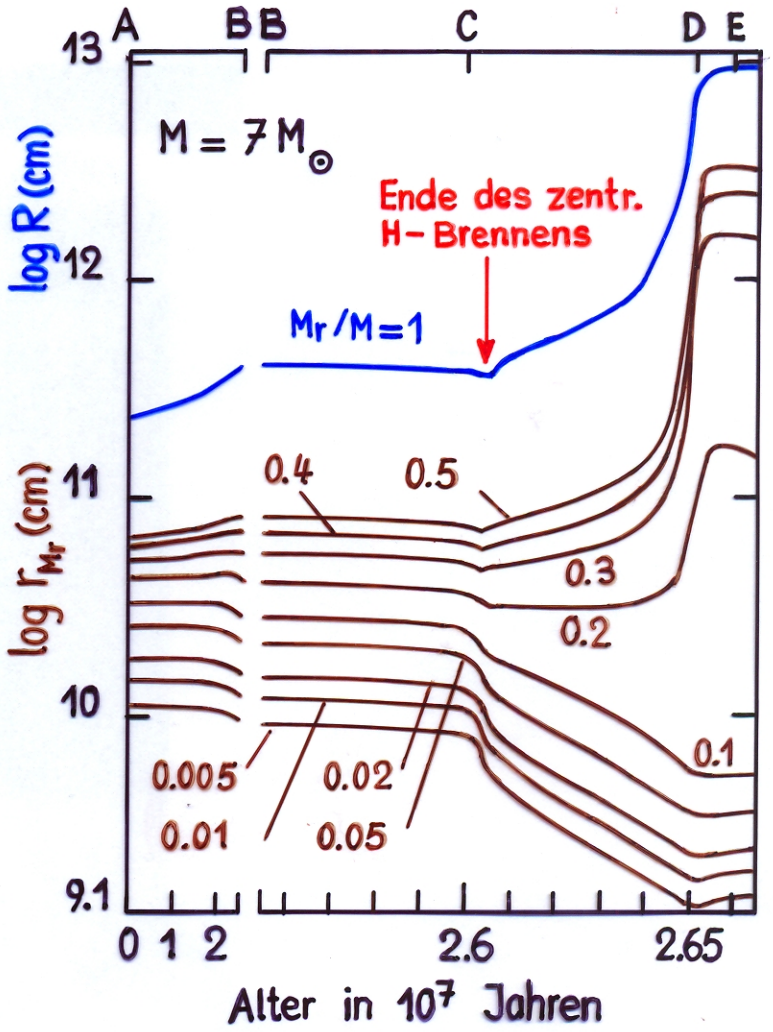
23. Von der Hauptreihe zum Heliumbrennen

Aus 22 : Heliumbrennen muss durch die Kontraktion des Zentralgebiets nach dem Wasserstoffbrennen eingeleitet werden.

Hier : Betrachten verschiedene Aspekte der Entwicklung zum Heliumbrennen

23.1. Das Spiegelungsprinzip

Empirisch aus numerischen Rechnungen gefunden

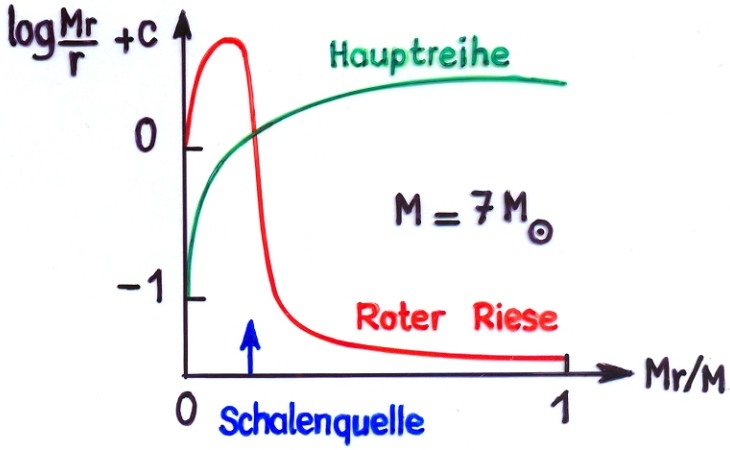


Spiegelungsprinzip:

- Kontraktion des Kerns bewirkt Expansion der Hülle. $r(M_r)$ von Kern und Hülle verlaufen qualitativ spiegelbildlich. Spiegelungspunkt ≈ Massenschale der Schalenquelle

→ Kontraktion des Kerns → Expansion des Sterns → Entwicklung zum Roten Riesen

Der Grund für dieses Verhalten ist schwer zu verstehen. Er hängt aber offenbar mit dem Verlauf von $\phi(M_r) = GM_r/r$ zusammen.



Mit der Kontraktion wächst das Potential $\phi_c = GM_c/r_c$. Numerische Experimente (Höppner–Weigert–Experiment) zeigen, dass

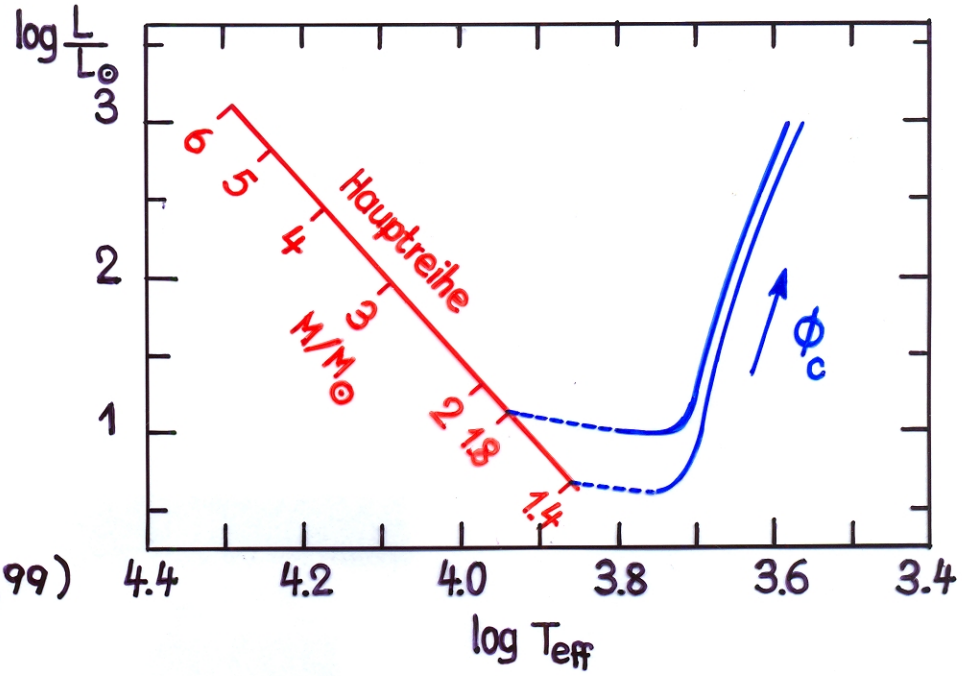
$$R \sim \phi_c^{\nu} \quad \text{mit} \quad \nu > 0$$

Das Höppner-Weigert-Experiment:

künstliche Erhöhung von ϕ_c im Sternzentrum

→ je grösser ϕ_c, desto grösser der Radius

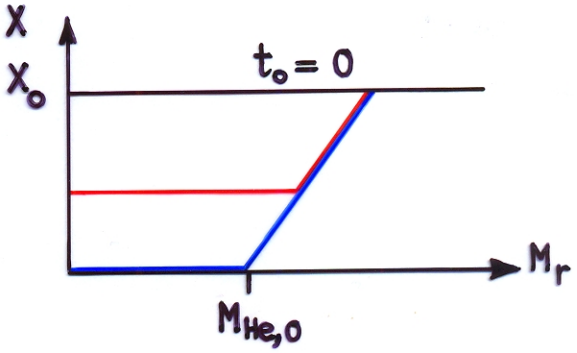
(→ Höppner, W., Weigert, A.: 1973, Astron. Astrophys. 25, 99)



23.2. Entwicklung von Sternen mit $M \gtrsim 2.5\,M_\odot$

Charakteristisch für diese Sterne:

- konvektives Zentrum während des zentralen Wasserstoffbrennens
- Heliumkern mit Masse $M_{He,0}(M)$ am Ende des zentralen Wasserstoffbrennens und
- Bildung einer Schalenquelle bei $M_r > M_{He,0}$



Entwicklung zum Heliumbrennen hängt etwas von $M_{He,0}$ ab!

a) $2.5\,M_\odot \lesssim M \lesssim 5\,M_\odot$: → $(M_{He,0}/M) < (M_c/M)_{sc} \cong 0.37\,(\mu/\mu_c)^2$

→ ∃ langsame Phase mit Schalenbrennen bis $(M_{He}/M) = (M_c/M)_{sc}$

▶ sobald $(M_{He}/M) = (M_c/M)_{sc}$: Kontraktion des Kerns mit $\tau \approx \tau_{KH}$

→ Erhitzung des Kerns bis das Heliumbrennen zündet

Kernkontraktion → Expansion der Hülle (Spiegelungsprinzip), zuerst Entwicklung mit $L \approx$ const., im HRD nach rechts in Richtung HL bis der Stern an die HL "anstösst", danach Entwicklung parallel zur HL (etwas links davon) mit L↑ bis zur Zündung des Heliumbrennens.

Zur Illustration: Die Entwicklung eines Sterns mit $M = 5\,M_\odot$

INNERER AUFBAU UND ENTWICKLUNG VON STERNEN

Entwicklung eines Sterns von 5 Sonnenmassen

I) Zentrales Wasserstoff- und Heliumbrennen

Nach R. Kippenhahn, H.-C. Thomas und A. Weigert:1965, Zeitschrift für Astrophysik 61, 241-267

A) Entwicklung im Hertzsprung-Russel-Diagramm

Koordinaten im H-R-Diagramm und Alter (in 10^7 Jahren) einiger Modelle.

Modell-nummer	Alter	$\log L/L_\odot$	$\log T_e$	Modell-nummer	Alter	$\log L/L_\odot$	$\log T_e$	Modell-nummer	Alter	$\log L/L_\odot$	$\log T_e$
1	0.000	2.783	4.245 *A*	120	5.869	3.121	4.048	262	7.090	3.140	3.684
2	0.250	2.796	4.243	125	5.888	3.041	3.942	263	7.106	3.143	3.684
3	0.500	2.806	4.241	128	5.899	2.944	3.818	264	7.121	3.146	3.685
4	0.625	2.809	4.241	130	5.907	2.849	3.688	265	7.136	3.147	3.683
5	0.688	2.811	4.241	132	5.911	2.855	3.660 *D*	266	7.152	3.148	3.681
6	0.812	2.815	4.240	133	5.913	2.896	3.652	275	7.290	3.166	3.671
7	1.062	2.823	4.239	134	5.915	2.936	3.646	280	7.367	3.176	3.668
8	1.562	2.839	4.237	137	5.920	2.982	3.642	282	7.398	3.180	3.667
9	2.465	2.870	4.231	138	5.921	2.985	3.641	284	7.429	3.187	3.668
10	3.189	2.897	4.226	140	5.923	2.990	3.641	287	7.491	3.202	3.672
11	3.718	2.919	4.220	146	5.935	2.996	3.641 *E*	290	7.583	3.225	3.681
12	4.177	2.937	4.213	150	5.954	2.989	3.641	295	7.737	3.266	3.728
13	4.537	2.954	4.207	155	5.977	2.983	3.642	296	7.768	3.271	3.736
14	4.822	2.967	4.202	160	6.004	2.979	3.643	297	7.799	3.281	3.756
15	5.044	2.978	4.197	165	6.031	2.978	3.643	298	7.829	3.285	3.769 *H*
16	5.232	2.988	4.194	170	6.070	2.976	3.644	299	7.845	3.275	3.753
17	5.370	2.998	4.193 *B*	175	6.108	2.974	3.644	300	7.853	3.249	3.712
18	5.473	3.008	4.194	180	6.147	2.971	3.645	302	7.856	3.219	3.681
19	5.533	3.017	4.197	185	6.201	2.966	3.647	304	7.860	3.148	3.642 *K*
20	5.564	3.025	4.201	190	6.239	2.962	3.648	305	7.861	3.171	3.634
21	5.587	3.034	4.208	195	6.278	2.960	3.651	306	7.862	3.207	3.628
22	5.602	3.043	4.215	200	6.332	2.960	3.655	307	7.863	3.233	3.623
23	5.611	3.053	4.221	205	6.393	2.981	3.667	310	7.867	3.270	3.620
24	5.616	3.064	4.228	210	6.439	3.007	3.681	312	7.879	3.326	3.612
25	5.618	3.070	4.231	215	6.493	3.036	3.705	314	7.902	3.428	3.600
29	5.622	3.081	4.236 *C*	220	6.547	3.062	3.735	315	7.917	3.499	3.593
35	5.625	3.071	4.232	225	6.609	3.090	3.768	317	7.948	3.653	3.571
36	5.626	3.070	4.231	230	6.686	3.115	3.789	319	7.979	3.805	3.555
38	5.627	3.070	4.228	233	6.732	3.125	3.790	320	7.983	3.830	3.551
40	5.628	3.072	4.227	235	6.763	3.131	3.790 *F*	324	7.987	3.870	3.546
45	5.630	3.085	4.223	237	6.794	3.136	3.789	325	7.988	3.878	3.546
50	5.635	3.102	4.219	240	6.840	3.142	3.782	328	7.991	3.903	3.544
55	5.644	3.113	4.214	242	6.871	3.144	3.773	330	7.993	3.922	3.542
60	5.657	3.121	4.209	243	6.886	3.143	3.767	334	7.996	3.947	3.540
65	5.676	3.128	4.204	245	6.917	3.141	3.750	350	7.997	3.958	3.539
70	5.692	3.131	4.201	247	6.948	3.137	3.727	360	8.002	4.025	3.531
80	5.694	3.132	4.201	250	6.994	3.121	3.686	370	8.007	4.090	3.523
90	5.708	3.134	4.200	251	7.009	3.113	3.674	380	8.01148	4.161	3.516
95	5.751	3.145	4.190	252	7.025	3.098	3.662	386	8.01437	4.195	3.512
100	5.787	3.154	4.176	253	7.040	3.097	3.657 *G*	390	8.01557	4.204	3.511
105	5.798	3.156	4.171	254	7.048	3.110	3.661	397	8.01726	4.210	3.511 *L*
110	5.832	3.161	4.140	257	7.059	3.123	3.671	399	8.01774	4.210	3.511
115	5.849	3.150	4.107	260	7.075	3.135	3.679	400	8.01798	4.209	3.511

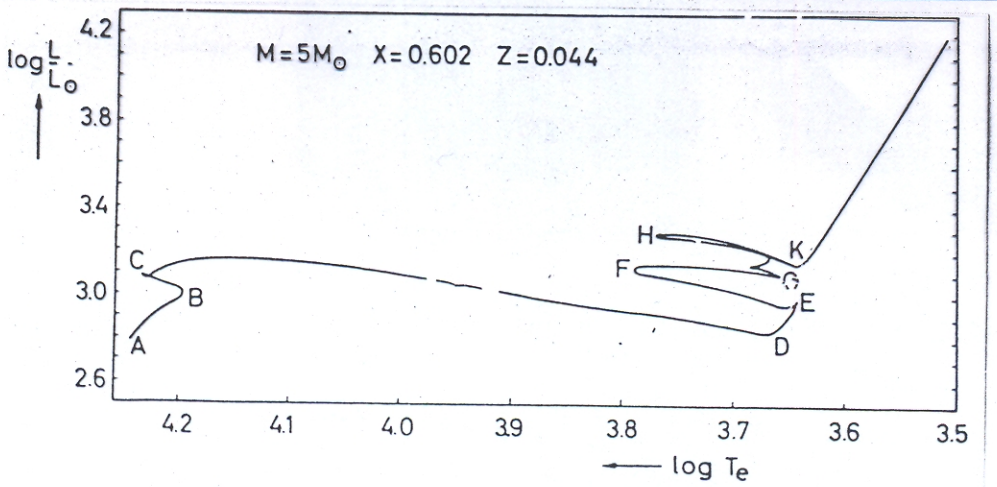
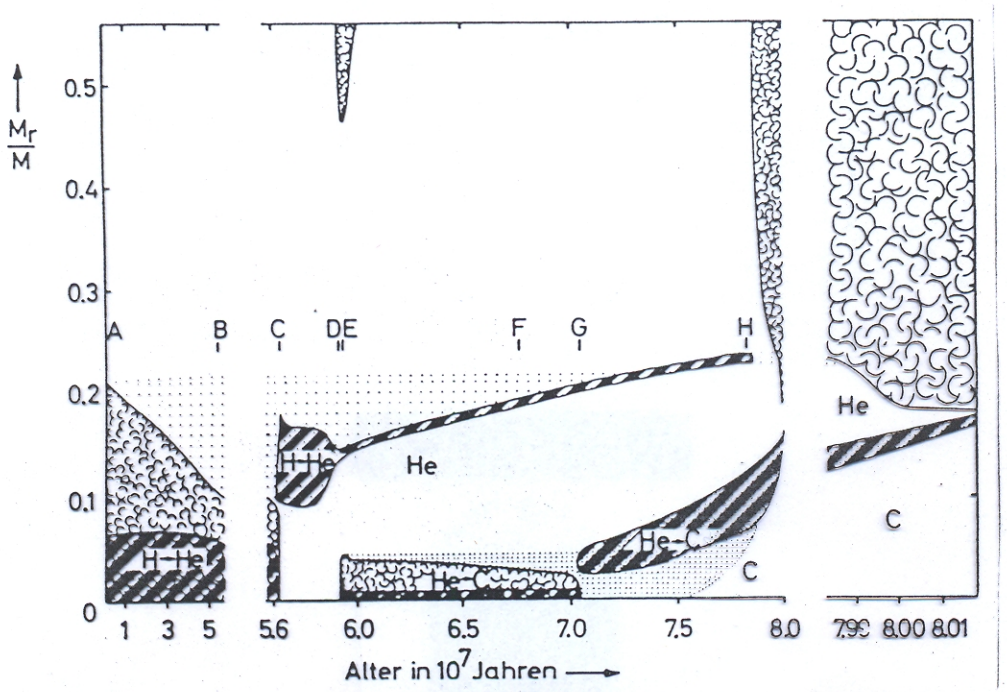


Fig. 3. The evolution of the 5 $M_\odot$ star in the H-R-Diagram.

B) Veränderungen im inneren Aufbau



Zeitliche Veränderungen im Sterninneren bei einem Stern von 5 Sonnenmassen. Gezeichnet ist M_r/M über dem Alter des Sterns, gerechnet in 10^7 Jahren, seit Verlassen der Hauptreihe. "Wolkige" Gebiete entsprechen Konvektionszonen. Gebiete, in denen die nukleare Energieerzeugung 10^3 erg g^{-1} sec^{-1} übersteigt, sind schraffiert dargestellt. Punktiert sind die Gebiete, in denen der Wasserstoffgehalt X_H bzw. der Heliumgehalt X_{He} nach innen abnehmen. (Als Grenzen des weitpunktierten Gebietes wurden die Stellen gewählt, an denen sich der Wasserstoffgehalt um 0.01 von der Anfangschemie unterscheidet, bzw. wo er den Wert 0.01 hat. Als Grenzen für das engpunktierte Gebiet wurden die Stellen gewählt, an denen sich der Kohlenstoffgehalt um 0.01 von der Anfangschemie unterscheidet, bzw. wo der Heliumgehalt 0.01 ist.) Die Buchstaben A bis H geben eine Zuordnung zu entsprechenden Stellen des Entwicklungsweges im Hertzsprung-Russel-Diagramm. Immer wenn sich der Stern im Gebiet der Roten Riesen befindet, hat er eine äussere Konvektionszone, die von der Oberfläche bis tief in das Innere reicht. Man beachte die entsprechenden "wolkigen" Gebiete, die von oben her in das Bild hinein ragen.

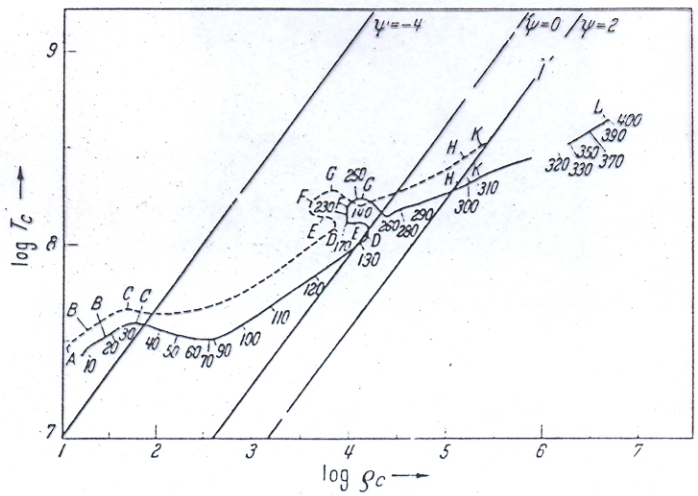


Abb. 3. Zentralwerte von Dichte und Temperatur während der Entwicklung. Die angeschriebenen Modellnummern geben die Zuordnung zu Tab. 1, die Buchstaben die Zuordnung zu Abb. 1. Zum Vergleich wurde die entsprechende Kurve für den Stern von 7 $M_\odot$ gestrichelt eingezeichnet. Ferner wurden zur Übersicht einige Linien ψ = const. (ψ Entartungsparameter, für Wasserstoffgehalt $X = 0$) eingezeichnet

INNERER AUFBAU UND ENTWICKLUNG VON STERENEN

Entwicklung eines Sterns von 7 Sonnenmassen

Nach E. Hofmeister, R. Kippenhahn und A. Weigert: 1964, Zeitschrift für Astrophysik 59, 242-260

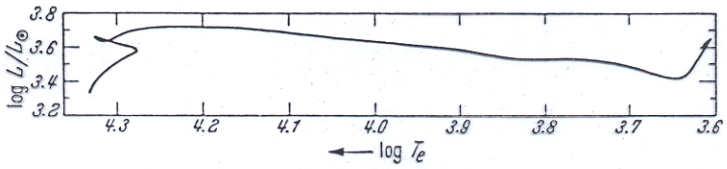


Abb. 1. Der Entwicklungsweg im H-R-Diagramm, von der Hauptreihe bis zum Beginn des Heliumbrennens; vgl. Tab. 5

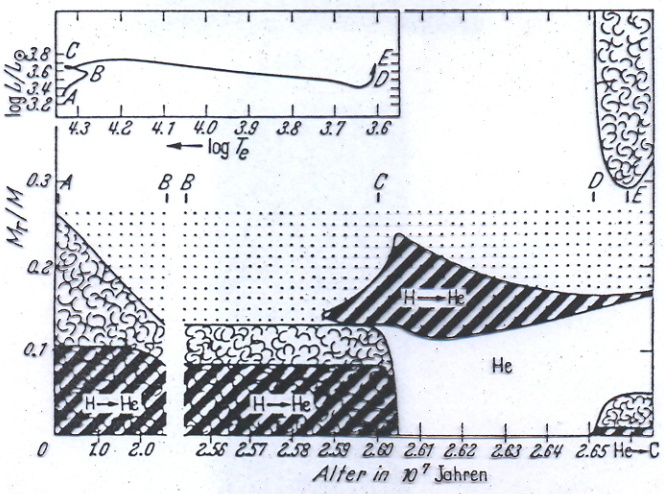


Abb. 2. Zeitliche Veränderungen im Sterninnern; gezeichnet ist M_r/M über dem Alter des Sterns, gerechnet in 10^7 Jahren seit Verlassen der Hauptreihe. (Von Punkt B an ist die Zeitskala um den Faktor 100 gestreckt!) „Wolkige" Gebiete entsprechen Konvektionszonen. Gebiete, in denen die nukleare Energieerzeugung 10^3 erg g^{-1} sec^{-1} übersteigt, sind schraffiert. Punktiert sind die Gebiete nach innen wachsenden Molekulargewichts (als Grenzen wurden die Stellen gewählt, bei denen sich die Wasserstoffhäufigkeit X um 0.01 von der Anfangschemie unterscheidet und wo $X = 0.01$ ist). Die Buchstaben A bis E geben eine Zuordnung zu entsprechenden Stellen des schematischen Entwicklungsweges links oben; sie sind in Tab. 5 bei den zugehörigen Modellen vermerkt

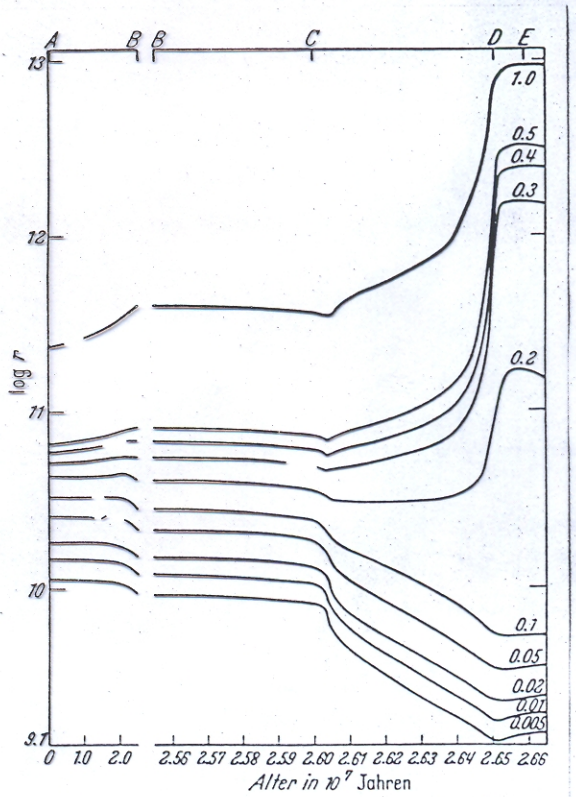


Abb. 3. Die Radiusänderungen verschiedener Massenschalen (charakterisiert durch M_r/M) im Stern während der Entwicklung. Die Buchstaben A bis E geben die Zuordnung zu Abb. 2 und Tab. 5. (Man beachte, daß der Zeitmaßstab zwischen B und E hundertfach gestreckt ist gegenüber dem zwischen A und B!)

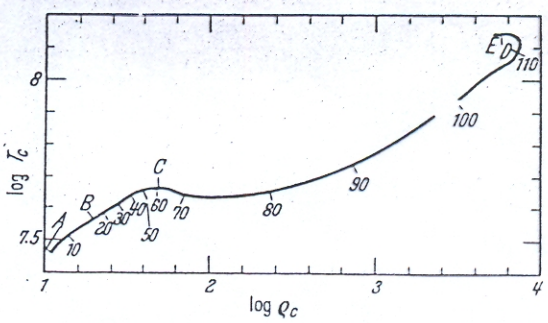


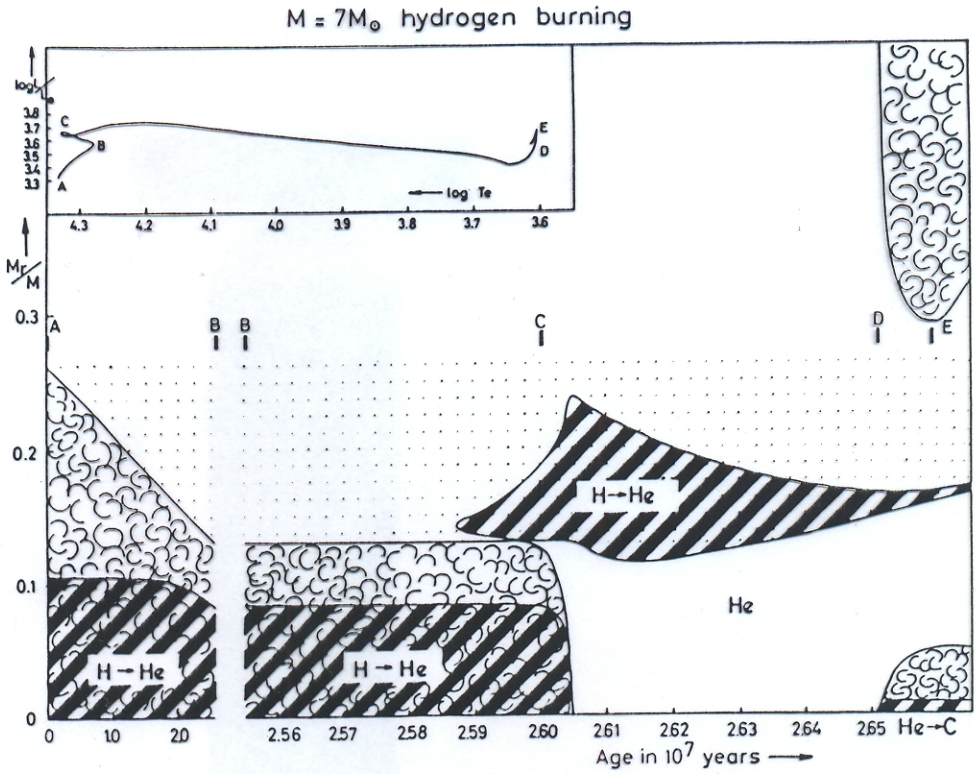
Abb. 4. Zentralwerte von Dichte und Temperatur während der Entwicklung. Die angeschriebenen Modellnummern geben die Zuordnung zur Tab. 5

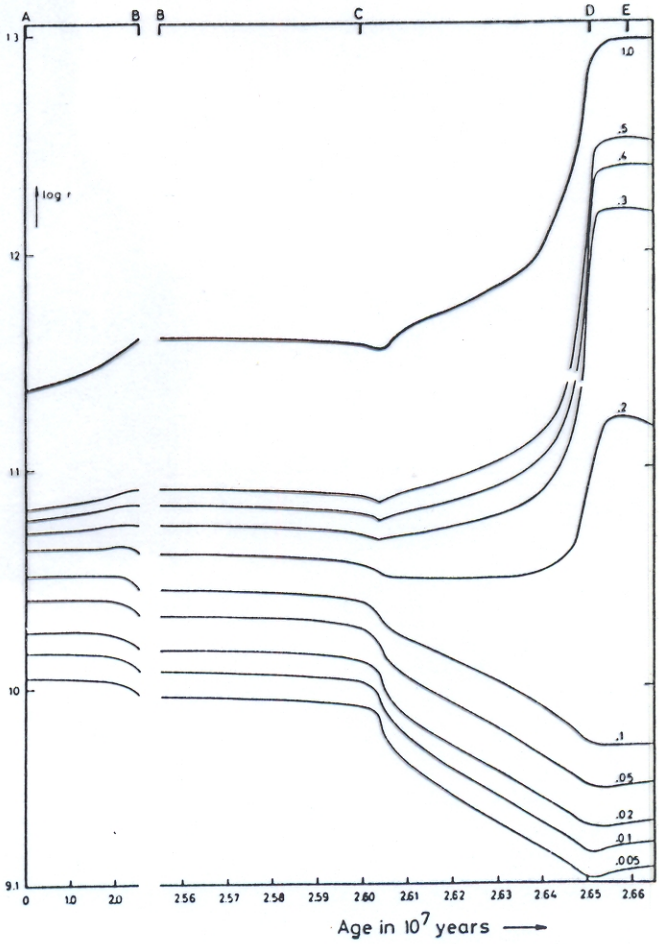
Entwicklung eines Sterns von $7M_\odot$

Hofmeister, E., Kippenhahn, R., Weigert, A.: 1966, in: Stellar Evolution, R.F. Stein, A.G.W. Cameron (Hsg.), Plenum Press, New York

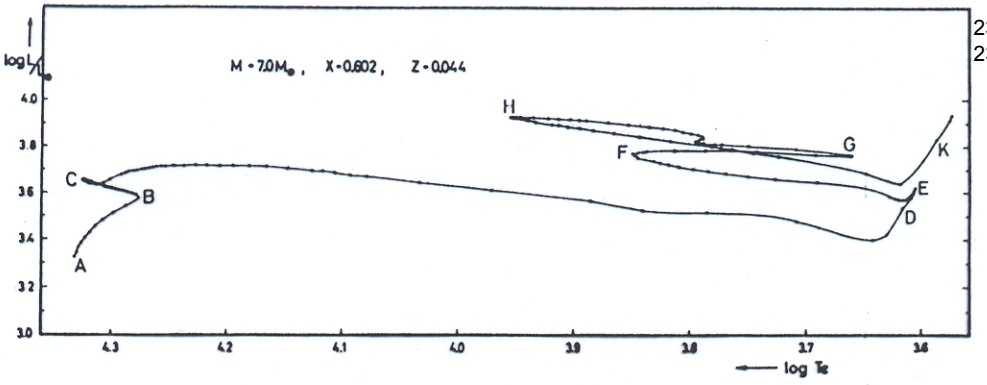
Hofmeister, E., Kippenhahn, R., Weigert, A.: 1964, Zeitschr. Astrophys. 59, 242

1. Wasserstoff-Brennen

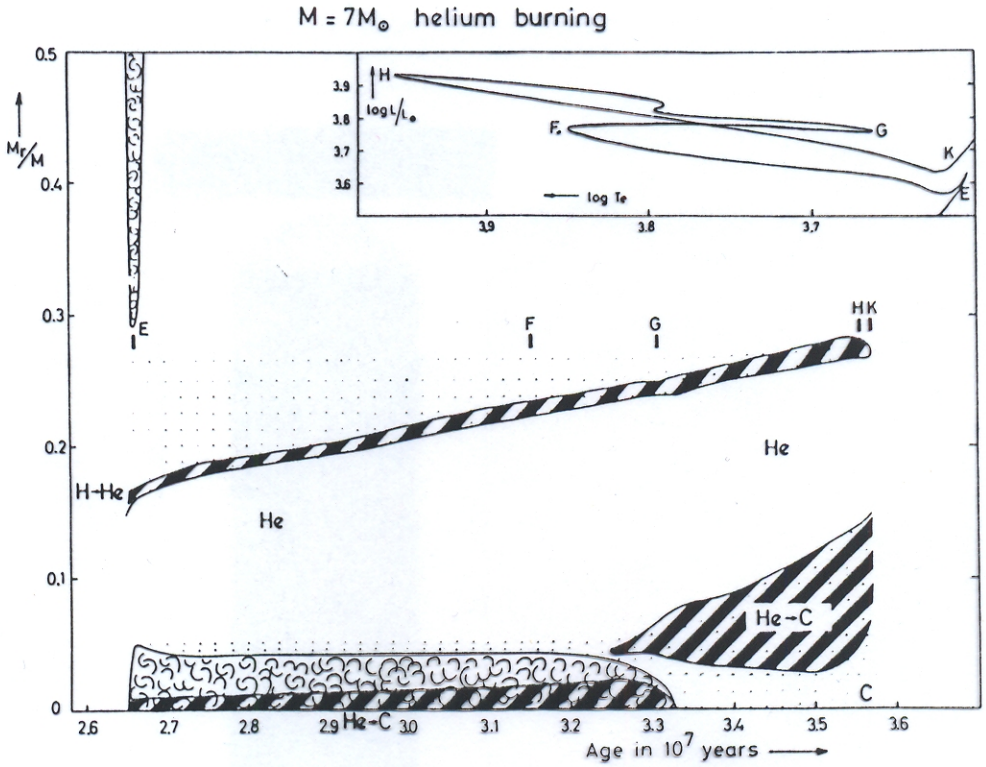


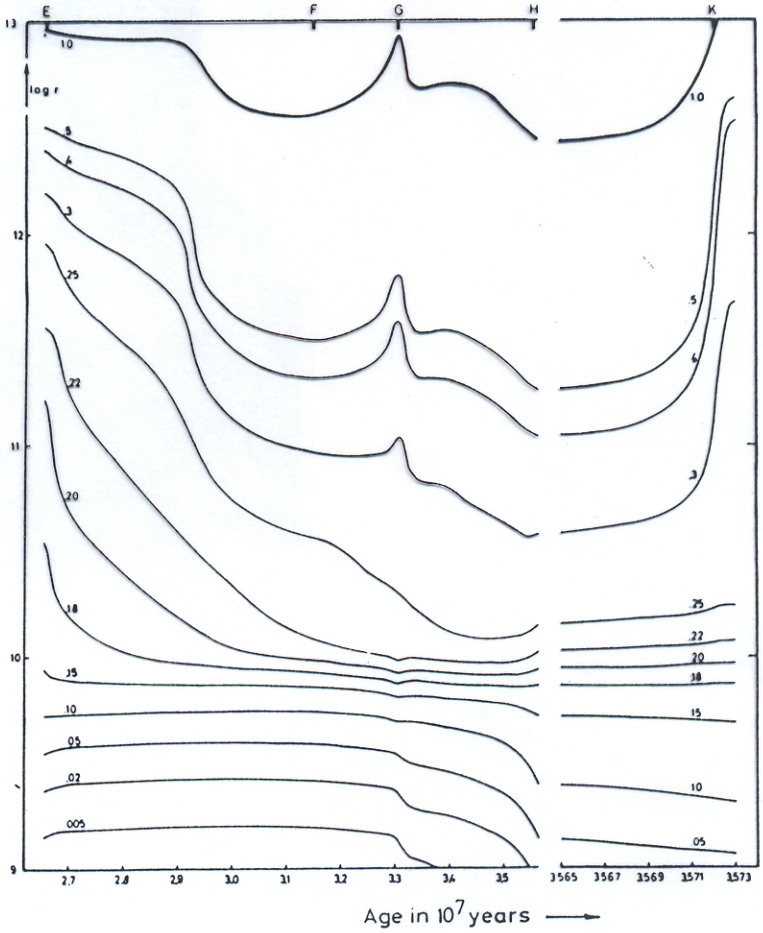


23.9
23.10



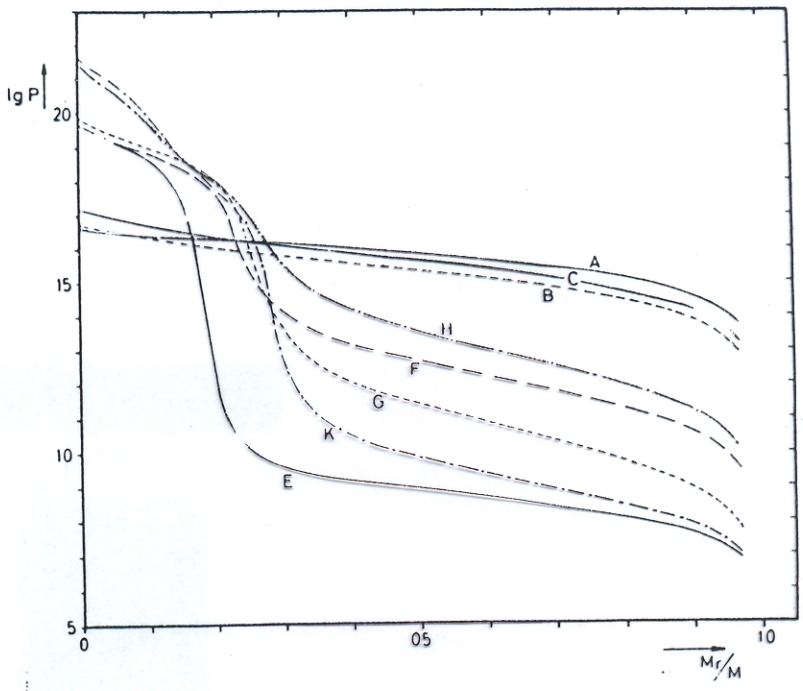
2. Helium - Brennen

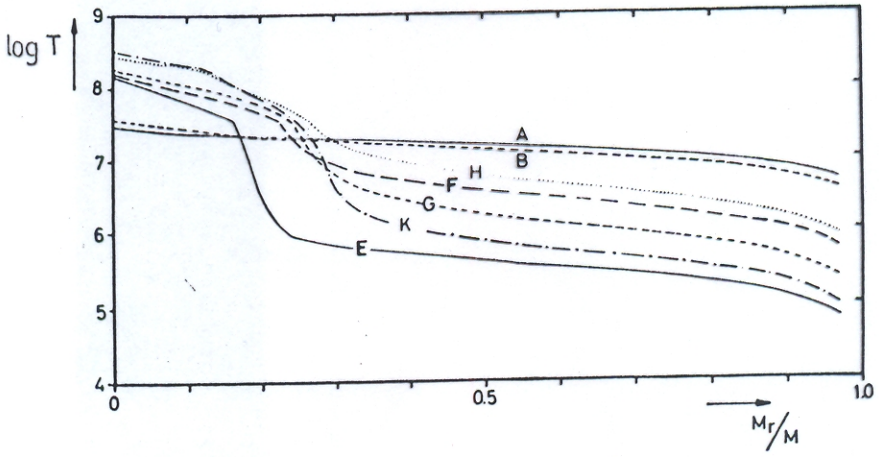


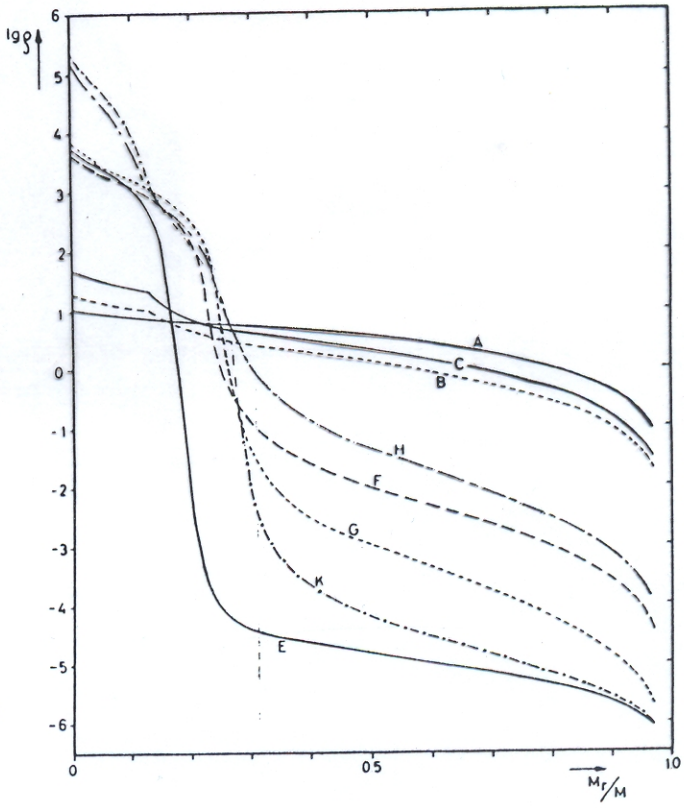


Entwicklung eines Sterns von $7 M_\odot$:

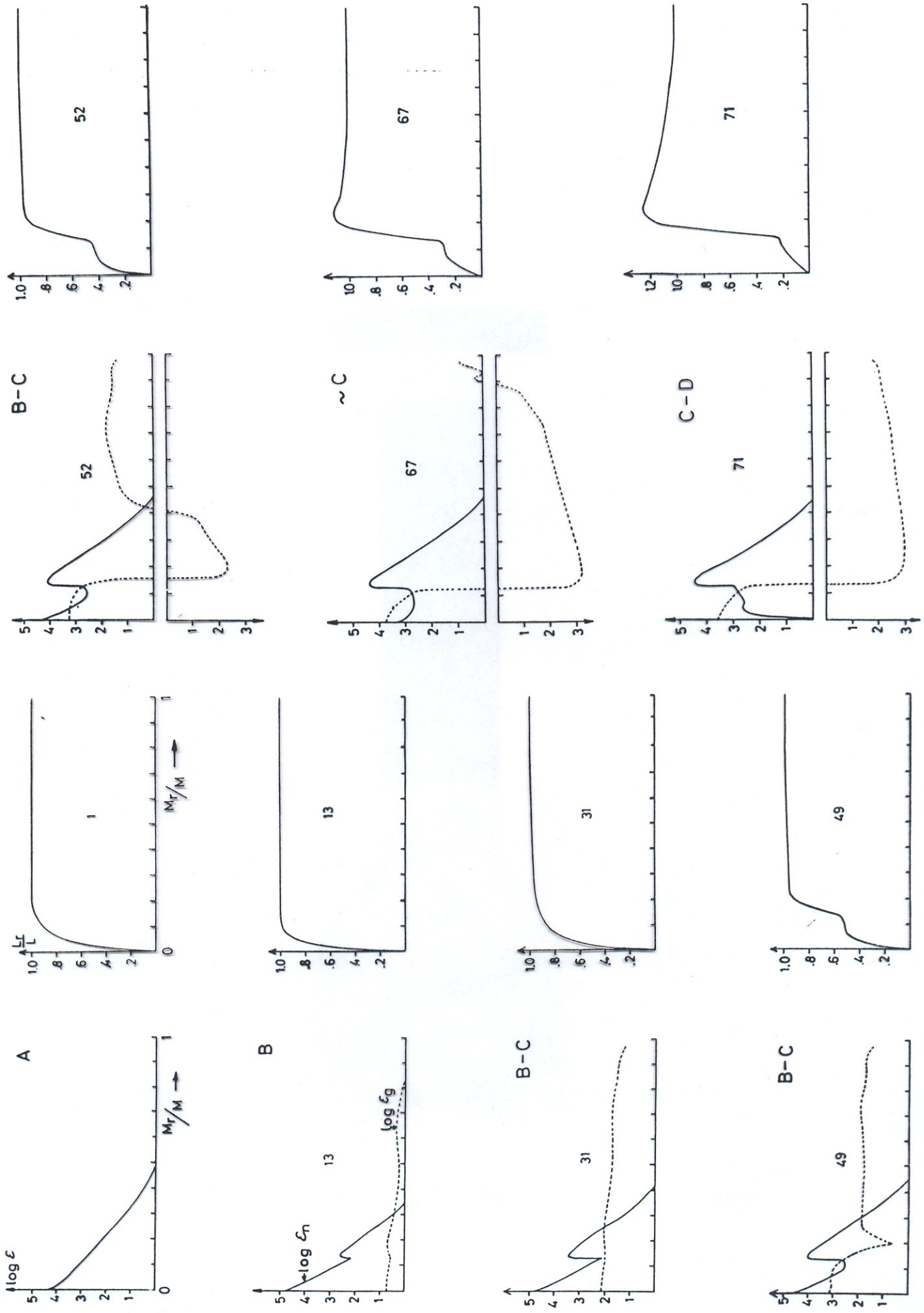
$P(M_r)$, $T(M_r)$ und $\rho(M_r)$



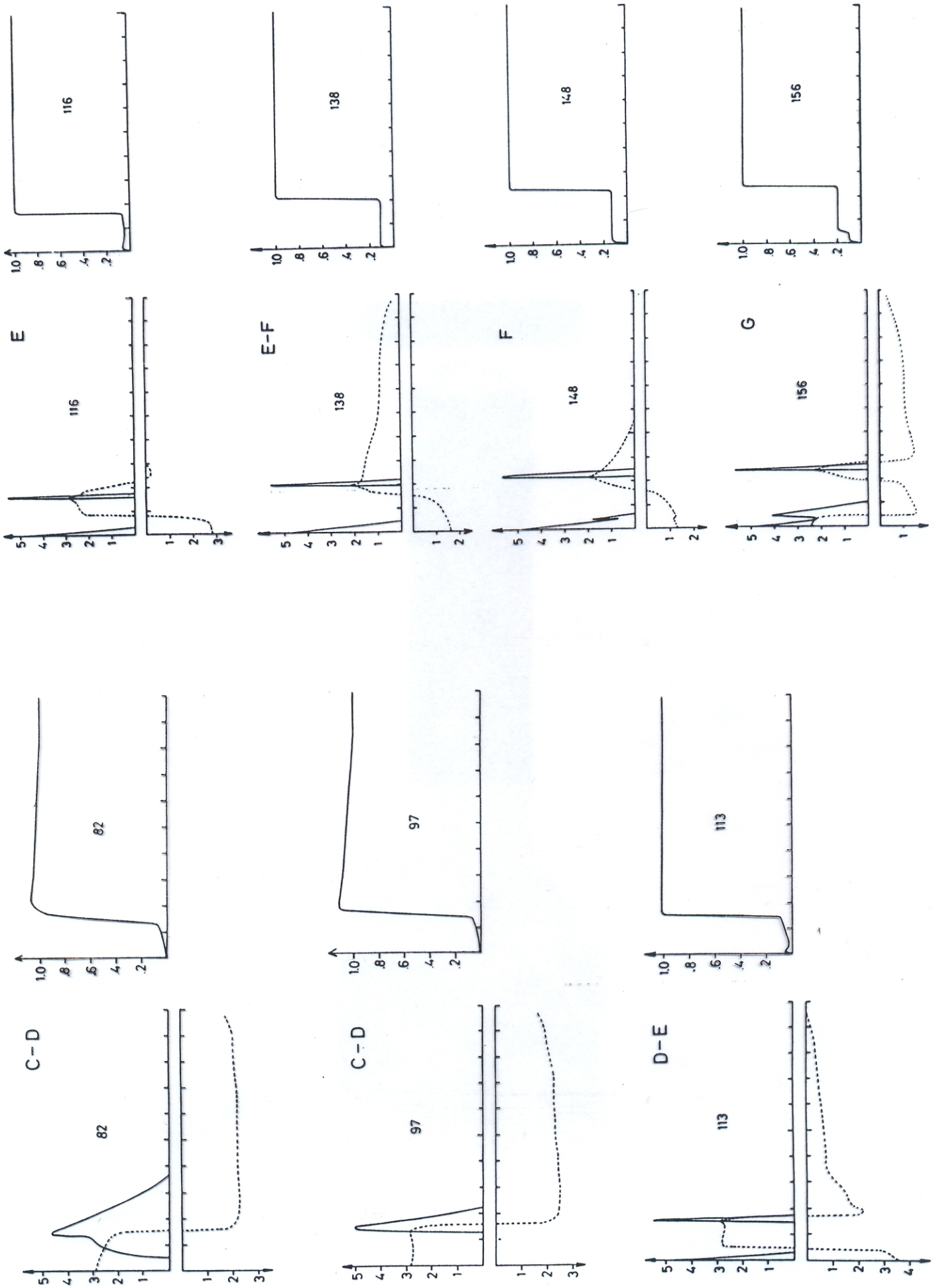




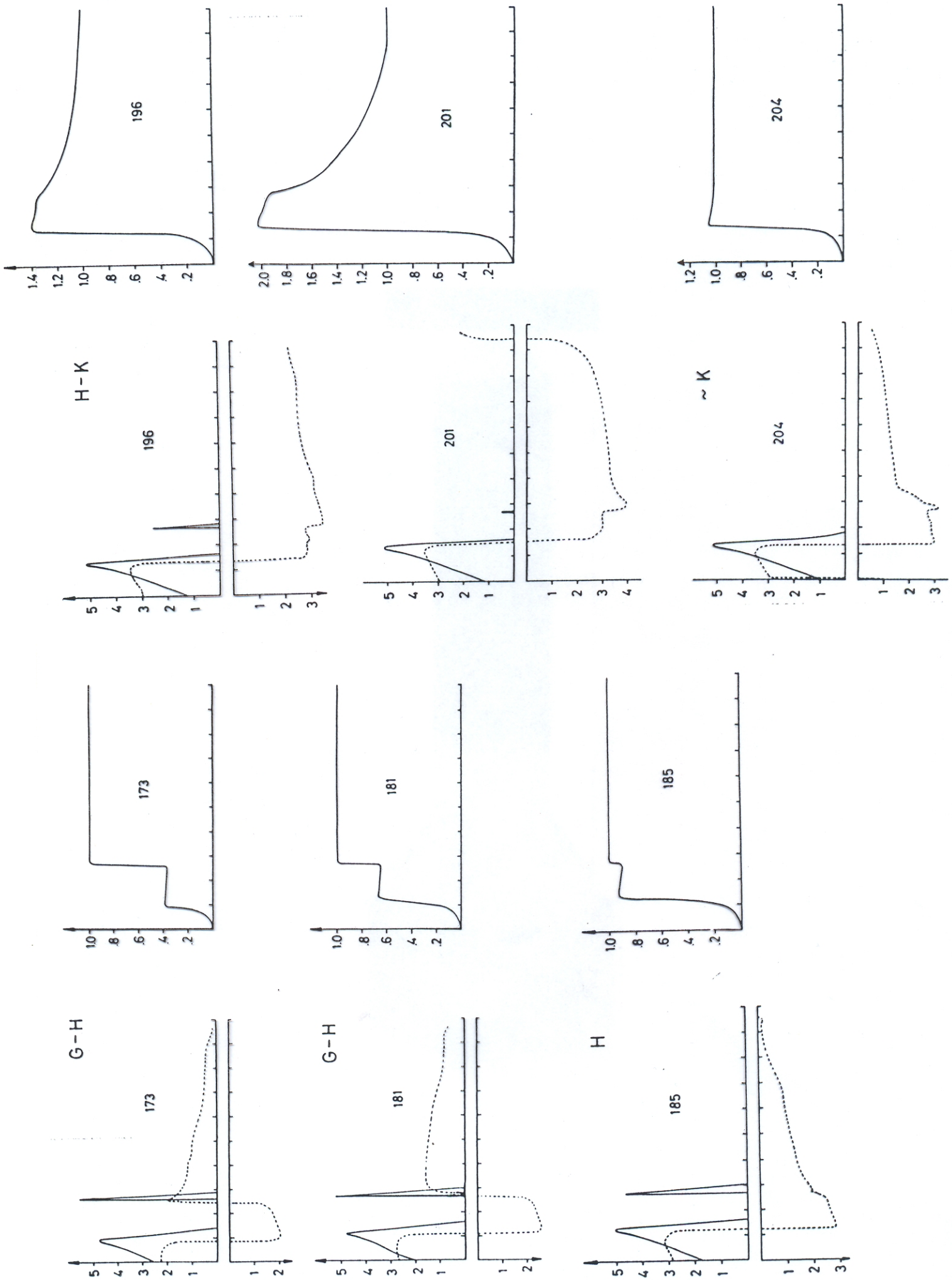
Entwicklung eines Sterns von $7 M_\odot$: $\varepsilon(M_r)$, L_r/L (I)



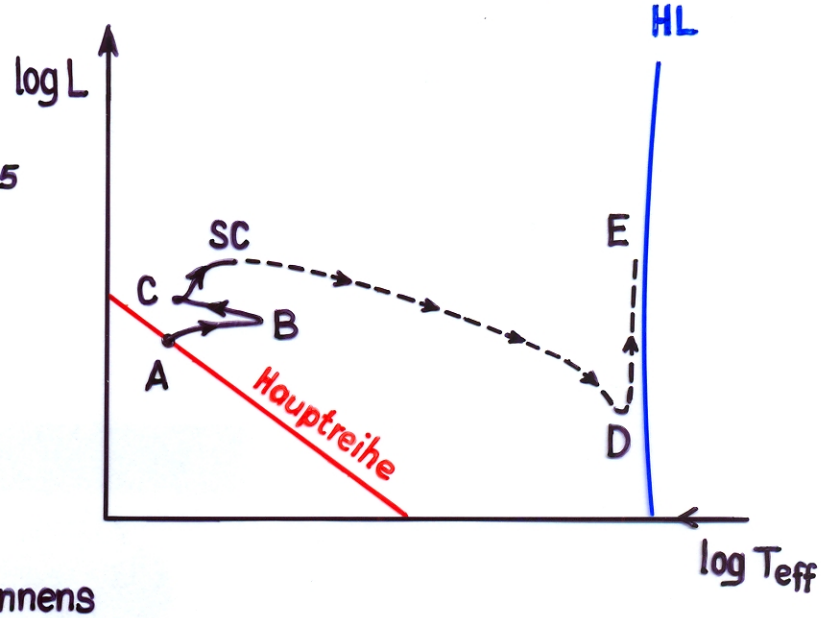
Entwicklung eines Sterns von $7 M_\odot$: $\varepsilon(M_r)$, L_r/L (II)



Entwicklung eines Sterns von $7\,M_\odot$: $\varepsilon(M_r)$, L_r/L (III)



Schematische Entwicklung im HRD ($2.5 M_\odot \lesssim M \lesssim 5 M_\odot$)



A : $t=0$, Stern auf der HR

A–C : zentrales Wasserstoffbrennen, $\tau = \tau_N \sim M_{He}/L \approx 10^{10} a \, (M/M_\odot)^{-2.5}$

C : Ende des zentralen Wasserstoffbrennens, Beginn des Schalenbrennens

SC : Punkt, wo $(M_{He}/M) = (M_c/M)_{SC}$

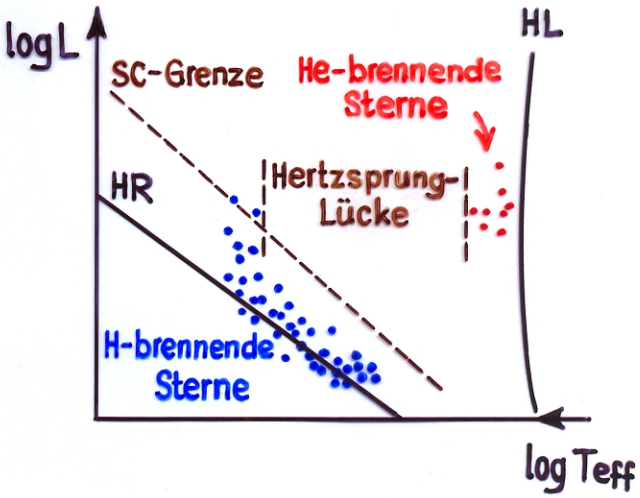
C–SC : langsame Phase des Schalenbrennens

E : Zündung des zentralen Heliumbrennens

SC–E : schnelle Entwicklungsphase, $\tau \approx \tau_{KH}$, Kontraktion des Kerns, Expansion der Hülle

▶ Schnelle Entwicklung von SC–E → geringe Aufenthaltswahrscheinlichkeit zwischen SC und E ($\tau_{KH}/\tau_N \approx 10^{-2}$). → Hertzsprung-Lücke im HRD (von Feldsternen und Sternhaufen)

▶ langsame Entwicklung während des zentralen Heliumbrennens (im HRD ungefähr bei Punkt E, → 24.)



→ Erwarten viele Sterne auf oder in der Nähe der HR, einige als Rote Riesen an der HL, aber praktisch keine dazwischen, d.h. in der Hertzsprung-Lücke.

Bestätigung durch Beobachtungen (FHD von offenen Haufen)

b) $5 M_\odot \lesssim M \lesssim 10 M_\odot$: → $(M_{He,0}/M) > (M_c/M)_{SC}$

→ ∃ keine langsame Phase des Schalenbrennens. Die Kernkontraktion beginnt bei Punkt C. Sonst Entwicklung qualitativ gleich wie bei a).

Zur Illustration: Entwicklung eines Sterns von $7\,M_\odot$

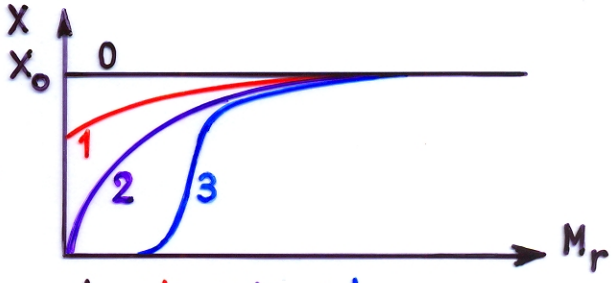
c) $M \gtrsim 10\,M_\odot$:

Entwicklung wie bei b). Jedoch ist hier die HL schon so weit von der HR weg, dass das Heliumbrennen schon vor Erreichen der HL einsetzt.
→ He-Brennen nicht in der Nähe der HL, sondern bei höheren T_{eff}.
→ "Gelbe Riesen".

23.3. Entwicklung von Sternen kleiner Masse, $M \lesssim 2.5\,M_\odot$

Entwicklung zum Heliumbrennen verläuft anders als bei Sternen mit $M \gtrsim 2.5\,M_\odot$
Grund: ∃ mehrere wichtige Unterschiede zu den massereicheren Sternen:

a) Sterne mit $M \lesssim 1.3\,M_\odot$ haben während des zentralen Wasserstoffbrennens ein radiatives Zentralgebiet
→ zuerst brennt nur ein kleines Kerngebiet aus ($\sim t_2$), das durch Schalenbrennen langsam anwächst ($t_2 \to t_3$)



$t_0 < t_1 < t_2 < t_3$

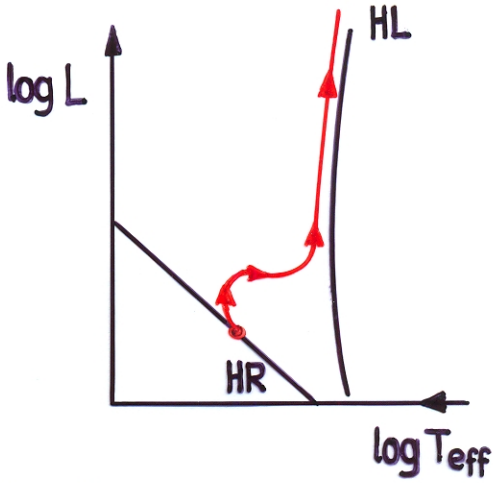
Sterne mit $1.3\,M_\odot \lesssim M \lesssim 2.5\,M_\odot$ haben einen kleinen konvektiven Kern während des zentralen Wasserstoffbrennens. → Isothermer He-Kern mit $(M_{He,0}/M) < (M_c/M)_{SC}$.
Bei Sternen mit $M \gtrsim 2M_\odot$ ist das Gas im isothermen Kern noch fast ideal → SC-Grenze. Bei Sternen mit $M \lesssim 2M_\odot$ ist die SC-Grenze jedoch ohne Bedeutung (Entartung!, je kleiner M desto stärker)

b) Kontraktion des Kerns führt zur Entartung (bzw. zu deren Verstärkung)

→ Weitere Kontraktion ist nicht mehr mit Temperaturerhöhung verbunden
→ Das Zünden des Heliumbrennens ist damit erst einmal verhindert.
(zur Illustration: → Entwicklung eines Sterns von $1.3\,M_\odot$)

c) Für kleine M ist die HL in der Nähe der HR. → Bei Expansion der Hülle während der Kernkontraktion kann der Stern nicht weit nach rechts im HRD ausweichen. → Er "stösst" an der HL an → Entwicklung entlang der HL zu höheren Leuchtkräften.

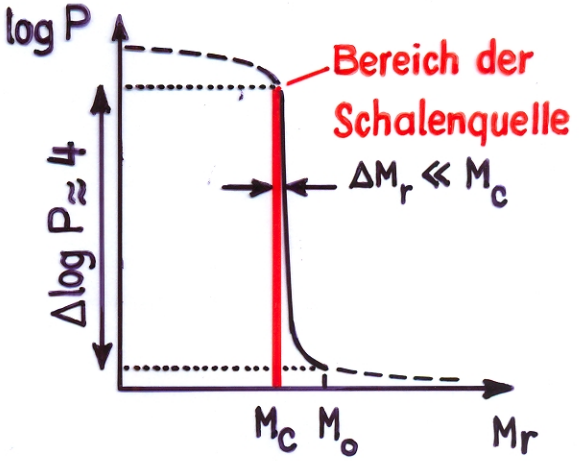
▶ Entwicklung von Sternen kleiner Masse führt zu Sternen mit einem entarteten Kern und einer Wasserstoffschalenquelle. Das Zünden des Heliumbrennens wird durch die Entartung des Kerns verhindert.



23.4. Sterne mit einer Schalenquelle um einen entarteten Kern

a) Schalenquellen-Homologie (Refsdal und Weigert, 1970, Astron. Astrophys. 6, 426) macht Ergebnisse numerischer Rechnungen plausibel

Betrachten Sterne mit einer Schalenquelle um einen entarteten Kern mit Masse M_c und Radius R_c. $\phi_c \sim M_c/R_c$ gross im Bereich der Schalenquelle, starker Abfall von ϕ für $r > R_c$



→ Grosse Schwerebeschleunigung bei $r = R_c$:
$$g = \text{grad}\,\phi = \frac{GM_c}{R_c^2}$$

▶ Starker Abfall der Strukturvariablen P, T, ρ im Bereich der Schalenquelle, da $dP/dr = -g\rho$, um typisch 4 Zehnerpotenzen.

▶ Ausdehnung der Schalenquelle in M_r klein, $\Delta M_r/M_c \ll 1$, in r jedoch sehr ausgedehnt.

▶ Zeitliche Entwicklung wesentlich durch die Schalenquelle verursacht. Schalenbrennen → $\dot{M}_c > 0$

Annahmen:

Betrachten nur den Bereich $M_c \leq M_r \leq M_o$. Da $\Delta M_r = M_o - M_c \ll M_c$, nehmen wir $M_r = M_c = \text{const}$. Für die entspr. Radien gilt: $r(M_c) = R_c$, $r(M_o) = R_o$, wobei $R_o - R_c$ nicht klein gegen R_c

Vorgehen: Vergleichen zwei Sterne mit Kernen der Masse M_c und M_c'. Setzen zunächst $R_c = R_c'$, da entartete Kerne fast inkompressibel

<u>Ansatz</u> für den Verlauf von P, T, L_r und ϱ im Bereich $M_c \leq M_r \leq M_o$ (wird durch numerische Ergebnisse nahegelegt):

$$\frac{\varrho(r)}{\varrho'(r)} = \text{const.} = \left(\frac{M_c}{M_c'}\right)^{\alpha_1} \quad \forall\, r \in R_c \leq r \leq R_o$$

$\rightarrow$ $\varrho(r) \sim M_c^{\alpha_1}$ und entspr. $T(r) \sim M_c^{\beta_1}$, $P(r) \sim M_c^{\gamma_1}$, $L_r \sim M_c^{\delta_1}$

<u>Zustandsgleichung</u> im Bereich der Schalenquelle : ideales Gas, d.h. $P \sim \varrho T$

$\rightarrow$ $M_c^{\gamma_1} \sim M_c^{\alpha_1} \cdot M_c^{\beta_1}$ ▶ $\underline{\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1}$ (1)

<u>Hydrostatisches Gleichgewicht</u>:

$$P(r) = \underbrace{P(R_o)}_{\substack{\ll P(R_c) \\ \approx 0}} - \int_{R_o}^{r} \frac{G M_c}{r^2} \varrho\, dr \sim M_c \int_{R_o}^{r} \frac{\varrho}{r^2} dr = M_c \left(\frac{M_c}{M_c'}\right)^{\alpha_1} \int_{R_o}^{r} \frac{\varrho'}{r^2} dr$$

und

$$P'(r) = \underbrace{P'(R_o)}_{\approx 0} - \int_{R_o}^{r} \frac{G M_c'}{r^2} \varrho'\, dr \sim M_c' \int_{R_o}^{r} \frac{\varrho'}{r^2} dr$$

$\rightarrow$ $\dfrac{P(r)}{P'(r)} = \left(\dfrac{M_c}{M_c'}\right)^{1+\alpha_1}$ oder $P(r) \sim M_c^{1+\alpha_1} \sim M_c^{\gamma_1}$ ▶ $\underline{\gamma_1 = 1 + \alpha_1}$ (2)

<u>Strahlungstransport</u> im Bereich der Schalenquelle . Mit $\varkappa = \text{const.}$ folgt

$d(T^4) \sim L_r \varrho \dfrac{dr}{r^2}$ $\rightarrow$ analog zur obigen Herleitung : ▶ $\underline{4\beta_1 = \alpha_1 + \delta_1}$ (3)

<u>Energieerzeugung</u> : $\varepsilon_N \sim \varrho^{n-1} T^{\nu}$ $\rightarrow$ $dL_r \sim \varrho^n T^{\nu} r^2 dr$

$\rightarrow$ analog zur obigen Herleitung : ▶ $\underline{n\alpha_1 + \nu\beta_1 = \delta_1}$ (4)

▶ $\exists$ 4 Gleichungen (1)–(4) für die 4 Exponenten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und δ_1 mit 2 Parametern n und ν.

$$\underline{\alpha_1 = \frac{4-\nu}{n+1}, \quad \beta_1 = 1, \quad \gamma_1 = 1 + \frac{4-\nu}{n+1}, \quad \delta_1 = 4 - \frac{4-\nu}{n+1}}$$

▶ Setzen $n = 2$, $\nu = 13$ (CNO-Zyklus) : $\underline{\underline{\alpha_1 = -3, \beta_1 = 1, \gamma_1 = -2, \delta_1 = 7}}$

▶ Entwicklungseffekte : Da $\dot{M}_c > 0$, folgt

- $\varrho \sim M_c^{-3}$, $\rightarrow \dot{\varrho}/\varrho = -3\dot{M}_c/M_c < 0$. Da $M_H = M - M_c \approx$ const., kann ϱ nur abnehmen wenn sich die Hülle ausdehnt. Da mit $\dot{M}_c > 0$ $\dot{R}_c < 0$ $\rightarrow$ Kontraktion des Kerns – Expansion der Hülle $\rightarrow$ Finden Spiegelungsprinzip bestätigt

- $L \sim M_c^7$: starkes Anwachsen von L mit M_c. L hängt nur von M_c ab, aber nicht von M. $\rightarrow$ Kernmasse-Leuchtkraft-Beziehung. Anstieg von L durch Erhöhung von T mit M_c ($T \sim M_c$) und starker T-Abhängigkeit von ε ($\sim T^\nu$) verursacht.

- $T \sim M_c$: $\rightarrow$ Erhöhung der Temperatur des entarteten ($\sim$isothermen) Kerns durch Erhöhung der Temperatur in der Schalenquelle.
  $\rightarrow$ M_c wächst, bis T_c die Zündtemperatur für das Heliumbrennen erreicht. (Mit der Zündung des Heliumbrennens ist diese Entwicklungsphase beendet).

Verbesserter Ansatz für die Schalenquellen-Homologie

▶ Berücksichtigung der R_c-Abhängigkeit (nach Refsdal und Weigert, 1970)

Ansatz: $\varrho(r) \sim M_c^{\alpha_1} R_c^{\alpha_2}$; $T(r) \sim M_c^{\beta_1} R_c^{\beta_2}$; $P(r) \sim M_c^{\gamma_1} R_c^{\gamma_2}$; $L(r) \sim M_c^{\delta_1} R_c^{\delta_2}$

ergibt auf analoge Weise wie oben 4 Gleichungen für die $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und δ_2 mit den Lösungen

▶ $$\alpha_2 = \frac{\nu-6}{n+1} \quad ; \quad \beta_2 = -1 \quad ; \quad \gamma_2 = \frac{\nu-n-7}{n+1} \quad ; \quad \delta_2 = \frac{3(1-n)-\nu}{n+1}$$

Setzen wieder $n = 2$, $\nu = 13$ (CNO-Zyklus): $\rightarrow$ $\alpha_2 = \frac{7}{3}$; $\beta_2 = -1$; $\gamma_2 = \frac{4}{3}$; $\delta_2 = -\frac{16}{3}$

▶ Da $(d\log R_c / d\log M_c) < 0$, ($M_c$-$R_c$-Beziehung ähnlich wie bei Weissen Zwergen), werden die obigen Entwicklungseffekte verstärkt. Mit $R_c \sim M_c^{-1/3}$ folgt

$$\varrho \sim M_c^{-34/9} \quad ; \quad L \sim M_c^{79/9} \quad ; \quad T_c \sim M_c^{4/3}$$

b) Der Beginn des Heliumbrennens

Zur Illustration: Entwicklung eines Sterns von $1.3 M_\odot$ (Thomas, 1967)

▶ Beginn des He-Brennens, wenn T_c und damit M_c gross genug. Numerische Rechnungen zeigen, dass $M_{c,He} \approx 0.45 - 0.48\, M_\odot$

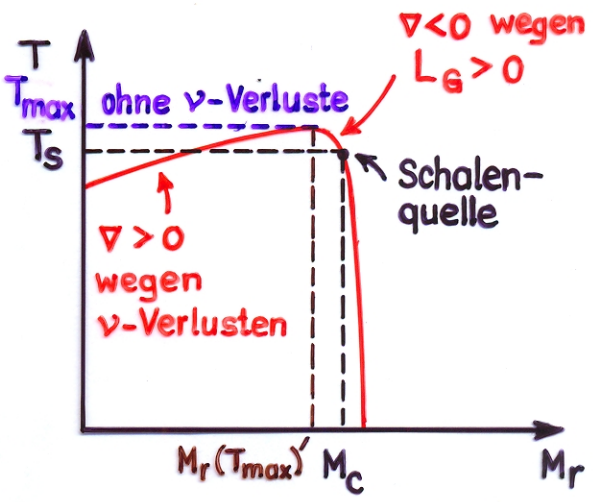
▶ Der entartete Kern ist nicht ganz isotherm. Das Temperaturmaximum ist bei $M_r > 0$. → Das He-Brennen zündet nicht im Zentrum.

∃ 2 Gründe, warum das so ist:

– Schalenquelle erzeugt He, das laufend zu M_c hinzugefügt wird, $\dot{M}_c = \frac{L}{X_0 Q}$
→ ∃ kontinuierlichen Massenstrom durch die Schalenquelle.
→ Neu zu M_c kommende Materie wird komprimiert → Kompressionsenergie, die nach aussen transportiert werden muss. Im Übergangsgebiet zwischen entartetem Kern und Schalenquelle (ideales Gas) nur geringe Wärmeleitfähigkeit → ∃ merkliches ∇ zum Transport der Kompressionsleuchtkraft L_G. Da $L_G \sim \dot{M}_c \sim L \sim M_c^{\delta_1 - \delta_2/3} \approx M_c^8$ wächst $|\nabla|$ mit M_c stark an → ∃ merkliche Temperaturdifferenz zwischen Schalenquelle und entartetem Kern.

– Neutrinoverluste kühlen das Zentrum des Kerns → ∃ relatives Temperaturminimum im Zentrum.

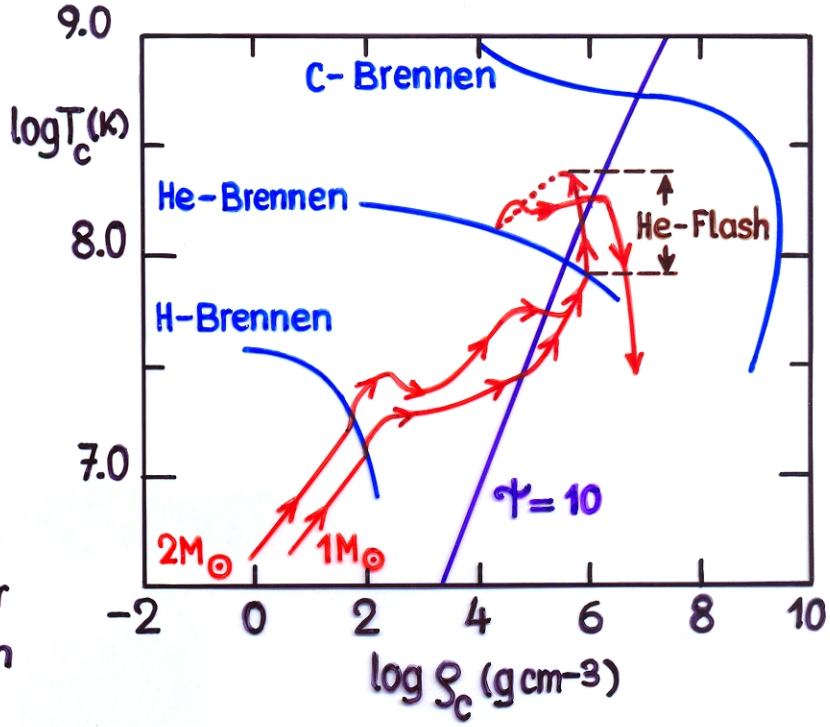
→ Zündtemperatur für das He-Brennen wird zuerst bei $M_r = M_r(T_{max}) > 0$ erreicht, das im entarteten Kern liegt.



▶ Zünden des Heliumbrennens unter entarteten Bedingungen
→ Helium Flash

Nukleares Brennen in entarteten Gebieten ist thermisch instabil (→ 23.5)
→ He-Brennen setzt sehr rasch ein → Flash-Phänomen, da bei Entartung Temperaturschichtung (d.h. die Energieerzeugung) von der Druckschichtung fast vollständig entkoppelt. ε_N in entartetem Gebiet → T↑ bei ρ und $P = \text{const.}$ (da $P = P(\rho)$). T↑ → ε_N↑ → T↑ → thermonuklearen Runaway. T↑ bis $T \approx T_F$, d.h. Aufhebung der Entartung.

Nach Aufhebung der Entartung
∃ starke Rückkopplung
zwischen P, ϱ- und T-Schichtung



Riesige Energieproduktion beim Maximum des Flashs ($T \approx T_F$).
Bsp. Beim $1.3\,M_\odot$ Stern (Thomas, 1967) ist $L_{r,max} \approx 10^{11} L_\odot$

Grosse Energieproduktion dringt aber nicht zur Oberfläche durch, sondern wird von expandierenden Schichten unmittelbar oberhalb der He-Schalenquelle absorbiert. Folge dieser Expansion: Die H-Schalenquelle erlischt.

Oberflächenleuchtkraft L nimmt ab (→ HRD). Gründe: 1. Erlöschen der H-Schalenquelle, 2. Entwicklung mit einer Schalenquelle um einen entarteten Kern abnehmender Masse (Schalenquellen-Homologie, siehe unten)

Dauer des eigentlichen Flashs: ~ einige Stunden (hydrostatisch gerechnet), möglicherweise aber sehr viel weniger (hydrodynamischer Flash)

Post-Flash-Entwicklung: He-Schalenquelle "frisst" sich in ~ 10^5 Jahren zum Zentrum. He-Schalenquelle ist in M_r sehr dünn → thermische Instabilität, sog. Schalen-Flashs (→ 23.5)

<u>He-Flash</u>: Übergang von Stern mit entartetem Kern und einer H-Schalenquelle zu einem mit entartetem Kern und zwei Schalenquellen bei praktisch unveränderter chemischer Zusammensetzung → <u>Bsp. für Doppel-Lösung</u>.

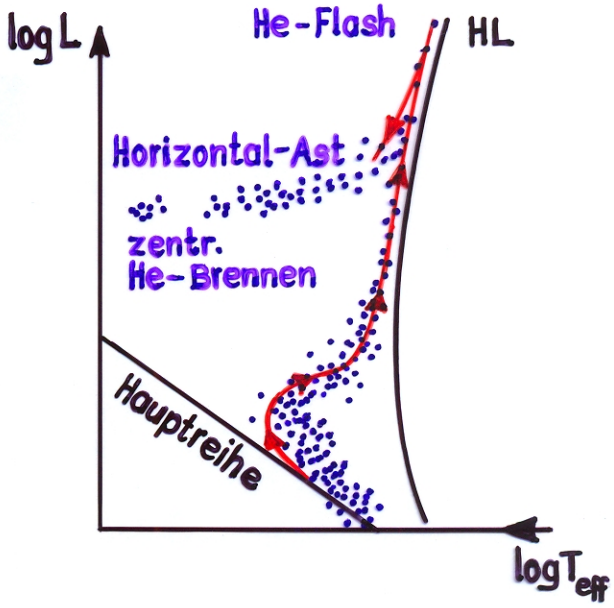
<u>Schalenquellen-Homologie</u>: Nach dem Erlöschen der H-Schalenquelle: Sterne mit entartetem He-Kern und He-Schalenquelle. Wenden Homologie an. Für He-Schalenquelle: $n = 3$, $\nu \approx 20-40$

→ $\alpha_1 = -4 \ldots -9$; $\beta_1 = 1$; $\gamma_1 = -3 \ldots -8$; $\delta_1 = 8 \ldots 13$

Da nun $\dot{M}_c < 0$, nimmt mit M_c auch $L \sim M_c^{8...13}$ sehr stark ab.
(Vgl. dazu die Entwicklung des $1.3\,M_\odot$ Sterns)

<u>Weitere Entwicklung</u> (nicht gerechnet): $\dot{M}_c < 0$ → Entwicklung qualitativ umgekehrt zu der vor dem He-Flash. → Wenn $M_c \downarrow$, dann Neutrino-Verluste $\downarrow$ → Kern wird zunehmend isotherm bei $T \approx T_s$ → Kern wird schliesslich heiss genug für zentrales He-Brennen.

<u>Massearme Sterne mit zentralem He-Brennen</u> werden mit den sog. Horizontalast-Sternen (HB-Stars = <u>h</u>orizontal <u>b</u>ranch stars) in Kugelsternhaufen assoziiert.



Position der HB-Sterne links von der HL bedingt durch niedriges $Z \approx 10^{-3}$ und durch geringe Masse der H-reichen Hülle.
Bei höherem Z ∃ keinen Horizontalast.

Pop II-Sterne ($Z \gtrsim 5\,10^{-3}$) stehen während des zentralen He-Brennens in der Nähe der HL.

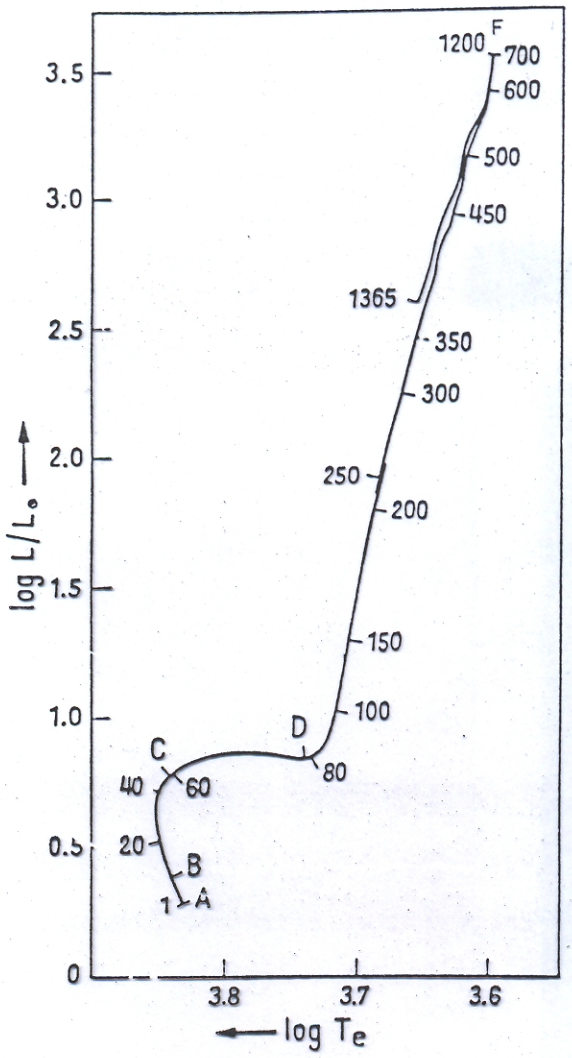
Lage der Sterne mit zentralem He-Brennen im HRD hängt auch von X_0 und M_c/M ab. Aus Vergleich von Rechnungen mit Beobachtungen: $(M_c/M)_{HB} > (M_c/M)_{He\text{-}Flash}$ → Hinweis auf Massenverlust während des He-Flashs (dynamischer Flash). → Erhöhung von M_c/M → ändert die Lage im HRD (→ 27.4)

INNERER AUFBAU UND ENTWICKLUNG VON STERNEN

Entwicklung eines Sterns von 1.3 $M_\odot$ (X=0.90, Z=0.001)

nach H.C. Thomas : Zeitschr. f. Astrophys. 67, 420 (1967)

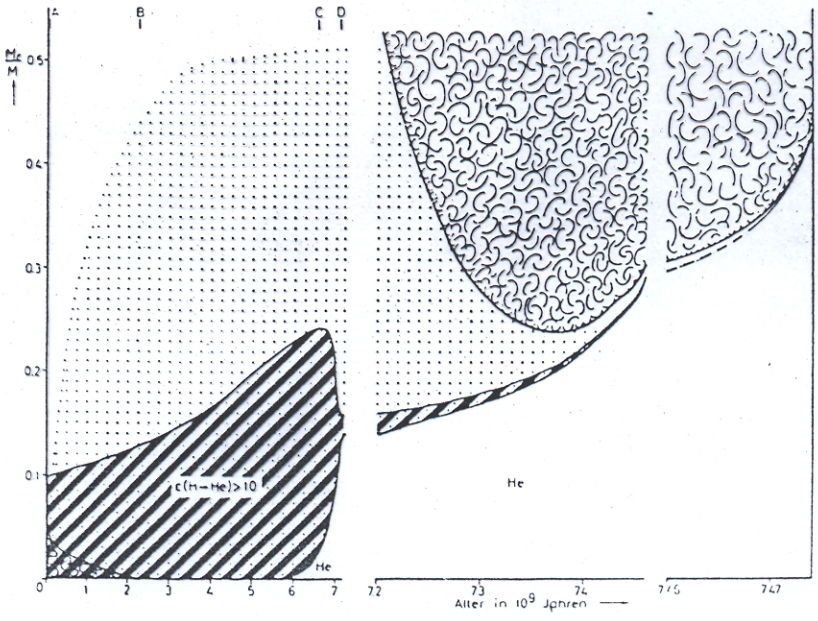
A) Entwicklung im HRD



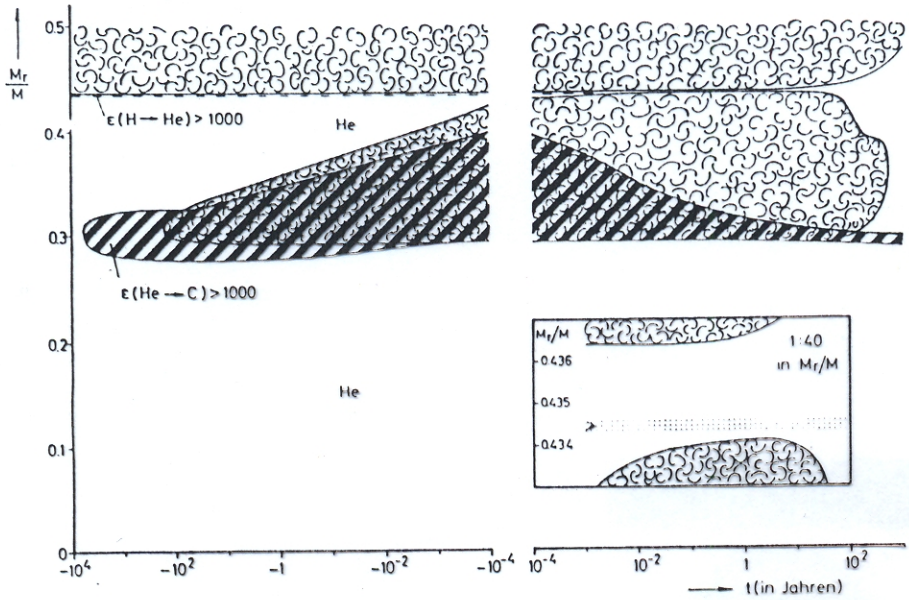
Modell	Alter/10^9a	log $L/L_\odot$	log T_e
1	0	0.282	3.830 A
2	0.25000	0.292	3.831
3	0.74998	0.314	3.833
4	1.45601	0.342	3.835
5	1.73797	0.355	3.836
6	2.00153	0.368	3.837
7	2.24876	0.381	3.838 B
8	2.44328	0.391	3.839
9	2.62834	0.401	3.840
10	2.80552	0.411	3.840
12	3.14259	0.431	3.842
14	3.47267	0.455	3.843
16	3.80529	0.478	3.844
18	4.13988	0.502	3.846
20	4.47584	0.529	3.847
25	5.23927	0.598	3.850
30	5.68511	0.645	3.850
40	6.22633	0.714	3.848
50	6.43115	0.747	3.845
57	6.57050	0.772	3.840 C
60	6.64321	0.786	3.837
70	6.88558	0.841	3.815
79	7.10371	0.847	3.738 D
90	7.17773	0.947	3.719
100	7.21177	1.029	3.714
120	7.25680	1.157	3.709
140	7.28645	1.253	3.705
160	7.33289	1.441	3.700
180	7.36624	1.623	3.693
200	7.39017	1.807	3.685
226	7.40891	1.981	3.678
242	7.41582	1.868	3.684
250	7.42266	1.923	3.681
300	7.44721	2.254	3.666
350	7.45669	2.471	3.655
400	7.46335	2.704	3.642
450	7.46773	2.933	3.628
500	7.47060	3.150	3.618
550	7.47225	3.313	3.604
600	7.47301	3.401	3.601
650	7.47364	[illegible].483	3.598
699	7.47405	[illegible]535	3.597
762	7.47410	[illegible]540	3.597
1035	7.47410	[illegible]528	3.597 F
1278	7.47410	3.5[illegible]	3.597
1365	7.47410	2.[illegible]9	3.654
1562	7.47410	3.282	3.609
1583	7.47410	3.123	3.620
1600	7.47410	3.301	3.606
1773	7.47410	3.057	3.622
1800	7.47410	3.281	3.608
1955	7.47411	3.009	3.625

Koordinaten im Hertzsprung-Russell-Diagramm und Alter (in 10^9 Jahren) einiger Modelle. Über die Bedeutung der Buchstaben A, B, C und D siehe Abbildung 1.

B) Veränderungen im inneren Aufbau

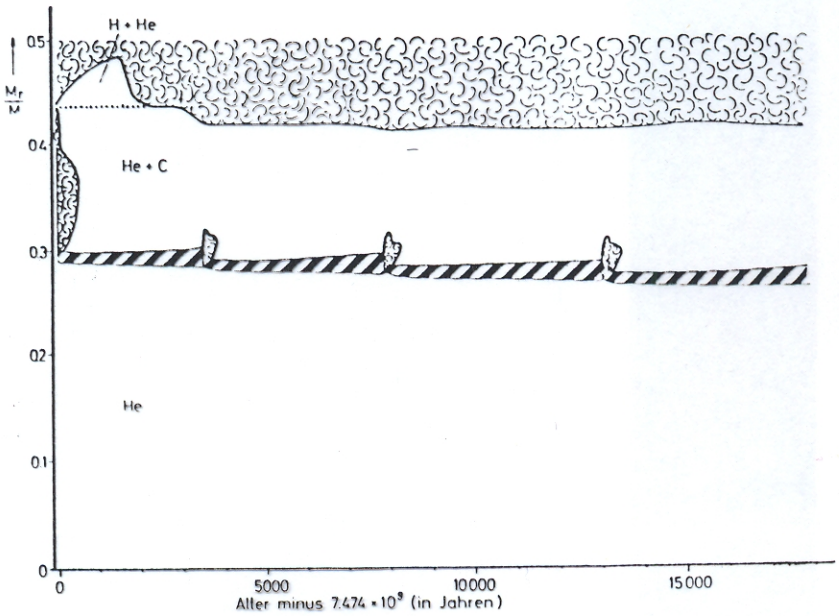


Zeitliche Veränderungen im Sterninnern: gezeichnet ist M_r/M über dem Alter des Sterns (Nullpunkt der Alterszählung: homogenes Hauptreihenmodell). Die Zeitskala wurde ab 7.2 10^9 Jahren um den Faktor 25 gestreckt und ab 7.46 10^9 Jahren noch einmal um den Faktor 10. Das Diagramm endet kurz vor dem Zünden des Heliums. Die großen Buchstaben haben die gleiche Bedeutung wie in Abbildung 1. Gebiete, in denen die durch das Wasserstoffbrennen erzeugte Energie pro Massen- und Zeiteinheit 10 erg g^{-1} sec^{-1} übersteigt, sind schraffiert. "Wolkige" Gebiete entsprechen Konvektionszonen. Punktiert sind Gebiete nach innen wachsenden Molekulargewichts (als Grenzen wurden die Stellen gewählt, bei denen sich die Wasserstoffhäufigkeit X um 0.01 von der Anfangschemie unterscheidet und wo X = 0.01 ist).

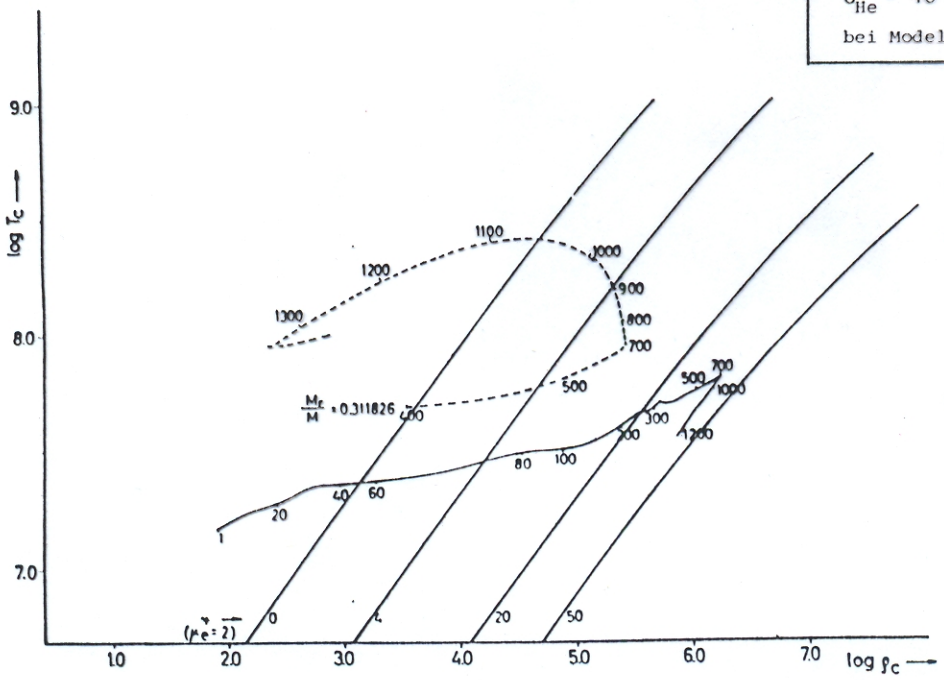


Zeitliche Veränderungen im Sterninnern: die Zeichnung ist die Fortsetzung von Abbildung 2 durch die Phase des Helium-Flash. Die Massenskala ist die gleiche, die Zeitskala hat logarithmische Teilung und ist auf Modell 1035 als Nullpunkt bezogen. Das Alter von Modell 1035 relativ zum homogenen Hauptreihenmodell beträgt 7.474 10^9 Jahre. Die Wasserstoffschalenquelle ließ sich in dem gewählten Maßstab nur noch als (gestrichelte) Linie darstellen. Der nicht gezeichnete Teil der Rechnungen zwischen $t = -10^{-4}$ Jahren und $t = +10^{-4}$ Jahren enthält keine wesentliche Information, die obere Grenze für das Heliumbrennen ($\varepsilon_{He} > 10^3$ erg g^{-1} sec^{-1}) reicht in der Massenskala maximal bis $M_r/M = 0.398$ (bei Modell 1035).

Der Ausschnitt zeigt die Verhältnisse zwischen den beiden Konvektionszonen mit einer 1 : 40 vergrößerten Massenskala bei gleicher Zeitskala. Punktiert ist die Übergangsschicht zwischen wasserstoffreicher Hülle und Heliumkern (Festlegung der Grenzen wie in Abbildung 2). Bei $t = 1.5\ 10^{-3}$ Jahren stirbt die Wasserstoffschalenquelle ab, bei t = 1.9 Jahren hat die innere Konvektionszone in der Massenskala den kleinsten Abstand von der wasserstoffreichen Hülle.



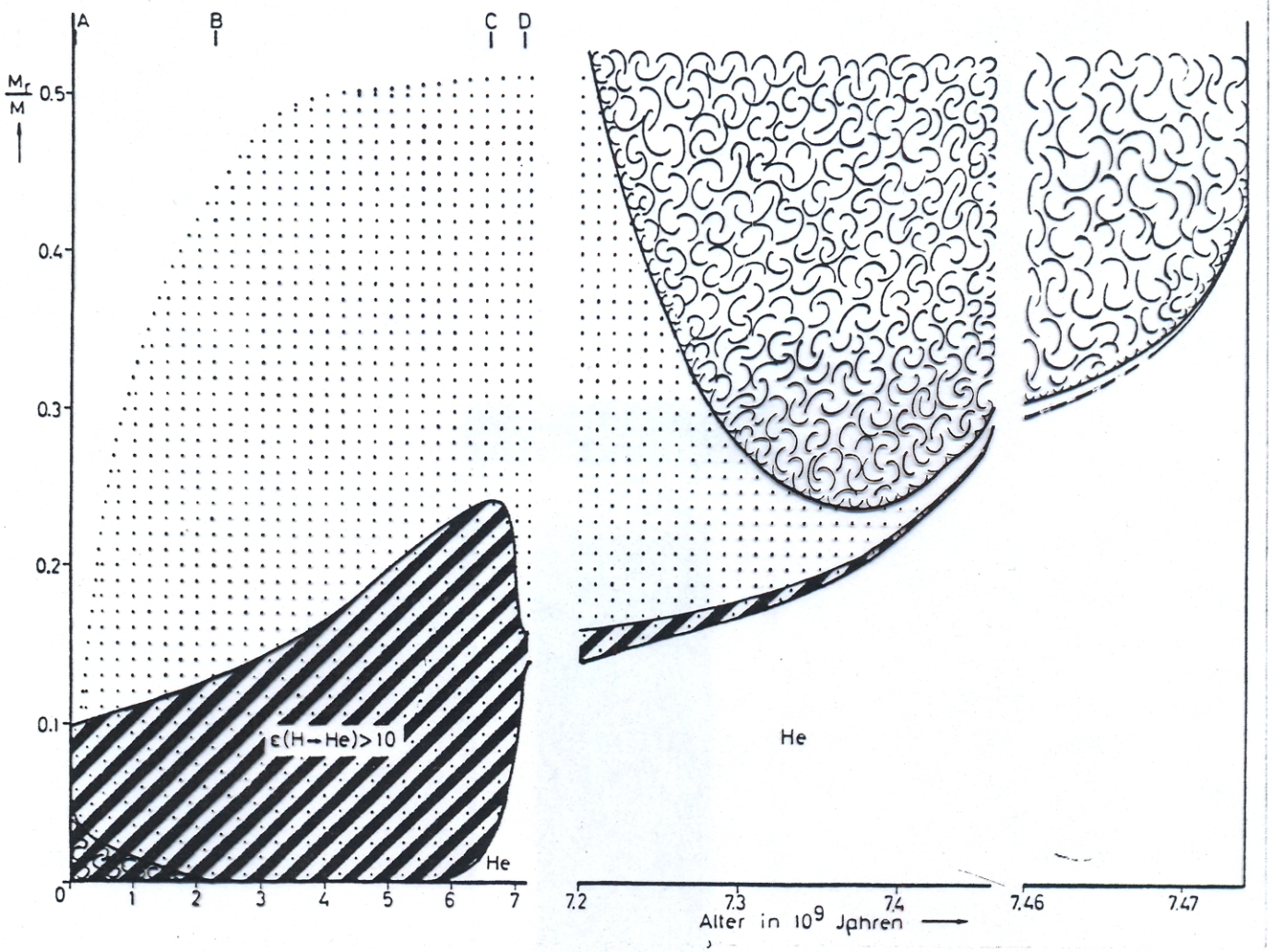
Zeitliche Veränderungen im Sterninnern: die Zeichnung beginnt mit Modell 1035 und überlappt sich deshalb teilweise mit Abbildung 9. Die Massenskala ist die gleiche wie in den Abbildungen 2 und 9, die Zeitskala ist linear geteilt und auf Modell 1035 als Nullpunkt bezogen. Für die schraffierten Gebiete gilt die Bedingung $\varepsilon_{He} > 10^3$ erg g^{-1} sec^{-1}. Die Zeichnung endet bei Modell 1960.

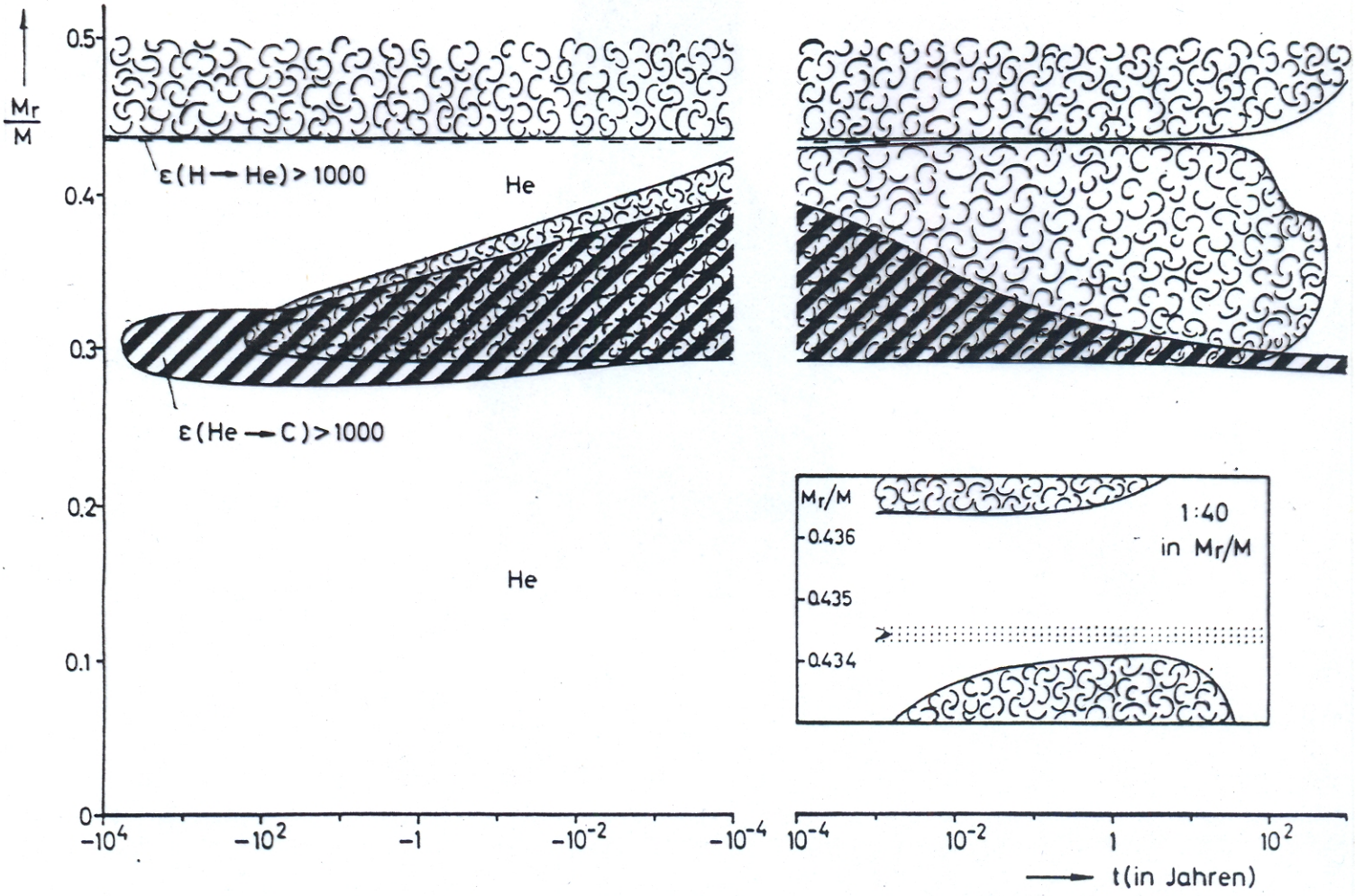


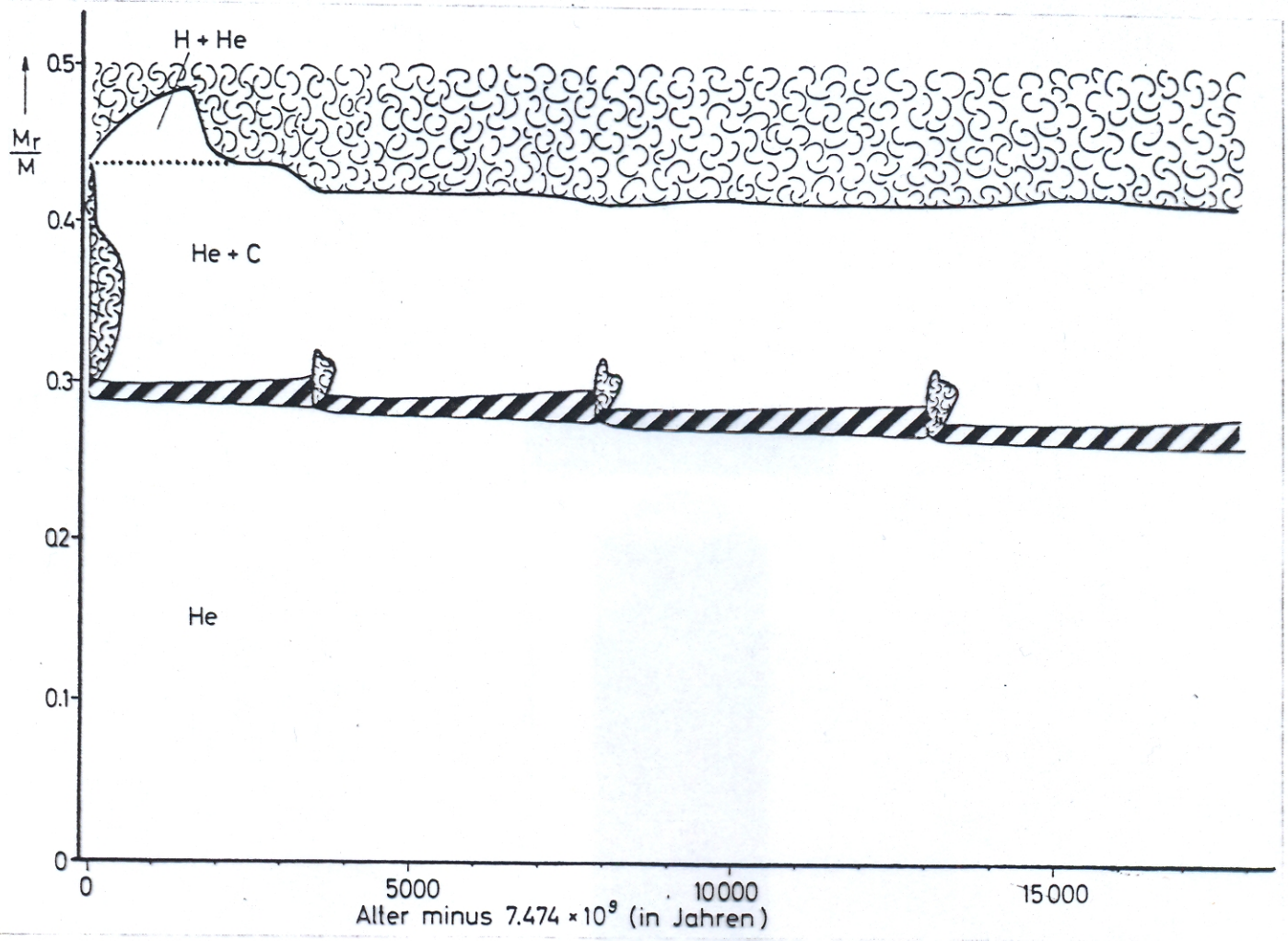
Entwicklung im logT - log ρ - Diagramm :

Entwicklung des Sternzentrums (————)

Entwicklung der Massenschale $M_r/M = 0.311826$ ab Modell Nr. 400, (- - - -)


A
B
C
D
Mr/M
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
ε(H→He)>10
He
He
1
2
3
4
5
6
7
7.2
7.3
7.4
7.46
7.47
Alter in 10^9 Jahren


Mr/M
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
ε(H→He)>1000
He
ε(He→C)>1000
He
Mr/M
0.436
0.435
0.434
1:40
in Mr/M
-10^4
-10^2
-1
-10^-2
-10^-4
10^-4
10^-2
1
10^2
t(in Jahren)


H + He
He + C
He
Mr/M
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5000
10000
15000
Alter minus 7.474 × 10⁹ (in Jahren)

23.5. Thermische Stabilität von nuklearen Brennen

Wollen hier untersuchen, unter welchen Bedingungen nukleares Brennen thermisch stabil ist. Machen hier nur eine vereinfachte Betrachtung. (Korrekte Behandlung nur im Rahmen einer vollständigen Stabilitätsanalyse möglich)

Betrachten zuerst eine kleine Kugel mit Radius r im Zentrum des Sterns. Sei r so klein, dass P, T, L_r ect. ~ const. oder durch Mittelwerte ersetzt werden können. Sei weiter $\varepsilon \sim \rho^n T^\nu$.

Betrachten die Energiegleichung $\frac{L_r}{M_r} = \varepsilon - c_p \dot{T} + \frac{\delta}{\rho}\dot{P}$ und das

Verhalten bei kleinen Störungen.

- kleine Störung in T $\rightarrow$ Störungen in P, ρ, ε

$T = T_0 + T_1$, $P = P_0 + P_1$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$

$T_0, P_0, \rho_0, \varepsilon_0$: ungestörte Werte ; $T_1 \ll T_0$; $P_1 \ll P_0$; $\rho_1 \ll \rho_0$; $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_0$

- Vereinfachende Annahmen: 1) ungestörter Stern im thermischen Gleichgewicht $\rightarrow \dot{T}_0 = 0$, $\dot{P}_0 = 0$
  2) Störung so schnell, dass $L_{r,1} = 0$, $\rightarrow L_r = L_{r,0} = \text{const.}$

- gestörte Energiegleichung: $\varepsilon_1 = c_p \dot{T}_1 - \frac{\delta}{\rho_0}\dot{P}_1$

- weitere Annahme : 3) homologe Störungen
  $\rightarrow$ können die Homologierelationen benützen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_0} &= \alpha \frac{P_1}{P_0} - \delta \frac{T_1}{T_0} \\ \frac{\rho_1}{\rho_0} &= -3\frac{r_1}{r_0} \\ \frac{P_1}{P_0} &= -4\frac{r_1}{r_0} \end{aligned}\right\}$$

eliminieren $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ und $\frac{r_1}{r_0}$:

$$\rightarrow \frac{P_1}{P_0} = \frac{4\delta}{4\alpha - 3}\frac{T_1}{T_0} = \xi \frac{T_1}{T_0} \quad ; \quad \xi = \frac{4\delta}{4\alpha-3}$$

$$\rightarrow \underline{\frac{\dot{P}_1}{P_0} = \xi \frac{\dot{T}_1}{T_0}}$$

$$\rightarrow \quad \underline{\varepsilon_1 = c_p T_0 (1 - \nabla_a \xi) \frac{\dot{T}_1}{T_0}} \quad , \quad \text{mit} \quad \nabla_a = \frac{P\delta}{c_p \rho T}$$

Andererseits ist mit $\varepsilon \sim \rho^n T^\nu$

$$\underline{\varepsilon_1} = \varepsilon_0 \left(n \frac{\rho_1}{\rho_0} + \nu \frac{T_1}{T_0} \right) = \underline{\varepsilon_0 \left[n(\alpha\xi - \delta) + \nu \right] \frac{T_1}{T_0}}$$

Mit $\eta = \alpha\xi - \delta = \frac{3\delta}{4\alpha - 3}$ folgt : $\underline{\underline{\frac{\dot{T}_1}{T_0} = A \frac{T_1}{T_0}, \text{ wobei } A = \frac{\varepsilon_0 (n\eta + \nu)}{c_p T_0 (1 - \nabla_a \xi)}}}$

$\rightarrow \quad \frac{T_1}{T_0} \sim e^{At}$: $\rightarrow$ $A > 0 \Leftrightarrow$ nukleares Brennen ist instabil
$A < 0 \Leftrightarrow$ nukleares Brennen ist stabil

<u>Beispiele:</u>

a) <u>Hauptreihensterne</u> : 1-atomiges ideales Gas , $\alpha = 1$, $\delta = 1$, $\nabla_a = 2/5$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \xi = 4, \quad \eta = 3, \quad (1 - \nabla_a \xi) = -\frac{3}{5} < 0 \; ; \\ \text{Da} \quad \varepsilon_0 > 0 \; , \; n = 1 \; , \; \nu > 0 \; , \; c_p > 0, \; T_0 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{A < 0}}$$

▶ <u>Nukleares Brennen in Hauptreihensternen ist thermisch stabil</u>

(Grund: Bei Energieüberproduktion $\rightarrow$ Expansion, die über ε_g mehr Energie absorbiert als zuviel erzeugt wurde)

b) <u>Vollständig entartetes Elektronengas</u> : $\alpha = \frac{3}{5}$, $\delta \ll 1$ (≈ 0)

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \xi \approx 0 \; , \; \eta \approx 0 \; , \; (1 - \nabla_a \xi) \approx 1 \\ \varepsilon_0 > 0, \; \nu > 0, \; c_p > 0, \; T_0 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{A > 0}}$$

▶ <u>Nukleares Brennen in entarteter Materie ist thermisch instabil</u>

Dies ist der Grund für das Flash-Phänomen. Ein entartetes Gas kann keine Energie durch Expansion absorbieren. $\rightarrow$ Überproduktion von Energie geht in innere Energie $\rightarrow$ $T \uparrow$ $\rightarrow$ $\varepsilon \sim T^\nu \uparrow$ $\rightarrow$ thermonuklearer Runaway

Die Entwicklung nach Beginn eines Flashs

Betrachten zentralen Flash.

$$\rightarrow \quad d\ln \varrho_c = \eta \, d\ln T_c = \frac{3\delta}{4\alpha - 3} d\ln T_c$$

Mit $\alpha = 3/5$ und $\delta \approx 0$ folgt $d\ln \varrho_c \approx 0$ (da $4\alpha - 3 \neq 0$)

→ Im $\log \varrho_c - \log T_c$ – Diagramm: Entwicklung bei $\varrho_c \approx$ const. und $T_c \uparrow$
→ Überproduktion von Energie und $T \uparrow$ bis die Entartung aufgehoben wird, d.h. bis $T \approx T_F$.

c) <u>Neutrino-Verluste</u>: stark von T abhängig. Schreiben $-\varepsilon_\nu \sim T^\nu$ und verwenden diese Beziehung an Stelle von $\varepsilon \sim \varrho^n T^\nu$ ($\triangleq$ Neutrino-verluste ohne nukleare Energieerzeugung, $\varepsilon_N = 0$, z.B. Plasmaneutrinos und Photoneutrinos in ausgebranntem Zentralgebiet)

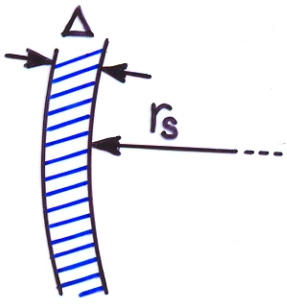
→ Alle bisherigen Betrachtungen bleiben ungeändert, ausser dass jetzt $\varepsilon_0 < 0$.
→ Alle Schlüsse über Stabilität werden umgekehrt, d.h.

▶ ν-Verluste in entarteter Materie sind stabil. (Aus $\varepsilon_1 < 0$ folgt $\dot{T}_1 < 0$, → Abkühlung → geringere ν-Verluste)

▶ Bei ν-Verlusten in nicht entarteter Materie: $\varepsilon_1 < 0 \rightarrow \dot{T}_1 > 0$
→ ν-Verluste nehmen zu, $T \uparrow$. (Stabilität wird erst mit dem Zünden des nächsten nuklearen Brennens erreicht)

d) <u>Schalenquellen</u>: Obige Stabilitätsbetrachtungen können leicht auch auf Schalenquellen übertragen werden. Wesentlicher Unterschied: die Geometrie der brennenden Zone (hier Kugelschale).

Betrachten Schalenquelle mit räumlicher Ausdehnung Δ im Abstand r_s vom Sternzentrum



Schalenquelle

→ Masse: $M_s \sim \varrho r_s^2 \Delta$ (vgl. bei Kugelgeometrie: $M \sim \varrho r^3$)

Linearisierung der Kontinuitätsgleichung: ($r_s = r_0 = \text{const.}$)

$$\rightarrow \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_0} = -\frac{r_0}{\Delta}\frac{r_1}{r_0} \qquad \left(\text{vgl. bei Kugelgeometrie: } \frac{\varrho_1}{\varrho_0} = -3\frac{r_1}{r_0}\right)$$

→ Brauchen nur den Geometriefaktor 3 durch r_0/Δ zu ersetzen.

▶ $\xi = \dfrac{4\delta}{4\alpha - r_0/\Delta}$ bzw. $\eta = \dfrac{\delta}{4\alpha\frac{\Delta}{r_0} - 1}$

→ ∃ neuen Typ von Instabilität, wenn $\Delta \ll r_0$, d.h. bei räumlich dünnen Schalenquellen.

Ideales Gas: $\alpha = 1$, $\delta = 1$; wenn $\Delta \ll r_0$ → $\xi < 0$ und $\eta < 0$

→ $A > 0$, wenn gleichzeitig $\dfrac{\Delta}{r_0} < \dfrac{1}{4\alpha - 4\nabla_a\delta} = \dfrac{5}{12}$ und

$$\frac{\Delta}{r_0} < \frac{\nu - n\delta}{4\nu\alpha} = \frac{\nu - n}{4\nu}$$

Für grosse ν und kleine n (typisch $n = 1,2$) folgt: $\dfrac{\Delta}{r_0} \lesssim \dfrac{1}{4}$

▶ Für hinreichend dünne Schalenquellen ist das nukleare Brennen thermisch instabil.

Instabilität verursacht die sog. thermischen Pulse (Vgl. dazu die Entwicklung eines Sterns von $5\,M_\odot$)

Thermische Pulse: Bei Instabilität ist $d\ln T_s = \dfrac{1}{\eta}\, d\ln \rho_s$

Da $\eta < 0$ → $d\ln T_s \sim -d\ln \rho_s$

→ $d\ln P_s$ (Druckänderung im Bereich der Schalenquelle) ist vernachlässigbar klein. Grund: selbst merkliche Änderung von Δ ändert die Radien der ausserhalb liegenden Schichten nur unwesentlich (da $\Delta \ll r_0$). → Geringe Änderung von P

Da $d\ln T_s \sim -d\ln \rho_s$: Schalenquelle expandiert mit wachsendem T_s, so lange bis $\Delta/r_0 \gtrsim 1/4$ und die Instabilität beseitigt ist.