkeiten möchte ich eine kleine Abschätzung voranstellen. Bartelmann ([Bartelmann 1995]) veröffentlichte die Reihenentwicklung (4.1) der Korrelationsfunktion für ein CDM-Spektrum mit linearer zeitlicher Entwicklung. Für $\phi = 0$ reduziert sich diese Entwicklung auf

$$\xi_{\mu\delta}^{\rm CDM}(0) = D_0, \tag{4.6}$$

wobei sich die Konstante D_0 aus Gleichung (4.3) als

$$D_0 = \frac{3A_{\mathrm{CDM}}k_0^3}{2}K_0 \tag{4.7}$$

schreiben läßt. Aus Gleichung (4.5) sehen wir, daß sich K_0 im wesentlichen auf ein Integral über die Gewichtsfunktionen reduziert. Da uns die Abhängigkeit der Amplitude der Korrelationsfunktion von den Parametern des kosmologischen Modells interessiert, werfen wir erst einmal einen Blick darauf, was sich an dieser Entwicklung bei der Berücksichtigung dieser Parameter ändert und wie die einzelnen Faktoren von diesen Parametern abhängen. Als erstes bekommen wir aus der Poisson-Gleichung (1.89) einen zusätzlichen Faktor Ω_{m}^0 in Gleichung (4.3), da in der Arbeit von Bartelmann Ω_{m}^0 auf eins gesetzt wurde. Da die Amplitude der Korrelationsfunktion einheitenlos ist, heben sich die Abhängigkeiten aller Größen, die sich aufgrund der Skalierung als Längen ergeben, gegenseitig auf. Die Abhängigkeit von k_0 von diesen Parametern kann laut Gleichung (1.67) als $k_0 \propto \Omega_{\mathrm{m}}^0 h$ geschrieben werden. Die Abhängigkeit der Amplitude A_{CDM} läßt sich leider nicht so leicht abschätzen, da sie auch noch von der Normierung abhängt. Die Konstante K_0 ist im wesentlichen ein Integral über die Gewichtsfunktionen, deren Abhängigkeiten von den kosmologischen Parametern sich auch nicht so einfach abschätzen lassen. Wir erwarten also grob die Abhängigkeit

$$\xi_{\mu\delta}^{\mathrm{CDM}}(0) \propto \left(\Omega_{\mathrm{m}}^0\right)^4 h^3 \times [A_{\mathrm{CDM}}] \times [K_0] \tag{4.8}$$

der Amplitude der Korrelationsfunktion von Ω_{m}^0 und h. Damit läßt sich die große Abhängigkeit bei der COBE-Normierung erklären, die einen Teil der nun folgenden Ergebnisse ist.

Beginnen möchte ich mit der Darstellung der Abhängigkeit der berechneten Amplitude von der Hubblekonstanten H_0. Dazu zeigt Abbildung (4.4) die Amplitude für verschiedene Werte von H_0. Aufgetragen ist links der Fall für die lineare Entwicklung des Powerspektrums und rechts für die nichtlineare Entwicklung. Dabei habe ich eine unterschiedliche Skalierung verwendet, um die Abbildung übersichtlicher zu gestalten. Aus der doppellogarithmischen Darstellung läßt sich die Abhängigkeit für die verschiedenen Normierungen als

$$\begin{aligned} \xi_{\mu\delta}(0) &\propto H_0^{3.2} \quad \text{für COBE-Normierung,} \\ \xi_{\mu\delta}(0) &\propto H_0^{1.1} \quad \text{für } \sigma_8 = 1\text{-Normierung,} \\ \text{und} \quad \xi_{\mu\delta}(0) &\propto H_0^{1.3} \quad \text{für Cluster-Normierung} \end{aligned} \tag{4.9}$$

ablesen. Dabei bestehen keine unterschiedlichen Abhängigkeiten für die lineare und die nichtlineare Entwicklung. Aus diesem Grund werde ich fortan immer nur noch die nichtlineare Entwicklung des Powerspektrums behandeln.

Weiter möchte ich die Abhängigkeit der Amplitude der Korrelationsfunktion von den Dichteparametern Ω_{m}^0 und Ω_λ^0 näher betrachten. Hierzu zeigt Abbildung (4.5) in einer

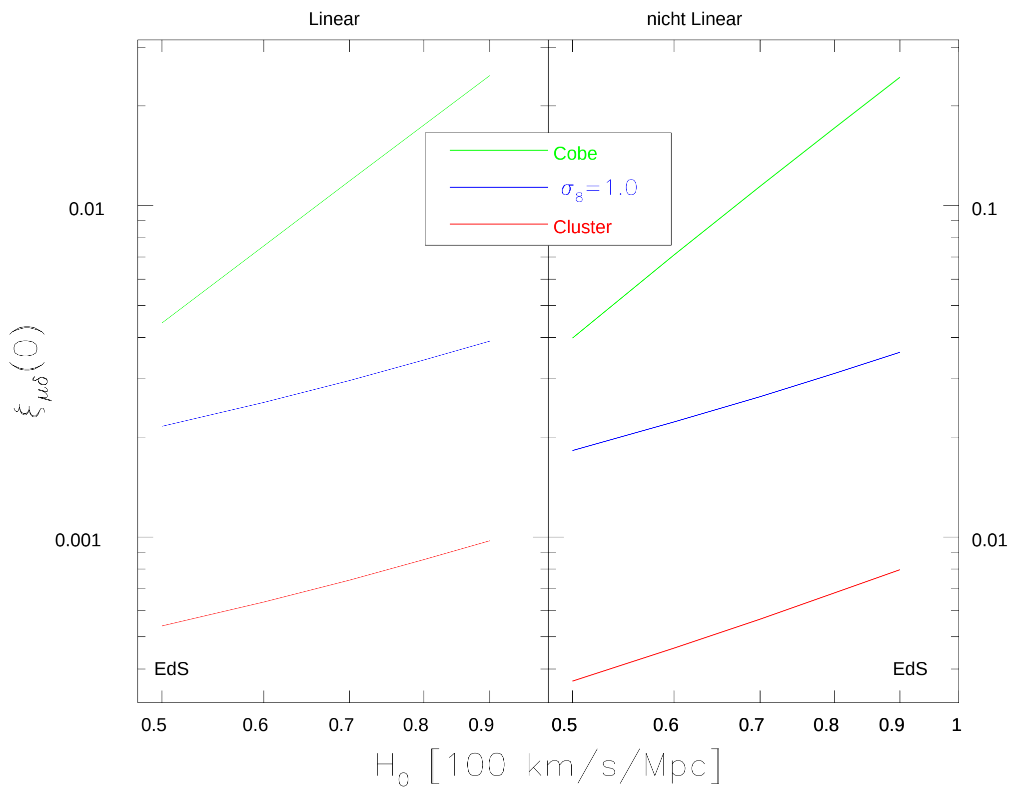


Abbildung 4.4: Amplitude der CDM Korrelationsfunktionen im linearen (links) und nichtlineren Fall (rechts) für verschiedene Hubblekonstanten. Es wird die Abhängigkeit bei allen drei Normierungen gezeigt. Es wurden $\Omega_{\mathrm{m}}^0 = 1.0$, $\Omega_\lambda^0 = 0.0$, $m_{\mathrm{Det}} = 20.5$ und $z_0 = 0.3$ verwendet. Man beachte die verschiedenen Skalierungen der beiden Graphen !

doppellogarithmischen Darstellung deren Abhängigkeit von dem Dichteparameter Ω_{m}^0 in einem offenen Universum mit $\Omega_\lambda^0 = 0$ (links) und in einem stets flachen Universum mit $\Omega_{\mathrm{m}}^0 + \Omega_\lambda^0 = 1$ (Mitte). Der rechte Graph zeigt die Abhängigkeit der Amplitude von der kosmologischen Konstante Ω_λ^0 in einem offenen Universum. Für die verschiedenen Normierungen und $h = 0.5$ lassen sich die Abhängigkeiten

$$\begin{aligned}
&\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\mathrm{m}}^0}^{4.2} && \text{für COBE-Normierung,} \\
&\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\mathrm{m}}^0}^{2.0} && \text{für } \sigma_8 = 1\text{-Normierung,} \\
\text{und}\quad &\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\mathrm{m}}^0}^{1.4} && \text{für Cluster-Normierung}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

in einem offenen Universum, sowie

$$\begin{aligned}
&\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\mathrm{m}}^0}^{3.9} && \text{für COBE-Normierung,} \\
&\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\mathrm{m}}^0}^{1.7} && \text{für } \sigma_8 = 1\text{-Normierung,} \\
\text{und}\quad &\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\mathrm{m}}^0}^{0.9} && \text{für Cluster-Normierung}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

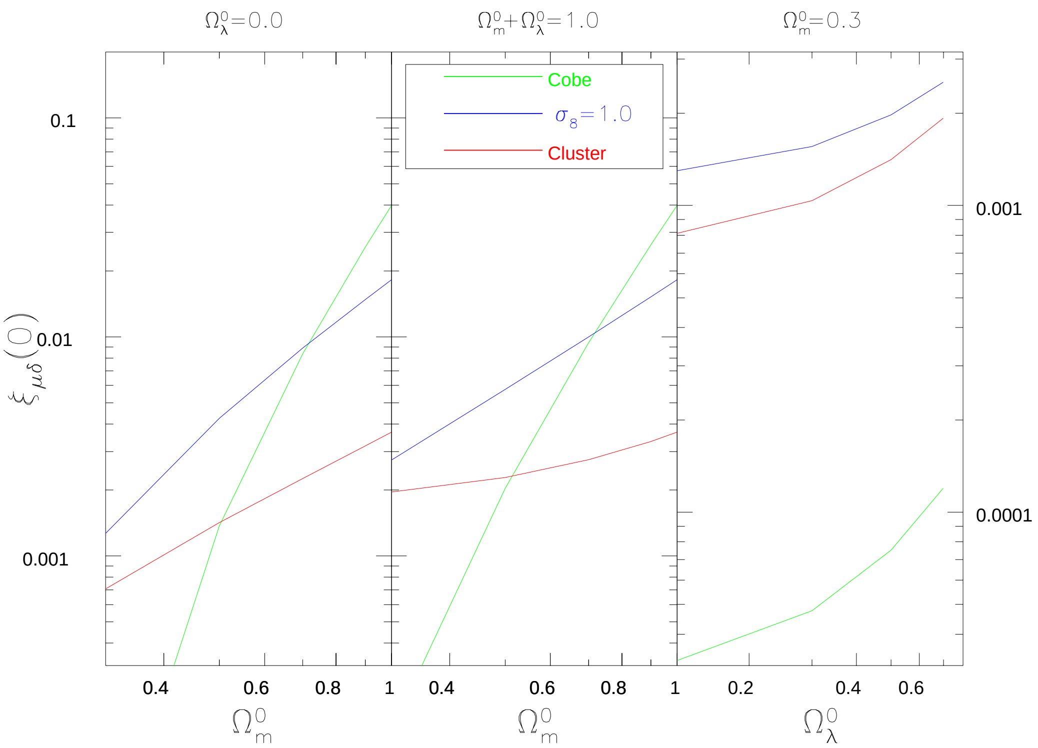


Abbildung 4.5: CDM-Korrelationsfunktionen für kleine Winkel und verschiedene $\Omega^0_{\rm m}$ in einem flachen Universum mit $\Omega^0_\lambda = 0$ (links) und in einem flachen Universum mit $\Omega^0_{\rm m} + \Omega^0_\lambda = 1$ (Mitte). Rechts ist die Abhängigkeit der Amplitude von der kosmologischen Konstannte Ω^0_λ dargestellt. Es wird die Abhängigkeit bei allen drei Normierungen gezeigt. Es wurden $h = 0.5$, $\Omega^0_\lambda = 0.0$, $m_{\rm Det} = 20.5$ und $z_0 = 0.3$ verwendet. Man beachte die unterschiedliche Skalierungen der Graphen !

in einem flachen Universum mit niedriger Dichte ablesen. Dabei ist zu beachten, daß die Abhängigkeit von der kosmologischen Konstante Ω^0_λ erst bei größeren Werten von Ω^0_λ signifikant wird. Für die Werte

$$\begin{aligned} &\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega^0_\lambda}^{1.4} \quad \text{für COBE-Normierung,} \\ &\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega^0_\lambda}^{1.7} \quad \text{für } \sigma_8 = 1\text{-Normierung,} \\ \text{und} \quad &\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega^0_\lambda}^{0.9} \quad \text{für Cluster-Normierung} \end{aligned} \tag{4.12}$$

wurde die Steigung bei $\Omega^0_\lambda \approx 0.6$ bestimmt.

4.3 Abhängigkeit der Korrelationsfunktion von den Modellparametern

Da die Korrelationsfunktion die Materiemodelle wie CDM und HDM so gut unterscheidet, stellt sich die Frage, wie stark die Korrelationsfunktion von den einzelnen, publizierten Parametersätzen für diese Materiemodelle abhängt. Abbildung (4.6) zeigt die Korrelationsfunktionen für die verschiedenen Parametersätze, links für CDM, rechts für HDM, in einem Einstein-de Sitter-Universum für $h = 0.5$. Die verschiedenen Autoren für die Parametersätze können aus der Tabelle (B.1) in Anhang (B.1) entnommen werden. Wie gut zu sehen ist, ist die Abhängigkeit von den verschiedenen Veröffentlichungen nur sehr gering. Für die bisher gezeigten Ergebnisse habe ich immer die Parametermengen CDM_2 und HDM_2 benutzt.

Durch Auswahl der Galaxien aufgrund ihrer Helligkeit verschiebt sich die mittlere Rot-

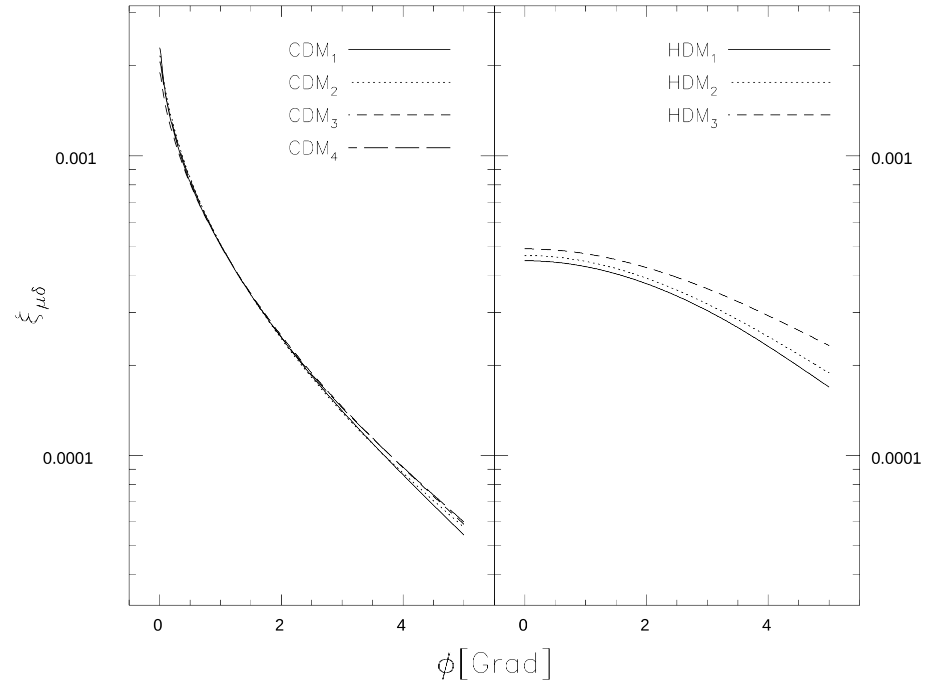


Abbildung 4.6: Korrelationsfunktionen für verschiedene Modellspektren in einem Einstein-de Sitter-Universum mit $h = 0.5$. Links sind CDM-Spektren verschiedener Autoren dargestellt, während rechts verschiedene HDM-Spektren abgebildet sind. Die Spektren sind alle auf $\sigma_8 = 1$ normiert. Weiter wurden $m_{\mathrm{Det}} = 20.5$ und $z_0 = 0.3$ benutzt.

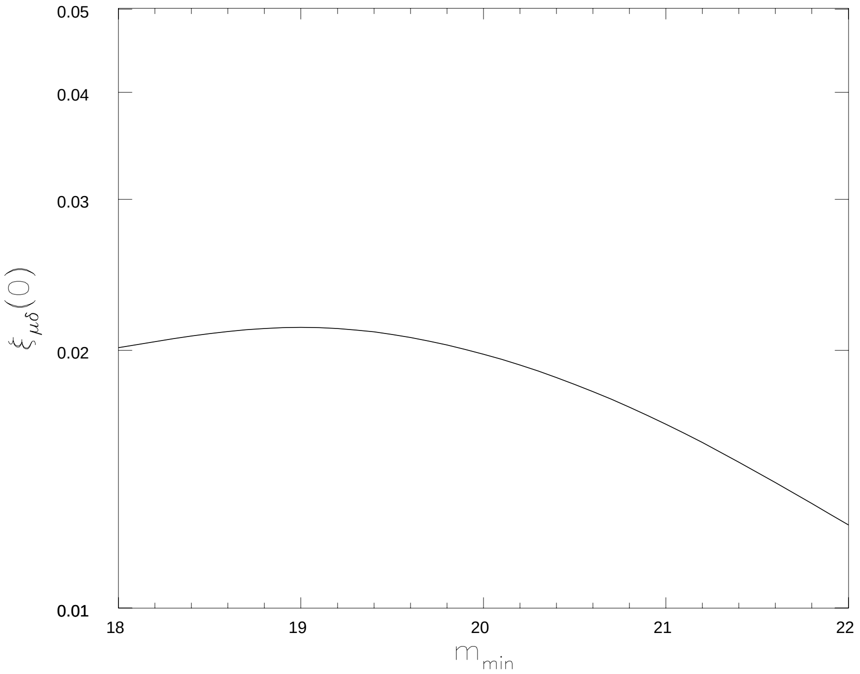


Abbildung 4.7: Amplitude der Korrelationsfunktionen für verschiedene Helligkeiten von Galaxien in einem Einstein-de Sitter-Universum mit $h = 0.5$. Die Spektren sind alle auf $\sigma_8 = 1$ normiert, und es wurde $z_0 = 0.3$ benutzt.

verschiebung der Galaxienverteilung[4]. Dies wurde schon im Kapitel (2.2.3) in Abbildung (2.1) dargestellt. Da die Effizienz des Gravitationslinseneffekts von der Geometrie und damit von der Rotverschiebung der Quellen und der Linsen abhängt, ändert sich die Amplitude der Korrelationsfunktion bei einer Änderung der Galaxienverteilung. Für den Fall, daß die Quellen, d.h. in unserem Fall die Quasare, bei einer Rotverschiebung von $z \approx 1.5$ liegen[5], ist die Effizienz für Gravitationslinsen bei $z \approx 0.3$[‡] am größten. Dies spiegelt sich in dem Maximum der Amplitude der Korrrelationsfunktion in Abbildung (4.7) bei $m \approx 19$ wieder. Insgesamt ist die Abhängigkeit von der gewählten Mindesthelligkeit der Galaxien jedoch sehr gering.

Auch der Parameter z_0 für die Quasare hat einen Einfluß auf die Korrelationsfunktion. Er beeinflußt, wie schon in Kapitel (2.3.2) in Abbildung (2.2) gezeigt, die Vertei-

[4] Je schwächere Galaxien berücksichtigt werden, umso mehr Galaxien befinden sich bei großen Rotverschiebungen z.

[5] Vergleiche hierzu Abbildung (2.2).

[‡] Vergleiche hierzu Abbildung (2.1).

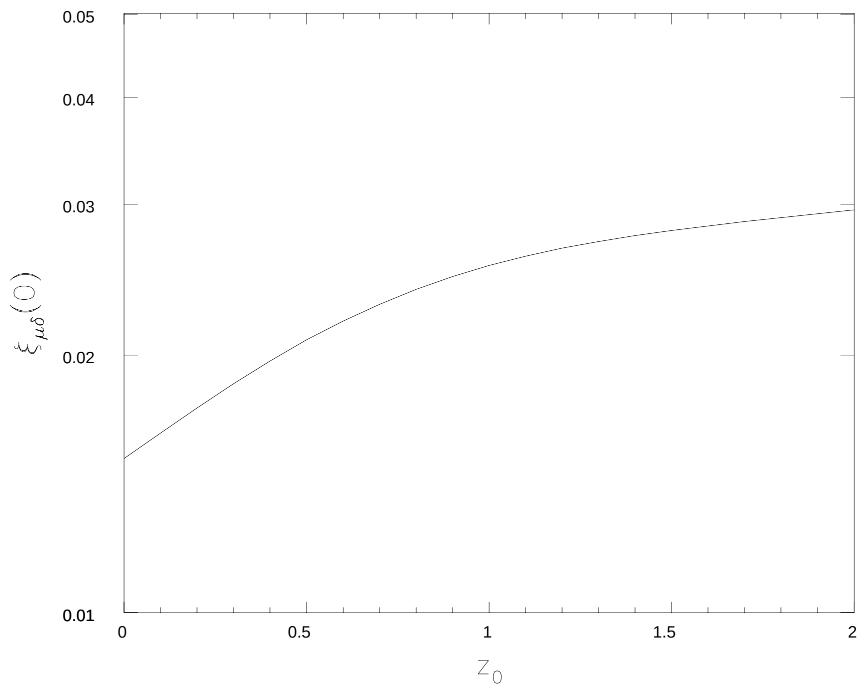


Abbildung 4.8: Amplitude der Korrelationsfunktionen für verschiedene Rotverschiebungen von Quasaren in einem Einstein-de Sitter-Universum mit $h = 0.5$. Die Spektren sind alle auf $\sigma_8 = 1$ normiert und es wurde $m_{\mathrm{Det}} = 20.5$ benutzt.

lungsfunktion der Quasare. Damit wird die Effizienz des Linseneffekts analog wie bei der Galaxienverteilung verändert. Abbildung (4.8) zeigt die Abhängigkeit der Amplitude der Korrelationsfunktion von dem Parameter z_0 bei konstantem m_{Det}. Diese zeigt den Anstieg der Effizienz des Linseneffekts für den verwendeten Parameterbereich. Insgesamt ist jedoch auch diese Abhängigkeit sehr gering. Wir müssen uns jedoch darüber im klaren sein, daß wenn wir die berechnete Korrelationsfunktion mit der gemessenen vergleichen, dies trotzdem einen nicht unerheblichen Einfluß haben kann. Da derartige Messungen nicht vollständig[6] sind, können sich die Verteilungen der Galaxien und Quasare, die für die Messung verwendet werden, stark von den Verteilungen, die aus viel größeren Katalogen gewonnen wurden, unterscheiden[7]. Betrachten wir Abbildung (4.6) und (4.7), so kann sich die Korrelationsfunktion aufgrund dieser Unsicherheit um den Faktor ≈ 2 ändern.

[6]Die Messung von Benítez et al. beruhen auf der Beobachtung von 144 Quasaren

[7]Bei derartigen Messungen können auch Selektionseffekte bei der Auswahl der betreffenden Objekte sehr maßgeblich werden.

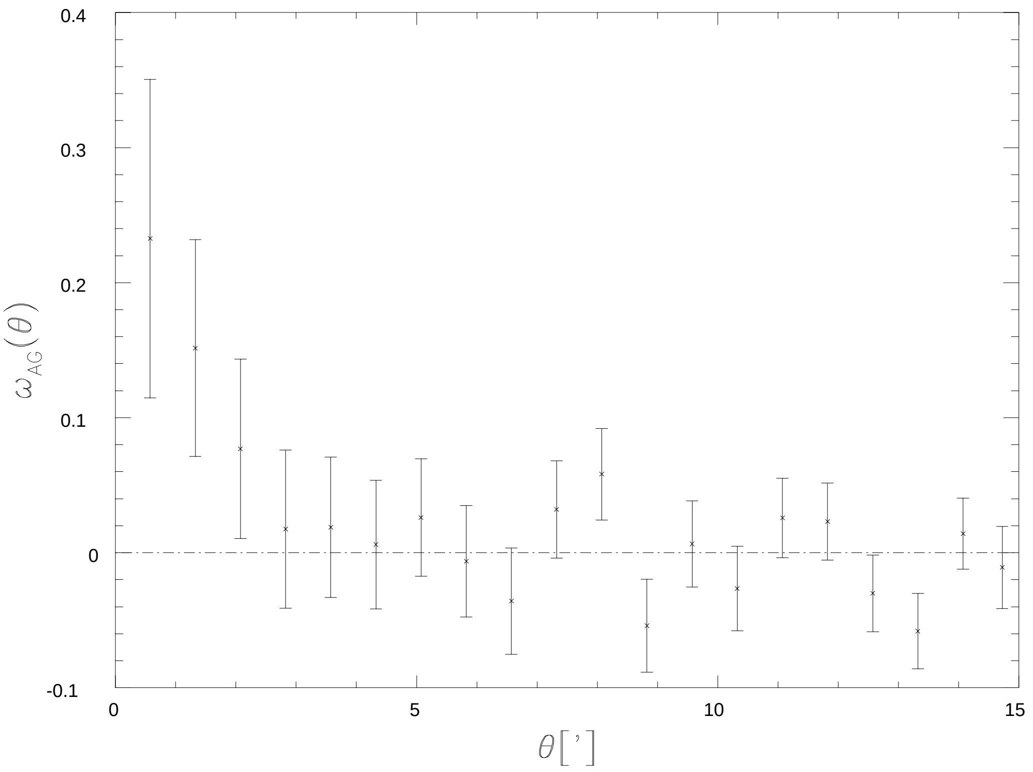


Abbildung 4.9: Messung der Überdichte von Galaxien in der Nähe von Quasaren, die Benítez et al. 1996 durchgeführt haben.

4.4 Vergleich mit Messungen

Die beste und aussagekräftigste mir bekannte Messung der Korrelation von Galaxien und Quasaren ist die von Benítez et al. ([Benítez, Martínez-González, 1995]). Sie zählen die Anzahl $N_{\mathrm{G}}^{f}(\phi)$ der Galaxien in Ringen mit einem mittleren Abstand ϕ von den Positionen der Quasare und bestimmen daraus die Korrelationsfunktion $\omega_{\mathrm{AG}}(\phi)$ als Mittelwert über alle Quasare nach der Formel

$$\omega_{\mathrm{AG}}(\phi) = \sum_{f} \frac{N_{\mathrm{G}}^{f}(\phi)}{N_{\mathrm{exp}}^{f}(\phi)} - 1. \tag{4.13}$$

Dies ist jedoch nicht exakt der Ausdruck, den ich bestimmt habe. Um diese Messung mit meinen Ergebnissen vergleichen zu können, benötigen wir den Zusammenhang[8]

$$\omega_{\mathrm{AG}}(\phi) = \frac{2}{\theta_2^2 - \theta_1^2} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \mathrm{d}\theta \; \xi_{\mathrm{QG}}(\theta) = \frac{2}{\theta_2^2 - \theta_1^2} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \mathrm{d}\theta \; (-1-a) b \; \xi_{\mu\delta}(\theta) \tag{4.14}$$

[8]Mehr hierzu siehe Anhang (A.5).

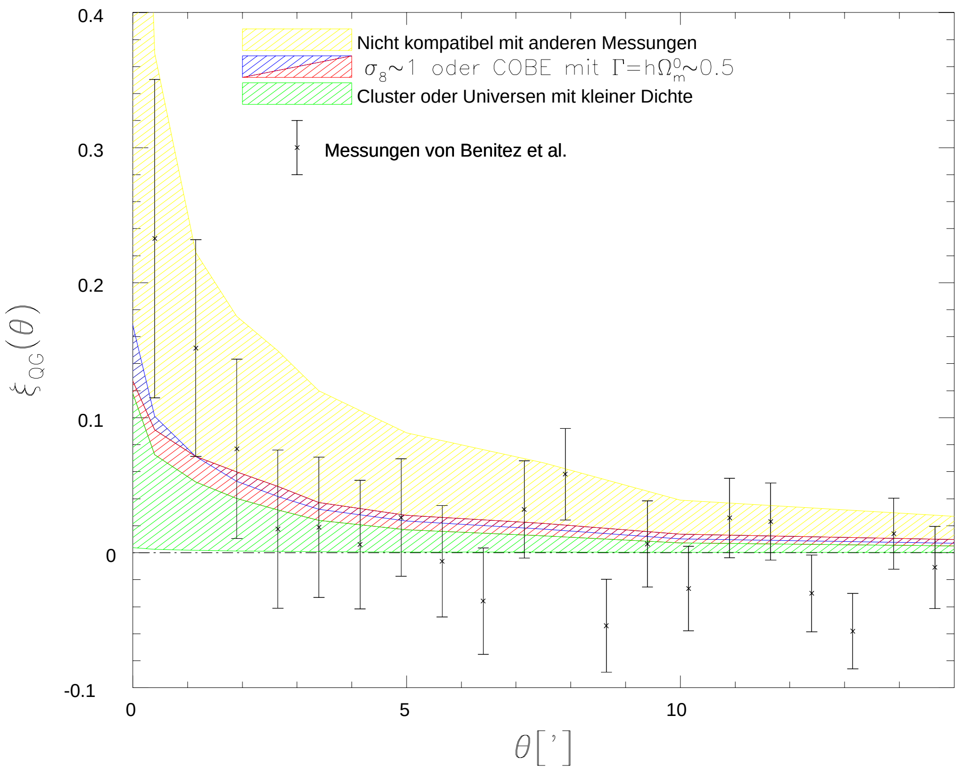


Abbildung 4.10: Vergleich der gemessenen Korrelelationsfunktion ω_{AG} mit theoretischen Kurven. Der gelbe Bereich kennzeichnet Korrelationsfunktionen, die aufgrund der Kombination von Parametern für die verwendeten Modelle im Widerspruch zu existierenden Messungen dieser Kombination von kosmologischen Parametern im Zusammenhang mit der verwendeten Normierung stehen. Der rote und blaue Bereich kennzeichnet Modelle mit realistischen Parameterkombinationen, die noch nahe an den Messwerten liegen. Der grüne Bereich kennzeichnet Modelle, die weit unter den Meßungen liegen. Dabei handelt es sich hauptsächlich um Universen mit niedriger Dichte oder um Modelle mit Cluster-Normierung. Es wurde der Faktor 4 für $(-a-1)\, b$ gewählt.

zwischen der gemessenen Korrelation $\omega_{\mathrm{AG}}(\phi)$ und der von mir berechneten Korrelationsfunktion $\xi_{\mu\delta}(\phi)$. Für $(-a-1)\ b$ möchte ich den Werte 4 verwenden[9]. Gleichung (4.14) bedeutet anschaulich, daß die gewichtete Korrelationsfunktion $\theta\xi_{\mathrm{QG}}(\theta)$ über den Ring θ_1 bis θ_2 integriert und anschließend durch einen Faktor geteilt wird, der proportional zur Fläche des Ringes ist. Für die benutzten kleinen Ringe[10] kann die Korrelationsfunktion

[9]Siehe hierzu Kapitel (3.2.4).

[10]Benítez et al. benutzten Ringe der Größe 0.75', was noch klein gegen die Skala ist, auf der sich die Korrelationsfunktion stark ändert.

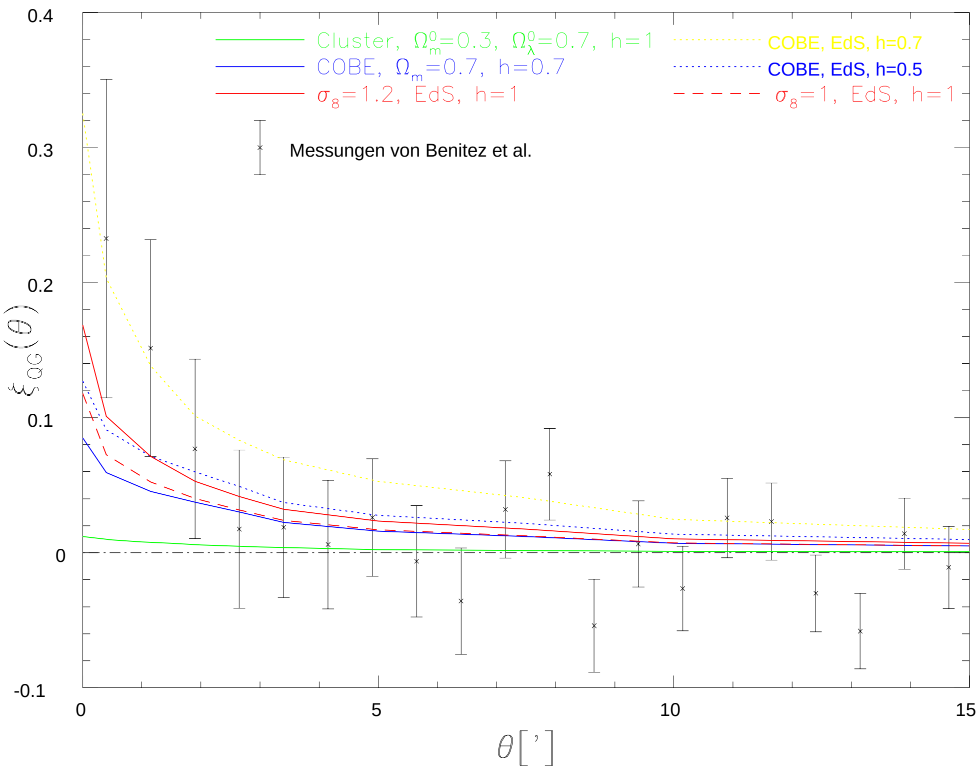


Abbildung 4.11: Vergleich der gemessenen Korrelationsfunktion ω_{AG} mit ausgewählten theoretischen Kurven. Es wurde der Faktor 4 für $(-a-1)\,b$ gewählt.

linearisiert werden,

$$\xi_{\mathrm{QG}}(\theta) = \xi_{\mathrm{QG}}(\theta_1) + \frac{\xi_{\mathrm{QG}}(\theta_2) - \xi_{\mathrm{QG}}(\theta_1)}{\theta_2 - \theta_1}(\theta - \theta_1). \tag{4.15}$$

Nach Einsetzen in Gleichung (4.14) und Ausführung der Integration erhalten wir

$$\omega_{\mathrm{AG}}(\phi) = (-1-a)b\left[\frac{1}{3}\xi_{\mu\delta}(\theta_1) + \frac{2}{3}\xi_{\mu\delta}(\theta_2)\right], \tag{4.16}$$

wobei wir ϕ mit θ_1 identifizieren wollen. Damit läßt sich die Korrelationsfunktion ξ_{QG} direkt mit ω_{AG} vergleichen. Abbildung (4.9) zeigt die neuesten Ergebnisse, die Benítez et al. im Rahmen eines Vorabdruckes veröffentlicht haben. Sie starteten bei einem Winkel von $0.4'$ und berechneten dann die Korrelation ω_{AG} in Ringen von $0.75'$ Breite. Anstatt ϕ mit θ_1 zu identifizieren, haben Benítez et al. ϕ als Wert zwischen θ_1 und θ_2 durch den Zusammenhang $\phi = \theta_1 + 0.175'$ identifiziert. Mit den von ihnen verwendeten Ringen konnte ich den Zusammenhang $\phi(n) = 0.575' + n \cdot 0.75'$ konstruieren, der mir für jeden Ring n den Winkel $\phi(n)$ liefert, den sie für ihren Graphen verwendet haben. Deshalb habe ich ihre ϕ-Werte für den Vergleich mit den theoretischen Kurven auf die jeweilige Untergrenze korrigiert.

Den ersten Vergleich dieser Messungen mit den von mir berechneten Korrelationsfunktionen zeigt Abbildung (4.10). Hier sind die wie oben beschrieben korrigierten Werte von Benítez et al. dargestellt. Gleichzeitig habe ich die Fläche hinterlegt, die durch die von mir berechneten Korrelationsfunktionen im Rahmen des gegebenen Parameterraums abgedeckt wird. Der grüne Bereich kennzeichnet Korrelationsfunktionen mit Parameterkombinationen, die meist zu kleineren als den beobachteten Korrelationen führen. Der rote und der blaue Bereich liegt nahe genug an den Messungen, um bei der Berücksichtigung von Selektionseffekten[11] noch mit diesen Messungen kompatibel zu sein. Dies sind hauptsächlich Korrelationsfunktionen in einem Einstein-de Sitter-Universum mit einer $\sigma_8 \approx 1$-Normierung und einer relativ großen Hubblekonstanten, oder Korrelationsfunktionen für COBE-Normierung in Universen mit $h\Omega_{\mathrm{m}}^0 \approx 0.5$. Der gelbe Bereich stellt die Kombination von Parametern dar, die durch andere Messungen[12] ausgeschlossen wurden. Dies sind Korrelationsfunktionen für COBE-Normierung in Universen mit $h\Omega_{\mathrm{m}}^0 > 0.5$. Einen detaillierteren Vergleich mit den Messungen zeigt Abbildung (4.11). Hier sind einige Korrelationsfunktionen für ausgewählte Parameter eingezeichnet um den genauen Verlauf der Korrelationsfunktion für die verschiedenenen Kombinationen von Parametern zu verdeutlichen. Die Messungen sind leider noch zu unsicher, um quantitative Rückschlüsse auf die kosmologischen Parameter zuzulassen. Der Vergleich der gemessenen Korrelationsfunktion mit der berechneten in Abbildung (4.11) zeigt jedoch, daß die große Sensibilität der Korrelationsfunktion auf die Form des Powerspektrums und die starke Abhängigkeit von den kosmologischen Parametern, eine sehr gute Möglichkeit bietet, etwas zu lernen. Dabei können wir Aufschuß über die Parameter gewinnen, die das Universum, in dem wir leben, beschreiben.

[11] Damit sind die Unsicherheiten in den Verteilungsfunktionen von Galaxien und Quasaren gemeint. Siehe hierzu Kapitel (4.3).

[12] Diese liefern zu große Werte für σ_8, welche z.B. durch die Zählung von Galaxien ausgeschlossen werden.

4.5 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt möchte ich meine Arbeit noch einmal kurz zusammenfassen, bevor ich sie mit dem Anhang abschließe. Ziel der Arbeit war es, mittels des schwachen Gravitationslinseneffekts eine Korrelation zwischen Galaxien und Quasaren zu berechnen. Im Gegensatz zu bereits bestehenden Arbeiten sollte dabei der Einfluß durch die kosmologischen Parameter des Standardmodells untersucht werden. Weiter sollten die verschiedenen gängigen Normierungen der Materiemodelle und die nichtlineare zeitliche Entwicklung der Dichtefluktuationen berücksichtigt werden. Um das Ergebnis besser mit Messungen vergleichen zu können, war eine genauere Berücksichtigung der Rotverschiebungsverteilungen der Galaxien und Quasare notwendig.

Ausgangspunkt hierzu war ein auf Einsteins Feldgleichungen basierendes, homogenes Universum, dem Dichtefluktuationen hinzugefügt wurden. In diesem Universum wurde aus der Ausbreitung des Lichts und unter Zuhilfenahme der Gravitationslinsentheorie die Korrelationsfunktion bestimmt. Hierbei gingen die gemessenen Verteilungsfunktionen von Galaxien und Quasaren wie auch die Theorie der Dichtefluktuationen und deren Entwicklung ein. Die Ergebnisse der Berechnung dieser Korrelationsfunktion möchte ich wie folgt zusammenfassen:

- Meine Berechnung der Korrelationsfunktion deckt sich mit den Spezialfällen, die vor meiner Arbeit schon erarbeitet wurden.

- Die Korrelationsfunktion läßt aufgrund ihres typischen Verlaufes Rückschlüsse auf die Art der dunklen Materie, die unser Universum ausfüllt, zu.

- Durch Berücksichtigung der nichtlinearen Evolution der Dichtefluktuationen bis zum heutigen Zeitpunkt erhalte ich eine Vergrößerung der Amplitude um einen Faktor bis zu ≈ 10, was die Korrelationsfunktion in den Bereich bringt, der den bereits durchgeführten Messungen entspricht. Dies bedeutet insbesondere, daß der Gravitationslinseneffekt ausreicht, um die beobachtete Korrelation von Galaxien und Quasaren zu erklären.

- Die unabhängig von diesen Parametern einfließenden Annahmen und Modelle, wie z.B. die Verteilungsfunktionen der Galaxien und Quasare, spielen nur eine untergeordnete Rolle und beeinflussen obige Schlußfolgerungen nur wenig, müssen aber beachtet werden, wenn wir die berechnete Korrelationsfunktion mit Messungen vergleichen wollen.

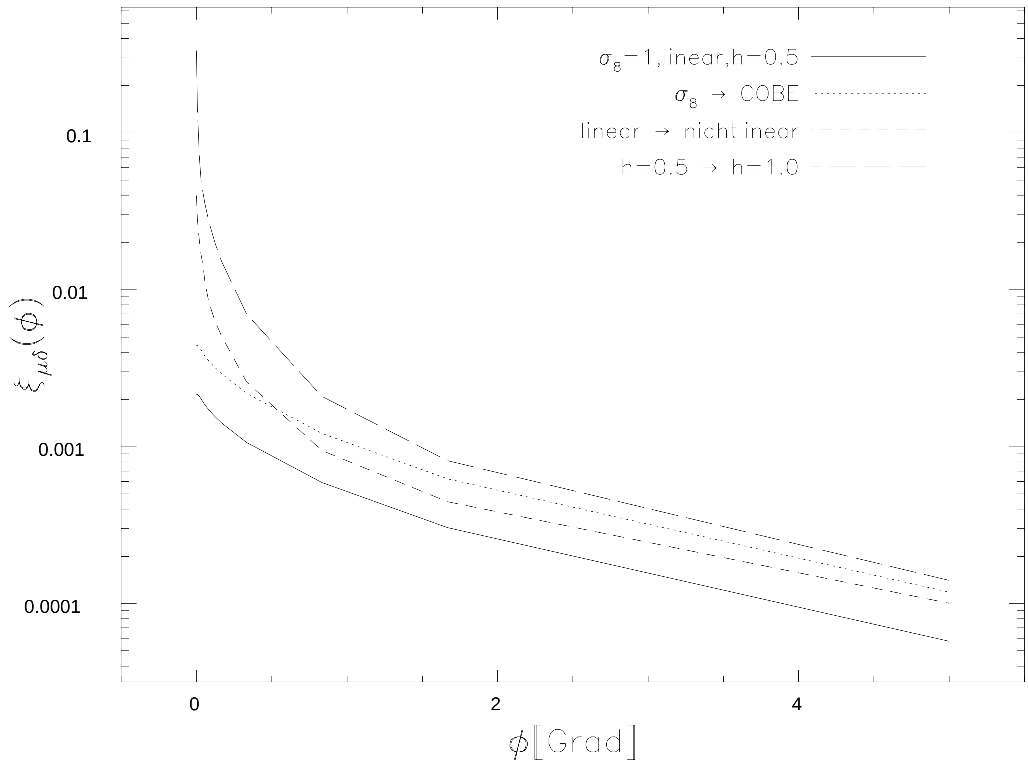


Abbildung 4.12: Schritte, die die Korrelation für kleine Winkel erhöhen und die Steigung der Korrelationsfunktion vergrößern: Ausgehend von der Korrelationsfunktion in einem Einstein-de Sitter-Universum mit linearer Entwicklung der auf $\sigma_8 = 1$ normierten Dichtefluktuationen und $h = 0.5$ wird die Korrelation größer, wenn wir die COBE-Normierung verwenden. Einen weiteren Schritt stellt die nichtlineare Entwicklung der Dichtefluktuationen dar. Größere Werte für die Hubblekonstante vergrößern nochmals die Korrelationsfunktion für kleine Winkel. Weiter wurden $m_{\mathrm{Det}} = 20.5$ und $z_0 = 0.3$ benutzt.

- Abbildung (4.12) zeigt noch einmal einen Überblick, welche Parameter zu einer Erhöhung der Korrelation führen.

- Die Amplitude der Korrelationsfunktion zeigt eine starke Abhängigkeit von den Parametern H_0, Ω_{m}^0 und Ω_λ^0 des kosmologischen Modells, was bei genaueren Messungen einen Rückschluß auf diese Parameter durch Vergleich von Messungen mit der Theorie ermöglicht. Diese Abhängigkeiten habe ich in einer Tabelle nochmals zusammengefaßt:

Parameter	COBE	$\sigma_8 = 1$	Cluster
H_0	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto H_0^{3.2}$	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto H_0^{1.1}$	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto H_0^{1.3}$
$\Omega_{\rm m}^0$	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\rm m}^0}^{4.2}$	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\rm m}^0}^{2.0}$	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\rm m}^0}^{1.4}$
$\Omega_{\rm m}^0$ für $\Omega_\lambda^0 = 1 - \Omega_{\rm m}^0$	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\rm m}^0}^{3.9}$	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\rm m}^0}^{1.7}$	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_{\rm m}^0}^{0.9}$
Ω_λ^0	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_\lambda^0}^{1.4}$	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_\lambda^0}^{0.7}$	$\xi_{\mu\delta}(0) \propto {\Omega_\lambda^0}^{0.9}$

- Auf der einen Seite gibt uns die Art der Normierung des Powerspektrums eine große Unsicherheit und macht damit quantitative Aussagen im Moment unmöglich. Diese Normierung kann jedoch aus anderen Messungen bestimmt werden und stellt somit kein unüberwindliches Hindernis dar. Auf der anderen Seite gibt uns diese starke Abhängigkeit der Korrelationsfunktion vom Verlauf des Powerspektrums die Möglichkeit, mehr über den wahren Verlauf des Powerspektrums zu lernen. Dies ist um so interessanter, da die Korrelationsfunktion eine der direktesten Messungen der Dichtefluktuationen erlaubt. Dies liegt daran, daß der Gravitationslinseneffekt direkt die gesamte gravitierende Masse mißt.

- Beobachtungsprojekte, die für dieses Jahr geplant sind, werden uns Daten liefern, die gut genug sind, um aus dem Vergleich mit den Berechnungen Rückschlüsse ziehen zu können.

Anhang A

Herleitungen

A.1 Ausbreitung des Lichts im Universum

Die Ausbreitung zweier eng benachbarter Lichtstrahlen im Universum läßt sich bei geeigneter Koordinatenwahl durch die Gleichung

$$\ddot{\vec{\xi}} = T\vec{\xi} \tag{A.1}$$

ausdrücken, wobei $\vec{\xi}$ der Abstandsvektor der beiden Lichtstrahlen projiziert an den „Himmel" des Beobachters und

$$T = \begin{pmatrix} \mathcal{R} - \mathrm{Re}(\mathcal{F}) & \mathrm{Im}(\mathcal{F}) \\ \mathrm{Im}(\mathcal{F}) & \mathcal{R} + \mathrm{Re}(\mathcal{F}) \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

die „*optische Gezeitenmatrix*" mit den Funktionen

$$\mathcal{R} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta \tag{A.3}$$

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon^{\alpha *} k^\beta \epsilon^{\gamma *} k^\delta \tag{A.4}$$

ist. $\vec{\xi}$ ist die physikalische Strecke (nicht die mitbewegte Entfernung) zwischen den beiden Lichtstrahlen, und ein Punkt bedeutet die Ableitung nach dem affinen Parameter λ längs des Lichtstrahls. $R_{\alpha\beta}$ ist der Ricci-Tensor, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der Weyl-Tensor und $\epsilon^\alpha = E_1^\alpha + iE_2^\alpha$, wobei E_i^α raumartige Vektoren senkrecht zu dem Wellenvektor k^α und der Vierergeschwindigkeit u_α des Beobachters sind. Diese Gleichung vereinfacht sich in einem isotropen Universum mit einer Robertson-Walker-Metrik noch ein wenig, da sich in diesem Fall $\mathcal{F} = 0$ ergibt. Dies kommt daher, daß $\mathcal{F}$ die Scherung beschreibt, die ein Lichtbündel erfährt. Diese verformt einen kreisförmigen Bündelquerschnitt zu einem elliptischen, was die Auszeichnung einer Richtung bedeuten würde und mit der Isotropie-Forderung für das Universum nicht vereinbar wäre.

Für $p = 0$ reduziert sich in diesem Fall der Energie-Impulstensor (1.14) auf $T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta$. Eingesetzt in die Feldgleichungen 1.12 ergibt sich:

$$R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = \left(\frac{8\pi G}{c^4}\rho u_\alpha u_\beta + \frac{1}{2}R^\gamma{}_\gamma g_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}\right) k^\alpha k^\beta \tag{A.5}$$

Führen wir auf der rechten Seite die Summation über α aus und bedenkt, daß für Licht $k_\alpha k^\alpha = 0$ gilt, so reduziert sich diese Gleichung auf

$$R_{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta = \frac{8\pi G}{R^2 c^2}\rho \tag{A.6}$$

wobei der Zusammenhang $k^\alpha u_\alpha = -\frac{c}{R}$ benutzt wurde [Seitz, Schneider, Ehlers 1994], Gleichung (1.2.69). Mit Gleichung (A.6) ergibt sich als endgültiger Ausdruck für $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = -\frac{8\pi G}{2c^2}\rho R^{-2} = -\frac{3H_0^2\Omega_{\mathrm{m}}^0}{2c^2}R^{-5}. \tag{A.7}$$

$\ddot{\xi}_i$ in Gleichung (A.1) bedeutet die zweifache Ableitung des Abstandsvektors nach dem affinen Parameter λ, der hier durch $\mathrm{d}\lambda = cR\mathrm{d}t$ definiert ist[1]. Mit (1.37) ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{1}{R^2}, \tag{A.8}$$

und die Ableitung nach dem affinen Parameter läßt sich als

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \tag{A.9}$$

schreiben. Nochmaliges Ableiten von (A.9) ergibt mit (A.8)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(-\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right) = \frac{1}{R^2}\left(-\frac{2}{R^3}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\omega} + \frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\right). \tag{A.10}$$

Mit Gleichung (1.37) für $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\omega$ kann die zweite Ableitung nach dem affinen Parameter wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{1}{R^2}\left[-\frac{2}{R}\frac{H}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} + \frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\right] \tag{A.11}$$

Damit und mit (A.7) läßt sich Gleichung (A.1) schreiben als:

$$\frac{1}{R^4}\frac{\mathrm{d}^2\xi_i}{\mathrm{d}\omega^2} + \frac{2H}{cR^3}\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{3H_0^2\Omega_{\mathrm{m}}^0}{2c^2R^5}\xi_i \tag{A.12}$$

[1] Der Zusammenhang $k^\alpha u_\alpha = -\frac{c}{R}$ legt bereits den affinen Parameter in dieser Weise fest.

A.2 Herleitung der Bewegungsgleichung

Nachdem wir die Gleichung für die Lichtausbreitung (A.1) soweit umgeformt hat, ist es nun an der Zeit, die Entfernung auf mitbewegte Koordinaten zu transformieren.

Betrachtet man die Transformierte des Abstandsvektor $\vec{\xi}$ auf mitbewegte Koordinaten, $\vec{x} = \vec{\xi}/R$, so ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}\omega} = R\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\omega} + x_i\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\omega} = R\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\omega} - R^2\frac{H}{c}x_i, \tag{A.13}$$

wobei wieder Gleichung (1.37) benutzt wurde. Erneutes Ableiten von Gleichung (A.13) nach ω ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\xi_i}{\mathrm{d}\omega^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}\omega} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(-R^2\frac{H}{c}\right)x_i - R^2\frac{H}{c}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\omega} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\omega} + R\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}\omega^2}. && \text{(A.14)} \\ & && \text{(A.15)} \end{aligned}$$

Transformieren wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\omega} \tag{A.16}$$

so können wir

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2\xi_i}{\mathrm{d}\omega^2} &= \frac{R}{c}\left(-2H - R\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}R}\right)\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\omega}x_i - R^2\frac{H}{c}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\omega} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\omega} + R\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}\omega^2} \\ &= R\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}\omega^2} - 2R^2\frac{H}{c}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\omega} + \left(2R^3\frac{H^2}{c^2} + R^4\frac{H}{c^2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}R}\right)x_i && \text{(A.17)} \\ & && \text{(A.18)} \end{aligned}$$

schreiben, wobei Gleichung (1.37) mit benutzt wurde. Setzen wir die Gleichungen (A.13) und (A.17) in Gleichung (A.12) ein, so läßt sich die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}\omega^2} + \left(R^3\frac{H}{c}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}R} + \frac{3H_0^2\Omega_\mathrm{m}^0}{2c^2R}\right)x_i = 0 \tag{A.19}$$

schreiben. Aus Tabelle (1.25) zusammen mit der Definition der Hubblefunktion (1.15) ergibt sich für die Ableitung der Hubblefunktion H nach dem Skalenfaktor R

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}R} = \frac{1}{H}\left(-\frac{3}{2}\frac{H_0^2\Omega_\mathrm{m}^0}{R^4} + \frac{Kc^2}{R^3}\right). \tag{A.20}$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gleichung (A.17) ein, so erhalten wir die einfache Form der Bewegungsgleichung im homogenen, isotropen Universum:

$$\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}\omega^2} + Kx_i = 0. \tag{A.21}$$

A.3 Lösung der Bewegungsgleichung

Die allgemeine Lösung von Gleichung (1.86) kann mittels der Greensfunktion aus der homogenen Lösung (1.82) konstruiert werden (z.B. Bronstein, Seite 453ff). Hierzu teilt man das Definitionsgebiet in zwei Intervalle $[0;\tilde{\omega}]$ und $[\tilde{\omega};\infty]$. Die Greensfunktion ergibt sich dann aus Linearkombinationen der beiden homogenen Lösungen auf diesen beiden Teilintervallen. Sie läßt sich wie folgt schreiben:

$$G(\omega,\tilde{\omega}) = \begin{cases} A\sin\left(\sqrt{K}\,\omega\right) + B\cos\left(\sqrt{K}\,\omega\right) & K>0 \\ A\omega + B & K=0 \\ A\sinh\left(\sqrt{|K|}\,\omega\right) + B\cosh\left(\sqrt{|K|}\,\omega\right) & K<0 \end{cases}\Bigg\}\ \omega<\tilde{\omega}$$
$$\phantom{G(\omega,\tilde{\omega}) =} \begin{cases} C\sin\left(\sqrt{K}\,\omega\right) + D\cos\left(\sqrt{K}\,\omega\right) & K>0 \\ C\omega + D & K=0 \\ C\sinh\left(\sqrt{|K|}\,\omega\right) + D\cosh\left(\sqrt{|K|}\,\omega\right) & K<0 \end{cases}\Bigg\}\ \omega>\tilde{\omega} \qquad \text{(A.22)}$$

Weitere Einschränkungen für die Greensfunktion erhalten wir aus den folgenden drei Bedingungen:

1) G sei stetig bei $\omega=\tilde{\omega}$.
$G(\omega\to\tilde{\omega}_+) = G(\omega\to\tilde{\omega}_-)$
$$\Rightarrow \begin{cases} A\sin\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) + B\cos\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) = C\sin\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) + D\cos\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) & K>0 \\ A\tilde{\omega} + B = C\tilde{\omega} + D & K=0 \\ A\sinh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) + B\cosh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) = C\sinh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) + D\cosh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) & K>0 \end{cases}$$

2) Der Sprung in der Ableitung bei $\omega=\tilde{\omega}$ entspreche dem Kehrwert des Vorfaktors von $\ddot{x}$.
$\frac{dG}{d\omega}\Big|_{\omega\to\tilde{\omega}_+} - \frac{dG}{d\omega}\Big|_{\omega\to\tilde{\omega}_-} = 1$
$$\Rightarrow \begin{cases} -A\sqrt{K}\cos\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) + B\sqrt{K}\sin\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) & \\ +C\sqrt{K}\cos\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) - D\sqrt{K}\sin\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) = 1 & K>0 \\ C - A = 1 & K=0 \\ -A\sqrt{|K|}\cosh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) - B\sqrt{|K|}\sinh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) & \\ +C\sqrt{|K|}\cosh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) + D\sqrt{|K|}\sinh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) = 1 & K>0 \end{cases}$$

3) G erfülle die Randbedingungen bei $\omega=0$ (Vergleiche Kapitel (1.4.2))
$G(0)=0\ ,\ \frac{dG}{d\omega}\Big|_0 = 0$
$$\Rightarrow \left\{\ B=0, A=0 \quad \forall K \right.$$

- 3) eingesetzt in 1)
$$\Rightarrow \begin{cases} C\sin\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) + D\cos\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) = 0 & K>0 \\ C\tilde{\omega} + D = 0 & K=0 \\ C\sinh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) + D\cosh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) = 0 & K<0 \end{cases}$$

- 3) eingesetzt in 2)

$$\Rightarrow \begin{cases} C\sqrt{K}\cos\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) - D\sqrt{K}\sin\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right) = 1 & K > 0 \\ C = 1 & K = 0 \\ C\sqrt{|K|}\cosh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) + D\sqrt{|K|}\sinh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right) = 1 & K < 0 \end{cases}$$

- Die Kombination dieser beiden Gleichungen ergibt:

$$\Rightarrow \begin{cases} C = \frac{\cos\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right)}{\sqrt{K}} & K > 0 \\ C = 1 & K = 0 \\ C = \frac{\cosh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right)}{\sqrt{|K|}} & K < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = -\frac{\sin\left(\sqrt{K}\,\tilde{\omega}\right)}{\sqrt{K}} & K > 0 \\ D = -\tilde{\omega} & K = 0 \\ D = -\frac{\sinh\left(\sqrt{|K|}\,\tilde{\omega}\right)}{\sqrt{|K|}} & K < 0 \end{cases}$$

Setzen wir jetzt diese Koeffizienten in die Gleichung (A.22) für die Greensfunktion ein und benutzen die Additionstheoreme für sin und sinh (Bronstein, Seite 181,189), so ergibt sich die Greensfunktion:

$$G(\omega,\tilde{\omega}) = \begin{cases} 0 & \forall K \;\}\quad \omega < \tilde{\omega} \\ \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\left(\sqrt{K}\,(\omega-\tilde{\omega})\right) & K > 0 \\ \omega - \tilde{\omega} & K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}}\sinh\left(\sqrt{|K|}\,(\omega-\tilde{\omega})\right) & K < 0 \end{cases} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\} \omega > \tilde{\omega} \tag{A.23}$$

Die allgemeine Lösung von (1.86) mit einer beliebigen Inhomogenität $f_i(\omega)$ ergibt sich aus der Greensfunktion (A.23) durch das Integral (Bronstein, Seite 454):

$$x_i(\omega) = \int_0^\infty G(\omega,\tilde{\omega}) f_i(\tilde{\omega}) \mathrm{d}\tilde{\omega}. \tag{A.24}$$

In unserem Fall ist die Inhomogenität $f_i(\omega) = -\frac{2}{c^2}\phi_{,i}(\vec{\omega},\eta)$. Eingesetzt in Gleichung (A.24) und mit der Greensfunktion (A.23) ergibt sich:

$$x_i(\vec{\omega}) = -\frac{2}{c^2}\int_0^\infty \phi_{,i}(\vec{\omega},\eta) \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{K}}\sin\left(\sqrt{K}\,(\omega-\tilde{\omega})\right) & K > 0 \\ \omega - \tilde{\omega} & K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|K|}}\sinh\left(\sqrt{|K|}\,(\omega-\tilde{\omega})\right) & K < 0 \end{matrix} \right\} \mathrm{d}\tilde{\omega} \tag{A.25}$$

A.4 Spektrum eines projiziertem Zufallsfeldes

Ausgehend von der Tatsache, daß die Autokorrelationsfunktion

$$\xi_{pp}(\vec{\phi}) = \int \mathrm{d}^2\kappa \frac{1}{(2\pi)^2} P_p(\vec{\kappa}) \exp(-i\vec{\kappa}\vec{\phi}) \tag{A.26}$$

eines Feldes p die Fouriertrasformierte des Powerspektrums P_p dieses Feldes ist, suchen wir nun einen Zusammenhang zwischen der Autokorrelationsfunktion ξ_{pp} und dem Powerspektrum P_f für den Fall, daß p eine Projektion

$$p(\vec{\theta}) = \int_0^1 \mathrm{d}\omega\; q(\omega) f(\theta_1\omega, \theta_2\omega, \omega) \tag{A.27}$$

mit dem Gewicht $q(\omega)$ einer homogenen, isotropen Zufallsgröße $f(\vec{\omega})$ ist. Dazu benötigen wir einen Zusammenhang zwischen dem Powerspektrum P_p der Projektion und dem Powerspektrum P_f der projizierten Funktion f.

In unserem Fall entspricht die Gewichtsfunktion q den Funktionen W_{G} bzw. G_{Q}, und die Zufallsgröße f entspricht dem Dichtekontrast δ. Wichtig für die weitere Rechnung wird die Annahme sein, daß wir eine Skala $\Delta\omega$ so wählen können, daß diese groß im Vergleich zu typischen Skalen von f und gleichzeitig klein gegen die Skala ist, auf der sich q ändert. Da der Dichtekontrast eine Skala von ca. 10 Mpc hat und die Gewichtsfunktionen Skalen wie $c/H_0 \approx 3000$ Mpc besitzen, ist diese Bedingung gut erfüllt. Anschaulich bedeutet dies, daß wir die ω-Integration in Schalen mit der Dicke $\Delta\omega$ zerlegen können, in denen die statistischen Eigenschaften des Zufallsfeldes f schon vollständig charakterisiert sind, und wir dennoch die Gewichtsfunktionen als konstant in einer solchen Schale annehmen könen.

Somit ergibt sich der Beitrag Δp aus Gleichung (A.27) aus einer solchen Schale zu

$$\Delta p(\vec{\theta}) = q(\omega_0) \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \mathrm{d}\omega\; f(\omega_0\theta_1, \omega_0\theta_2, \omega). \tag{A.28}$$

Die Fouriertransformierte von Δp läßt sich als

$$\widehat{\Delta p}(\vec{\kappa}) \equiv \int \Delta p(\vec{\theta}) e^{-i\vec{\kappa}\vec{\theta}} \mathrm{d}^2\theta = q(\omega_0) \int \mathrm{d}^2\theta \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \mathrm{d}\omega\; f(\omega_0\theta_1, \omega_0\theta_2, \omega) e^{-i\vec{\kappa}\vec{\theta}} \tag{A.29}$$

schreiben. Nun drücken wir $f(\vec{\theta}, \omega)$ durch die Fourierrücktransformation von $\widehat{f}(\vec{k})$ aus, womit wir

$$\widehat{\Delta p}(\vec{\kappa}) = q(\omega_0) \int \mathrm{d}^2\theta \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \frac{\mathrm{d}\omega}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3k \widehat{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{\omega}} e^{-i\vec{\kappa}\vec{\theta}} \tag{A.30}$$

erhalten. Schreiben wir nun die Komponenten von $\vec{\omega}$ als $(\omega_0\theta_1, \omega_0\theta_2, \omega)$, dann kann der Term $e^{i\vec{k}\vec{\omega}}$ in $e^{i\hat{\vec{k}}\omega_0\vec{\theta}}e^{ik_3\omega}$ umgeschrieben werden, wobei $\hat{\vec{k}}$ ein zweidimensionaler Vektor mit den Komponenten k_1 und k_2 ist. Somit erhalten wir

$$\widehat{\Delta p}(\vec{\kappa}) = q(\omega_0) \int \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3} \hat{f}(\vec{k}) \int \mathrm{d}^2\theta e^{i(\hat{\vec{k}}\omega_0 - \vec{\kappa})\vec{\theta}} \int\limits_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \mathrm{d}\omega \; e^{ik_3\omega}. \tag{A.31}$$

Dies können wir jetzt noch stark vereinfachen, wenn wir berücksichtigen, daß die Integration über $\mathrm{d}^2\theta$ die Deltafunktion $(2\pi)^2\delta(\hat{\vec{k}}\omega_0 - \vec{\kappa})$ ergibt, und wir somit die Integration über $\mathrm{d}k_1$ und $\mathrm{d}k_2$ ausführen können. Dabei müssen wir jedoch beachten, daß wir je einen Faktor $(\omega_0)^{-1}$ bekommen. Somit erhalten wir

$$\widehat{\Delta p}(\vec{\kappa}) = \frac{q(\omega_0)}{2\pi\omega_0^2} \int \mathrm{d}k_3 \hat{f}\left(\frac{\kappa_1}{\omega_0}, \frac{\kappa_2}{\omega_0}, k_3\right) \int\limits_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \mathrm{d}\omega \; e^{ik_3\omega}. \tag{A.32}$$

Bevor wir fortfahren, möchte ich kurz das Integral über $\mathrm{d}\omega$ etwas näher betrachten:

$$\int\limits_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \mathrm{d}\omega \; e^{ik_3\omega} = \left[-\frac{i}{k_3} e^{ik_3\omega}\right]_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} = -\frac{i}{k_3}\left[e^{ik_3\omega_0}\left(e^{ik_3\frac{\Delta\omega}{2}} - e^{-ik_3\frac{\Delta\omega}{2}}\right)\right]. \tag{A.33}$$

Jetzt können wir den Ausdruck noch geeignet erweitern und damit die Exponentialfunktionen in die hyperbolische Sinusfunktion überführen. Anschließend nutzen wir den Zusammenhang $i\sinh(ix) = \sin(x)$ zwischen den hyperbolischen und den trigonometrischen Funktionen, bevor wir den Ausdruck $\sin(x)/x$ als sphärische Besselfunktion nullter Ordnung identifizieren:

$$e^{ik_3\omega_0} \frac{i\frac{1}{2}\left(e^{ik_3\frac{\Delta\omega}{2}} - e^{-ik_3\frac{\Delta\omega}{2}}\right)}{k_3\frac{\Delta\omega}{2}} = \Delta\omega e^{ik_3\omega_0} \frac{i\sinh\left(ik_3\frac{\Delta\omega}{2}\right)}{k_3\frac{\Delta\omega}{2}} = \Delta\omega e^{ik_3\omega_0} j_0\left(k_3\frac{\Delta\omega}{2}\right). \tag{A.34}$$

Betrachten wir nun $\left\langle\widehat{\Delta p}(\vec{k})\widehat{\Delta p}^*(\vec{k}')\right\rangle$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\langle\widehat{\Delta p}(\vec{k})\widehat{\Delta p}^*(\vec{k}')\right\rangle &= \frac{q^2(\omega_0)\Delta\omega^2}{(2\pi)^2\omega_0^4} \iint \mathrm{d}k_3'\mathrm{d}k_3 \left\langle \hat{f}\left(\frac{\kappa_1}{\omega_0}, \frac{\kappa_2}{\omega_0}, k_3\right) \hat{f}^*\left(\frac{\kappa_1}{\omega_0}, \frac{\kappa_2}{\omega_0}, k_3'\right)\right\rangle \\ &\times \; j_0\left(k_3\frac{\Delta\omega}{2}\right) j_0\left(k_3'\frac{\Delta\omega}{2}\right). \end{aligned} \tag{A.35}$$

Wir verwenden jetzt, daß f eine isotrope, homogene Zufallsgröße ist und führen das Spektrum P_f durch

$$\left\langle \hat{f}\left(\frac{\kappa_1}{\omega_0}, \frac{\kappa_2}{\omega_0}, k_3\right) \hat{f}^*\left(\frac{\kappa_1}{\omega_0}, \frac{\kappa_2}{\omega_0}, k_3'\right)\right\rangle = (2\pi)^3 P_f(k)\delta(\vec{k} - \vec{k}') \tag{A.36}$$

ein. Damit können wir die Integration über k'_3 ausführen und erhalten

$$\left\langle \widehat{\Delta p}(\vec{k})\widehat{\Delta p}^*(\vec{k}')\right\rangle = \frac{2\pi q^2(\omega_0)\Delta\omega^2}{\omega_0^2}\delta(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}')\int \mathrm{d}k_3 P_f\left(\sqrt{\frac{\vec{\kappa}^2}{\omega_0^2}-k_3^2}\right) j_0^2\left(k_3\frac{\Delta\omega}{2}\right), \tag{A.37}$$

wobei wir den Faktor ω_0^2 erhalten, wenn wir die Deltafunktion von $\vec{k}$ auf $\vec{\kappa}$ umschreiben. Die sphärische Besselfunktion fällt auf einer Skala von $\Delta\omega^{-1}$ ab, so daß wir den Term k_3^2 im Argument von P_f vernachlässigen können, da dieser erst Beiträge liefern würde, wenn die Besselfunktion längst auf sehr kleine Werte abgefallen ist. Damit können wir P_f aus dem Integral nehmen und die Integration über das Quadrat der Besselfunktion ausführen. Dies gibt uns den Faktor $\frac{2\pi}{\Delta\omega}$, und wir erhalten den endgültigen Ausdruck

$$\left\langle \widehat{\Delta p}(\vec{k})\widehat{\Delta p}^*(\vec{k}')\right\rangle = \frac{(2\pi)^2 q^2(\omega_0)\Delta\omega}{\omega_0^2}\delta(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}')P_f\left(\frac{\vec{\kappa}}{\omega_0}\right). \tag{A.38}$$

Zuletzt führen wir noch die Summe über alle diese Schalen aus und erhalten

$$\left\langle \hat{p}(\vec{k})\hat{p}^*(\vec{k}')\right\rangle = (2\pi)^2\delta(\vec{\kappa}-\vec{\kappa}')\int_0^1 \mathrm{d}\omega\,\frac{q^2(\omega)}{\omega^2}P_f\left(\frac{\vec{\kappa}}{\omega}\right). \tag{A.39}$$

Durch Vergleich mit Definition (A.36) erhalten wir das Powerspektrum der Projektion p als

$$P_p(\kappa) = \int_0^1 \mathrm{d}\omega\,\frac{q^2(\omega)}{\omega^2}P_f\left(\frac{\vec{\kappa}}{\omega}\right). \tag{A.40}$$

Nun möchte ich noch einige Verallgemeinerungen dieses Zusammenhangs angeben. Als erstes kann f und damit das Powerspektrum P_f von der Zeit abhängig sein, ohne daß sich an obiger Rechnung etwas ändern würde. Die Zeit will ich in unserem Fall durch den Skalenfaktor a parametrisieren. Weiter muß in einem allgemeinerem Universum berücksichtigt werden, daß Ω_m^0 und Ω_λ^0 nicht 1 und 0 sind. Dies bedeutet insbesondere, daß sich Entfernungen nicht mehr durch ω, sondern durch $\sin_K(\omega)$ ausgedrückt werden, und sich daher das Argument $\frac{\vec{\kappa}}{\omega_0}$ von f in $\frac{\vec{\kappa}}{\sin_K(\omega)}$ geändert werden muß. Damit erhalten wir den Ausdruck

$$P_p(\kappa) = \int_0^{\omega_\mathrm{max}} \mathrm{d}\omega\,\frac{q^2(\omega)}{\sin_K^2(\omega)}P_f\left(\frac{\vec{\kappa}}{\sin_K(\omega)}, a\right). \tag{A.41}$$

Betrachten wir nun den Fall, daß wir die zwei Gewichte q_0 und q_1 für die Projektionen p_0 und p_1 von f verwenden, so erhalten wir

$$P_{p_0p_1}(\vec{\kappa}) = \int_0^{\omega_\mathrm{max}} \mathrm{d}\omega\,\frac{q_0(\omega)q_1(\omega)}{\sin_K^2(\omega)}P_f\left(\frac{\vec{\kappa}}{\sin_K(\omega)}, a\right). \tag{A.42}$$

Dieses Ergebnis können wir in Gleichung (A.26) für die Korrelationsfunktion einsetzen und erhalten

$$\xi_{p_0 p_1}(\vec{\phi}) = \int \frac{\mathrm{d}^2\kappa}{(2\pi)^2} \int\limits_0^{\omega_{\max}} \mathrm{d}\omega \, \frac{q_0(\omega) q_1(\omega)}{\sin_K^2(\omega)} P_f\left(\frac{\vec{\kappa}}{\sin_K(\omega)}, a\right) \exp(-i\vec{\kappa}\vec{\phi}). \tag{A.43}$$

A.5 Der Zusammenhang zwischen ω_{AG} und ξ_{QG}

Analog zu Kapitel (3.2.1) möchte ich die Winkelkorrelationsfunktion als

$$\xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\theta}) = \frac{\left\langle \left[n_{\mathrm{Q}}(\vec{\theta}') - \bar{n}_{\mathrm{Q}} \right] \left[n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}' + \vec{\theta}) - \bar{n}_{\mathrm{G}} \right] \right\rangle_{\vec{\theta}'}}{\bar{n}_{\mathrm{G}} \bar{n}_{\mathrm{Q}}} \tag{A.44}$$

definieren, wobei die Anzahldichte von Quasaren in der Blickrichtung $\vec{\theta}'$ durch $n_{\mathrm{Q}}(\vec{\theta}')$ und die Anzahldichte der Galaxien in der Blickrichtung $\vec{\theta}'$ durch $n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}')$ beschrieben wird. Die Mittelwerte dieser Anzahldichten werden jeweils durch $\bar{n}_{\mathrm{Q}}$ und $\bar{n}_{\mathrm{G}}$ beschrieben.

Seien nun $\delta\omega_1$ und $\delta\omega_2$ zwei Flächenelemente, separiert durch den Winkel $\vec{\theta}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, in $\delta\omega_1$ einen Quasar und gleichzeitig in $\delta\omega_2$ eine Galaxie zu finden durch

$$\begin{aligned}
\delta P(\vec{\theta}) &= \left\langle n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}_2)\delta\omega_2 \cdot n_{\mathrm{Q}}(\vec{\theta}_1)\delta\omega_1 \right\rangle \\
&= \delta\omega_1\delta\omega_2 \left\langle n_{\mathrm{Q}}(\vec{\theta}_1) n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}) \right\rangle_{\vec{\theta}_1} \\
&= \delta\omega_1\delta\omega_2 \left\{ \left\langle [n_{\mathrm{Q}}(\vec{\theta}_1) - \bar{n}_{\mathrm{Q}}][n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}) - \bar{n}_{\mathrm{G}}] \right\rangle_{\vec{\theta}_1} + \left\langle [n_{\mathrm{Q}}(\vec{\theta}_1 + \vec{\theta})\bar{n}_{\mathrm{G}} \right\rangle_{\vec{\theta}_1} \right. \\
&\qquad \left. + \left\langle [n_{\mathrm{G}}(\vec{\theta}_1 + \vec{\theta})\bar{n}_{\mathrm{Q}} \right\rangle_{\vec{\theta}_1} - \bar{n}_{\mathrm{G}}\bar{n}_{\mathrm{Q}} \right\} \\
&= \delta\omega_1\delta\omega_2 \left\{ \bar{n}_{\mathrm{G}}\bar{n}_{\mathrm{Q}}\xi_{\mathrm{QG}}(\theta) + \bar{n}_{\mathrm{G}}\bar{n}_{\mathrm{Q}} - \bar{n}_{\mathrm{G}}\bar{n}_{\mathrm{Q}} + \bar{n}_{\mathrm{G}}\bar{n}_{\mathrm{Q}} \right\} \\
&= \delta\omega_1\delta\omega_2\bar{n}_{\mathrm{G}}\bar{n}_{\mathrm{Q}} \left[1 + \xi_{\mathrm{QG}}(\theta) \right],
\end{aligned} \tag{A.45}$$

gegeben, was der Summe der Poisson-Wahrscheinlichkeit und der zusätzlichen Wahrscheinlichkeit aufgrund der Korrelation entspricht.

Im weiteren benötigen wir eine Aussage über bedingte Wahrscheinlichkeiten. Hierzu möchte ich die Notation $P(A \cap B)$ als Wahrscheinlichkeit für A **und** B und $P(A|B)$ als bedingte Wahrscheinlichkeit für A, wenn B eingetreten ist, einführen. Mit diesen Notationen kann ich die Wahrscheinlichkeit für $A \cap B$ als

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \tag{A.46}$$

schreiben.

Nun interessiert uns die Wahrscheinlichkeit, in $\delta\omega_2$ eine Galaxie zu finden, wenn in $\delta\omega_1$ ein Quasar ist. Ausgehend von der Wahrscheinlichkeit $\delta P(G \cap Q)$, in $\delta\omega_1$ einen Quasar und in $\delta\omega_2$ eine Galaxie zu finden, erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\delta P(G|Q)$ nach Gleichung (A.46) zu

$$\delta P(G|Q) = \frac{\delta P(G \cap Q)}{\delta P(Q)} = \delta\omega_2\bar{n}_{\mathrm{G}} \left[1 + \xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\theta}) \right], \tag{A.47}$$

wobei wir für die Wahrscheinlichkeit $\delta P(Q)$, einen Quasar in $\delta\omega_1$ zu finden, durch $\delta\omega_1 \bar{n}_{\mathrm{Q}}$ berücksichtigt haben.

Nun interessieren wir uns für die Anzahl der Galaxien in einem Raumwinkelelement Ω im Abstand $\vec{\theta}$ von einem Quasar. Ausgehend von der Anzahl δN von Galaxien in einem infinitesimalen Raumwinkelelement $\delta\Omega$,

$$\delta N = \bar{n}_{\mathrm{G}} \left[1 + \xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\theta})\right] \delta\Omega, \tag{A.48}$$

erhalten wir die Anzahl N der Galaxien in einem Raumwinkel Ω zu

$$N = \int\limits_{\Omega} \bar{n}_{\mathrm{G}} \left[1 + \xi_{\mathrm{QG}}(\vec{\theta})\right] \mathrm{d}^2\Omega. \tag{A.49}$$

Betrachten wir nun die Anzahl von Galaxien in einem Ring von θ_1 bis θ_2 um die Quasar-Position. Damit wird das Raumwinkelelement $\mathrm{d}^2\Omega$ zu $\theta \mathrm{d}\phi \mathrm{d}\theta$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} N &= \bar{n}_{\mathrm{G}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \left[1 + \xi_{\mathrm{QG}}(\theta)\right] \theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\ &= \bar{n}_{\mathrm{G}} \left[\pi(\theta_2^2 - \theta_1^2) + 2\pi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \xi_{\mathrm{QG}}(\theta) \mathrm{d}\theta\right] \\ &= \bar{N}_{\mathrm{G}} + \bar{n}_{\mathrm{G}} 2\pi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \xi_{\mathrm{QG}}(\theta) \mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{A.50}$$

Dies wollen wir nun mit der Messung ω_{AG} von Benítez et al. in Verbindung bringen [Benítez, Martínez-González, 1995]. Aus der Definition von ω_{AG} erhalten wir

$$\begin{aligned} \omega_{\mathrm{AG}}(\theta) &\equiv \frac{N_{\mathrm{G}}}{\bar{N}_{\mathrm{G}}} - 1 \\ &= \frac{1}{\bar{N}_{\mathrm{G}}} \left[\bar{N}_{\mathrm{G}} + \bar{n}_{\mathrm{G}} 2\pi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \xi_{\mathrm{QG}}(\theta) \mathrm{d}\theta\right] - 1 \\ &= \frac{2\pi \bar{n}_{\mathrm{G}}}{\bar{N}_{\mathrm{G}}} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \xi_{\mathrm{QG}}(\theta) \mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{A.51}$$

Bedenken wir nun, daß sich $\bar{N}_{\mathrm{G}}$ als

$$\bar{N}_{\mathrm{G}} = \bar{n}_{\mathrm{G}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = \bar{n}_{\mathrm{G}} \pi (\theta_2^2 - \theta_1^2) \tag{A.52}$$

schreiben läßt, so erhalten wir das Ergebnis

$$\omega_{\mathrm{AG}}(\theta) = \frac{2}{\theta_2^2 - \theta_1^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \theta \xi_{\mathrm{QG}}(\theta) \mathrm{d}\theta. \tag{A.53}$$

Anhang B

Tabellen

B.1 Modelle dunkler Materie

Bezeichnung	Art der Materie	Quelle
CDM_1	cold dark matter	[Davis 1992]
CDM_2	cold dark matter	[Efstathiou, Bond, White 1992]
CDM_3	cold dark matter	[Sugiyama 1995]
CDM_4	cold dark matter	[Holtzman 1989]
MDM	mixed dark matter	
HDM_1	hot dark matter	[Bond, Szalay 1983]
HDM_2	hot dark matter	[Bardeen et al. 1986]
HDM_3	hot dark matter	[Holtzman 1989]

(B.1)

B.2 Parameter der Leuchtkraftfunktionen

K-Korrektur	Quasare	Galaxien
α	-0.75	-1.5

(B.2)

Magnituden	Quasare	Galaxien
m_{Det}	19.0	20.5
Referenzmagnitude der Sonne $M_\odot$	5.48	4.79

(B.3)

Abschneideparameter	Quasare	Galaxien
$l_{\min}$	10^{-5}	10^{-4}

(B.4)

Rotverschiebung	Quasare	Galaxien
z_0	0.3	0

(B.5)

$$\mathrm{d}\phi(L,z) = \frac{\frac{\phi_*}{L_\mathrm{z}}}{\left(\frac{L}{L_\mathrm{z}}\right)^{\beta_\mathrm{t}} + \left(\frac{L}{L_\mathrm{z}}\right)^{\beta_\mathrm{h}}}\mathrm{d}L \tag{B.6}$$

$$L_\mathrm{z} = L_*(1+z)^{-(1+\alpha)} \exp\left[-\frac{(z-z_*)^2}{2\sigma_*^2}\right]. \tag{B.7}$$

Quasare	$(h, q_0, \alpha) = (0.5, 0.5, -0.5)$	$(h, q_0, \alpha) = (0.5, 0.1, -1.0)$	Verwendet
σ_*	0.93 ± 0.03	0.91 ± 0.03	0.92
z_*	2.75 ± 0.05	2.77 ± 0.05	2.76
L_*	$10^{13.03\pm0.10} L_\odot$	$10^{13.42\pm0.10} L_\odot$	$L_* = 10^{13.03-0.78(\alpha+0.5)} h^{-2} L_\odot$
ϕ_*	$10^{2.95\pm0.15}$	$10^{2.37\pm0.16}$	$\phi_* = 10^{2.95+1.16(\alpha+0.5)}$
β_h	3.52 ± 0.11	3.70 ± 0.14	1.74
β_t	1.64 ± 0.18	1.83 ± 0.13	3.6

(B.8)

$$\phi(L)\mathrm{d}L = \phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^\nu \exp(-\frac{L}{L^*})\mathrm{d}(\frac{L}{L^*}), \tag{B.9}$$

Galaxien	
ν	-0.81
L_*	$1.1\ 10^{10} L_\odot$

(B.10)

B.3 Parameter der Entwicklung des Powerspektrums

$$\Phi(x) = x\left[\frac{1 + B\beta x + [A\ x]^{\alpha\beta}}{1 + \left([A\ x]^\alpha g^3(\Omega)[V\sqrt{x}]\right)^\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}} \tag{B.11}$$

Parameter	Wert
A	$0.482\left(1+\frac{n}{3}\right)^{-0.947}$
B	$0.226\left(1+\frac{n}{3}\right)^{-1.778}$
α	$3.310\left(1+\frac{n}{3}\right)^{-0.224}$
β	$0.862\left(1+\frac{n}{3}\right)^{-0.287}$
V	$11.55\left(1+\frac{n}{3}\right)^{-0.423}$

(B.12)

σ_8	Modell
$(0.50 \pm 0.04)\Omega_\mathrm{m}^{0\ -0.47+0.10\Omega_\mathrm{m}^0}$	$\Omega_\lambda^0 = 0$
$(0.50 \pm 0.04)\Omega_\mathrm{m}^{0\ -0.53+0.13\Omega_\mathrm{m}^0}$	$\Omega_\mathrm{m}^0 + \Omega_\lambda^0 = 1.$

(B.13)

B.4 Verzeichnis der Abbildungen

B.4.1 Schematische Darstellungen

B.4.2 Powerspektrum

B.4.3 Gewichtsfunktionen

B.4.4 Korrelationsfunktion $\xi_{\mu\delta}$

B.4.5 Amplitude der Korrelationsfunktion $\xi_{\mu\delta}(0)$

B.4.6 Weitere Darstellungen

Verschiedene Entfernungen	Seite 18
Filterfunktion	Seite 55
Messungen von Benítez et al.	Seite 70

B.5 Konstanten und Einheiten

$G = 6.674\ 10^{-8}$	$\left[\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g\ s}^2}\right]$	*Gravitationskonstante*
ϕ	$\left[\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}^2}\right]$	*Potential*
$H_0 \equiv \frac{\dot{R}_0}{R_0}$	$\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$	*Hubblekonstante*
$\Omega_\mathrm{m}^0 \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0$	$[1]$	*Dichteparameter*
$\Omega_\lambda^0 \equiv \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$	$[1]$	*kosmologische Konstante*
$\rho_\mathrm{cr} \simeq 1.9 \times 10^{-29} h^2$	$\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{m}^3}\right]$	*kritische Dichte*
$K = \frac{H_0^2}{c^2}\left(\Omega_{\mathrm{m}0}^0 - 1 + \Omega_\lambda^0\right)$	$\left[\frac{1}{\mathrm{cm}^2}\right]$	*Krümmung*
$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_\mathrm{m}^0 - \Omega_\lambda^0$	$[1]$	*Bremsparameter*
η	$[\mathrm{cm}]$	*konforme Zeit*
ω	$[\mathrm{cm}]$	*mitbewegte Koordinaten*
ξ	$[\mathrm{cm}]$	*physikalischer Abstand*
t	$[\mathrm{s}]$	*Weltzeit*
$G_{\alpha\beta}$	$\left[\frac{1}{\mathrm{cm}^2}\right]$	*Einstein-Tensor*
$R_{\alpha\beta}$	$\left[\frac{1}{\mathrm{cm}^2}\right]$	*Ricci-Tensor*
$T_{\alpha\beta}$	$\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm\ s}^2}\right]$	*Energie-Impuls-Tensor*
T	$\left[\frac{1}{\mathrm{cm}^2}\right]$	*optische Gezeitenmatrix*
$\mathcal{R}$	$\left[\frac{1}{\mathrm{cm}^2}\right]$	*Konvergenz*
$\mathcal{F}$	$\left[\frac{1}{\mathrm{cm}^2}\right]$	*Scherung*

(B.14)

Literaturverzeichnis

[Bardeen et al. 1986] Bardeen, J.M, Bond, J.R., Kaiser, N., Szalay, A.S., 1986:
„The statistics of peaks of Gaussian random fields“
(ApJ, 304, 15)

[Bartelmann, Schneider 1993a] Bartelmann, M., Schneider, P., 1993:
„ Large-scale correlations between QSOs and galaxies. An effect caused by gravitational lensing?“
(A&A, 268, 1-13)

[Bartelmann, Schneider 1993b] Bartelmann, M., Schneider, P., 1993:
„ Large-scale QSO-galaxy correlations revisited“
(A&A, 271, 421-424)

[Bartelmann, Schneider, 1994] Bartelmann, M., Schneider, P., 1994:
„ Large-scale correlations between QSOs and IRAS galaxies“
(A&A, 284, 1-11)

[Bartelmann, Schneider, Hasinger 1994] Bartelmann, M., Schneider, P., Hasinger, G. 1994:
„ Diffuse X-ray emission around high-redshift, radio-loud QSOs“
(A&A, 290, 399)

[Bartelmann 1995] Bartelmann, M., 1995:
„ Cosmological parameters from angular correlations between QSOs and galaxies“
(A&A, 298, 661-671)

[Bartsch, Schneider, Bartelmann 1996] Bartsch, A., Schneider, P., Bartelmann, M., 1996:
„ Reanalysis of the association of high-redshift 1-Jansky quasars with IRAS galaxies“
(A&A, in press)

[Benítez, Martínez-González, 1995] Benítez, N., Martínez-González, E., 1995:
„ High-redshift active galactic nuclei from 1 Jy catalog and the magnification bias“
(ApJ, 448,L89-L91)

[Benítez, Martínez-González, 1996] Benítez, N., Martínez-González, E., 1996:
„Large scale QSO-galaxy correlations for radio loud and optically selected QSO samples“
(astro-ph/9609183)

[Bond, Szalay 1983] Bond, J. R., Szalay, A. S., 1983:
„The collisionless damping of density fluctuations in an expanding universe“
(ApJ, 274, 443-468)

[Carroll, Press, Turner 1992] Carroll, S.M., Press, W.H., Turner, E.L., 1992:
„The cosmological constant“
(ARA&A, 30,499)

[Davis 1992] Davis, M., 1992:
„Is standard CDM compatible with all available data?“
(n Distribution of Matter in the Universe, 2nd DAEC mtg, ed. G.A. Mamon and D. Gerbal (Meudon: Obs. de Paris) p. 375-378

[Dekel, Rees 1987] Dekel, A., Rees, M.J., 1987:
„Physical mechanisms for biased galaxy formation“
(Nature, 326, 455)

[Efstathiou, Bond, White 1992] Efstathiou, G.,Bond, J. R., White, S. D. M., 1992:
„COBE background radiation anisotropies and large-scale structure in the universe“
(Mon. Not. R. Astron. Soc., 258, 1)

[Eke,Cole,Frenk 1996] Eke, V.R.,Cole, S., Frenk, C.S., 1996:
„Using the evolution of clusters to constrain Ω“
(astro-ph/9601088)

[Etherington 1933] Etherington, I.M.H., 1933:
„On the definition of distance in general relativity“
(Phil. Mag., 15, 761)

[Fugmann 1990] Fugmann, W., 1990:
„Statistical gravitational lensing and the Lick catalogue of galaxies“
(A&A, 244, 11F)

[Goenner 1994] Goenner, H., 1994:
„Einführung in die Kosmologie“
(Spektrum, Akad. Verl. 1994, ISBN 3-86025-332-8)

[Gregory, Condon 1991] Gregory, P.C., Condon, J.J., 1991:
„The 87GB catalog of radio sources covering delta between O and +75

deg at 4.85 GHz "
(ApJ. Suppl. 75, 1011)

[Hamilton, Kumar, Lu, Matthews 1991] Hamilton, A.J.S., Kumar, P., Lu, E., Matthews, A., 1991:
„ Reconstructing the primordial spectrum of fluctuations of the universe from the observed nonlinear clustering of galaxies"
(ApJ, 374, L1)

[Harrison 1970] Harrison, E.R., 1970:
„ Fluctuations at the threshold of classical cosmology "
(Phys. Rev. D1,2726)

[Hartwick, Schade, 1990] Hartwick, F.D.A., Schade, D., 1990:
„ The space distribution of quasars"
(ARA&A, 28, 437)

[Holtzman 1989] Holtzman, J.A., 1989:
„ Microwave background and large-scale structure in universes with cold dark matter, baryons, radiation, and massive and massless neutrinos"
(ApJ, 71, 1-24)

[Hubble 1936] Hubble, E., 1936:
„The realm of the nebulae"
(Jale Univ. Press, 1936)

[Jain, Mo, White 1996] Jain, B., Mo, H.J., White, S.D.M., 1996:
„ The evolution of correlation functions and power spectra in gravitational clustering "
(Mon. Not. R. Astron. Soc., 276, L25)

[Kaiser, 1984] Kaiser, N., 1984:
„ On the spatial correlations of Abell clusters"
(ApJ, 284,L9)

[Kaiser, 1992] Kaiser, N., 1992:
„ Weak gravitational lensing of distant galaxies"
(ApJ, 388,272-286)

[Kauffmann, Nusser, Steinmetz 1996] Kauffmann, G., Nusser, A., Steinmetz, M., 1996:
„ Galaxy Formation and Large-Scale Bias"
(Mon. Not. R. Astron. Soc., in press [astro-ph/9512009])

[Marzke, Geller, Huchra 1994] Marzke, R.O., Geller, M.J., Huchra, J.P., 1994:
„ The luminosity function for different morphological types in the CfA redshift survey"
(AJ, 108,437-445)

[Mather et al. 1990] Mather, J.C. et al., 1990:
„A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite “
(ApJ, 354,L37)

[Narayan, Bartelmann, 1996] Narayan, R., Bartelmann, M., 1996:
„Lectures of Gravitational Lensing“
(Proc. 1995 Jerusalem Winter School, eds. A. Dekel & J.P.Ostricker, Cmbridge Univ. Press)

[Narayan, Wallington, 1993] Narayan, R., Wallington, S., 1993:
„Gravitational lenses in the Universe“
(Proc. 31st Liège Astroph. Coll., eds. J. Surdej et al.)

[Padmanabhan 1993] Padmanabhan, T., 1993:
„Structure formation in the universe“
(Cambridge: University Press)

[Peacock, Dodds 1996] Peacock, J.A., Dodds, S.J., 1996:
„Non-linear evolution of cosmological power spectra“
(Mon. Not. R. Astron. Soc., 280,L19-L26(1996))

[Peebles 1993] Peebles, P.J.E., 1993:
„Principles of physical cosmology“
(Princeton: University Press)

[Peebles, Yu 1970] Peebles, P.J.E. ,Yu ,J.T., 1970:
„Primeval adiabatic pertubation in an expanding universe“
(ApJ, 162,815)

[Pen 1996] Pen, U.L., 1996:
„Cosmological constraints from clusters of galaxies “
(ApJ, in Press [astro-ph/9610147])

[Rodrigues-Williams, Hogan, 1994] Rodrigues-Williams, L.L., Hogan, C.J., 1994:
„Statistical association of QSO's with foreground galaxy clusters“
(AJ, 107, 451)

[Rodrigues-Williams, Hawkins, 1995] Rodrigues-Williams, L.L., Hawkins, M.R.S., 1995:
„Dark matter“
(AIP Conf. Proc. 336, eds. S.S. Holt & C.L. Bennett (New York: AIP))

[Schechter 1976] Schechter, P., 1976:
„An analytic expression for the luminosity function for galaxies“
(The Astrophysical Jornal, 203:297-306)

[Schmidt 1963] Schmidt, M., 1963:
„ 3C273: A star-like object with large red-shift“
(Nature, 197, 1040)

[Schneider, Bartelmann 1995] Schneider, P., Bartelmann, M., 1995:
„ The power spectrum of density fluctuations in the Zel'dovich approximation “
(Mon. Not. R. Astron. Soc., 273, 475-483)

[Schneider, Ehlers, Falco 1992] Schneider, P.,Ehlers, J., Falco, E.E., 1992:
„ Gravitational lenses“
(Heidelberg: Springer)

[Seitz, Schneider, 1995] Seitz, S., Schneider, P., 1995:
„ The density of 1-Jansky sources around Zwicky clusters“
(A&A, 302, 9)

[Seitz, Schneider, Ehlers 1994] Seitz, S., Schneider, P., Ehlers, J., 1994:
„ Light propagation in arbitrary spacetimes and the gravitational lens approximation “
(UK: Class. Quantum Grav.)

[Seljak 1996] Seljak, U., 1996:
„ Gravitational lensing effect on cosmic microwave background anisotropies“
(ApJ, 463, 1S)

[Sexl, Urbantke 1995] Sexl, R., Urbantke, H., 1995:
„ Gravitation und Kosmologie“
(Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag)

[Smoot et al. 1992] Smoot, G. F. et al., 1992:
„ Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps “
(ApJ, 396,L1)

[Sugiyama 1995] Sugiyama, N., 1995:
„ Cosmic Background Anisotropies in Cold Dark Matter Cosmology“
(ApJS, 100, 281)

[Viana, Liddle 1996] Viana, P.T.P., Liddle, A.R., 1996:
„ The cluster abudance in flat and open cosmologies “
(Mon. Not. R. Astron. Soc., 281,323(1996))

[Warren, Hewett, Osmer 1994] Warren, S.J., Hewett, P.C., Osmer, P.S., 1994:
„ A wide-field multicolor survey for high-redshift quasars, z greater than

or equal to 2.2. 3: The luminosity function "
(ApJ, 421, 412)

[Walsh, Carswell, Weymann 1979] Walsh, D., Carswell, R.F., Weymann, R.J., 1979:
„ A search for associations of distant radio-bright quasars with Abell clusters: an effect of gravitational amplification bias? "
(Nature, 279, 381)

[Wu, Han, 1995] Wu, X.-P., Han, J., 1995:
„ A search for associations of distant radio-bright quasars with Abell clusters: an effect of gravitational amplification bias?"
(Mon. Not. R. Astron. Soc., 272, 705)

[Pei 1994] Pei, Y.C., 1994:
„ The luminosity function of quasars"
(The Astrophysical Jornal, 438:623-631)

[Zel'dovich 1972] Zel'dovich, Ya. B., 1972:
„ A hypothesis, unifying the structure and the entropy of the Universe"
(Mon. Not. R. Astron. Soc., 160, 1P)

Danksagung

Als erstes möchte ich meiner Frau Gabriela danken, die mich während der ganzen Zeit liebevoll und vielseitig unterstützt hat. (Stellvertretend sei das gute, italienische Essen erwähnt, weswegen ich während meiner Diplomarbeit wohl gut 5 kg an Gewicht zugelegt habe.)

Mein besonderer Dank gilt Dr. Matthias Bartelmann, der mir stets mit Rat und Tat zur Seite stand. Er hatte immer Zeit für mich und beantwortete geduldig alle meine Fragen, die oft wohl etwas naiv waren. Ich konnte während meiner Arbeit sehr viel von ihm lernen. Insbesondere Danke ich ihm für seine unendliche Geduld im Ausbessern meiner Tip- und Kommafehler. Weiter möchte ich ihm danken, daß er mich vielen interessanten Leuten vorgestellt hat, stellvertretend hierfür sei Dr. Tsafrir Kolatt erwähnt, dem ich an dieser Stelle nochmals herzlich für sein Programm zur Berechnung des Powerspektrums danken möchte.

Bei der „Linsen-Gruppe“ hier am Max-Planck-Institut für Astrophysik möchte ich mich für die angenehme Atmosphäre und die vielen, interessanten Seminare bedanken. Stellvertretend sei Dr. habil. Peter Schneider und Dr. Matthias Bartelmann genannt, deren aufmunternde Worte mein Unbehagen vor eigenen Vorträgen zu mindern vermochten.

Prof. Dr. Wolfgang Hillebrandt danke ich dafür, daß er es mir ermöglicht hat meine Diplomarbeit am MPA anzufertigen. Weiter möchte ich ihm dafür danken, daß es mir möglich war, alle Einrichtungen an diesem exzellenten Institut zu nützen.