Weiße Zwerge, Neutronensterne und Schwarze Löcher: Physik kompakter astrophysikalischer Objekte

Vorlesung an der TU München
Wintersemester 2011/12

Privatdozent Dr. Ewald Müller
Max-Planck-Institut für Astrophysik
Karl-Schwarzschild-Straße 1
85748 Garching

7. Februar 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Übersicht **4**
- 1.1 Einige grundlegende Überlegungen 4
- 1.2 Vorkommen und Erscheinungsformen 14

2 Weiße Zwerge **23**
- 2.1 Zur Geschichte 23
- 2.2 Ideales Fermigas, Maxwell-Boltzmann Grenzfall 24
- 2.3 Bosegas, Strahlungsdruck und Planck-Verteilung 31
- 2.4 Polytrope Gaskugeln 34
- 2.5 Die Chandrasekhar Grenzmasse 38
- 2.6 Entstehung und Entwicklung Weißer Zwerge 43
  - 2.6.1 Grundlagen des Sternaufbaus und der Sternentwicklung 43
  - 2.6.2 Entwicklung von Weißen Zwergen 47

3 Allgemeine Relativitätstheorie (AR) **54**
- 3.1 Tensorkalkül 54
- 3.2 Grundlagen der AR 64
- 3.3 Bewegung von Testteilchen 69
- 3.4 Sphärisch–Symmetrische Gravitationsfelder 71
- 3.5 Sphärische Sterne und TOV–Gleichung 73

4 Neutronensterne und Pulsare **77**
- 4.1 Zur Geschichte und Bedeutung 77
- 4.2 Neutronenstern–Modelle 78
- 4.3 Entstehung von Neutronensternen 90
- 4.4 Rotierende Neutronensterne und Pulsare 98

5 Schwarze Löcher **105**
- 5.1 Nichtrotierende Schwarze Löcher 105
- 5.2 Bewegung von Testteilchen in der Schwarzschild–Metrik 115
- 5.3 Rotierende Schwarze Löcher und die Kerr–Lösung 124
- 5.4 Thermodynamik Schwarzer Löcher 135

Literatur

- Grundlegend:
  - S.L.. Shapiro & S.A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, Wiley & Sons, 1983
  - N.K. Glendenning, *Compact Stars*, Springer, 1997
  - R. Kippenhahn & A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution*, Springer, 1990
- Weiterführend:
  - S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Univ. Chicago Press, 1939
  - V.P. Frolov & I.D. Novikov, *Black Hole Physics*, Kluwer, 1998
  - R. d'Inverno, *Einführung in die Relativitätstheorie*, VCH, 1995
  - R.N. Manchester & J.H. Taylor, *Pulsars*, Freeman, 1977
  - Ya.B. Zeldóvich & I.D. Novikov, *Relativistic Astrophysics*, Vol. 1, Univ. Chicago Press, 1971
- Populär:
  - M. Begelman & M. Rees, *Gravity's Fatal Attraction: Black Holes in the Universe*, Cambridge University Press, 2nd edition, 2009; bzw. 1.Auflage, *Schwarze Löcher im Kosmos*, Spektrum Verlag, 1997
  - H.-Th. Janka, *Supernovae und kosmische Gammablitze*, Spektrum Akademischer Verlag, 2011
  - K.S. Thorne, *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*, Norton & Company, 1995; bzw. *Gekrümmter Raum und verbogene Zeit*, Bechtermünz, 1999
- Interessante und nützliche WWW–Adressen:
  - *Albert Einstein Institut für Gravitationsphysik, Golm* (Einstiegsseite zu vielen Aspekten der relativistischen Physik und zu Gravitationswellendetektoren) http://www.aei-potsdam.mpg.de

- *Living Reviews in Relativity*
  http://relativity.livingreviews.org/
- *Einstein Online*
  http://http://www.einstein-online.info
- *Usenet Physics FAQ*
  http://www.desy.de/user/projects/Physics
- *NASA Chandra X-ray Observatory*
  http://chandra.nasa.gov/chandra.html
- *ESA XMM-Newton X-ray Observatory*
  http://http://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm?fareaid=23

Kapitel 1

Einleitung und Übersicht

1.1 Einige grundlegende Überlegungen

Vier verschiedene Wechelwirkungen existieren in der Natur; zwei davon (elektromagnetische, Gravitation) sind langreichweitig.

- Elektromagnetische und gravitative Kraft zwischen zwei Protonen der Masse m_p und Ladung e im Abstand r:

  $$F_{em} = \frac{e^2}{r^2} \quad , \qquad F_G = \frac{G m_p^2}{r^2}$$

  d.h.

  $$\frac{F_{em}}{F_G} = \frac{e^2}{G m_p^2} = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \Big/ \left(\frac{G m_p^2}{\hbar c}\right) = \boxed{\frac{\alpha}{\alpha_G} \approx 10^{36}}$$

  wobei

  $$\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \equiv \alpha \approx \frac{1}{137} \tag{1.1}$$

  die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante,

  $$\left(\frac{G m_p^2}{\hbar c}\right) \equiv \alpha_G \approx 6\,10^{-39} \tag{1.2}$$

  die Feinstrukturkonstante der Gravitation, $h \equiv 2\pi\hbar$ die Plancksche Konstante und c die (Vakuum-) Lichtgeschwindigkeit sind.

  Gravitation ist also unwichtig für Eigenschaften der Materie auf kleinen (atomaren, nuklearen) Längenskalen (gilt auch auf allen anderen Längenskalen, aber makroskopische und insbesondere astrophysikalische Körper sind elektrisch praktisch neutral).

– atomare Längenskala: Bohrscher Atomradius a_0

Dazu betrachtet man ein Elektron der Masse m_e, das sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn vom Radius a_0 um ein Proton bewegt (Wasserstoffatom). Elektrische Anziehungskraft und Fliehkraft halten sich die Waage, d.h.

$$\frac{e^2}{a_0^2} = \frac{m_e v^2}{a_0}$$

Mit Hilfe des Drehimpulses L läßt sich diese Beziehung in der Form

$$\frac{e^2}{a_0^2} = \frac{L^2}{m_e a_0^3}$$

bzw. unter Berücksichtigung der Bahn–Drehimpuls–Quantisierung ($L = n\hbar$ mit $n \in \mathcal{N}$) in der Form

$$\frac{e^2}{a_0^2} = \frac{n^2\hbar^2}{m_e a_0^3}$$

schreiben. Damit folgt für $n = 1$:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \left(\frac{\hbar c}{e^2}\right)\frac{\hbar}{m_e c} \longrightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\hbar}{m_e c}} \tag{1.3}$$

wobei $\hbar/(m_e c)$ die Comptonwellenlänge des Elektrons ist.

– atomare Energieskala:

$$E_b \approx \frac{e^2}{a_0} = \alpha^2\, m_e c^2 \tag{1.4}$$

wobei $m_e c^2$ die Ruheenergie des Elektrons ist.

Die atomare Längen- und Energieskala sind also durch die elektromagnetische Wechselwirkung (und die Heisenbergsche Unschärferelation) bestimmt.

- Für makroskopische, neutrale Objekte wird Gravitation wichtig. Wie groß ist die entsprechende Längen- und Massen–Skala?

  Dazu betrachten wir einen sphärischen festen Körper der Masse M und des Radius R, der aus N Atomen der Massenzahl A und der Ladungszahl Z besteht:

$$M = NAm_u\,, \quad m_u \equiv \frac{1}{12} m_{^{12}C} \approx m_p\,,$$

  wobei m_u die atomare Masseneinheit und $m_{^{12}C}$ die Masse eines Kohlenstoffkerns der Massenzahl $A = 12$ sind. Weiter gilt

$$R \simeq N^{1/3} a_0/Z\,.$$

Damit folgt:

$$E_G \simeq -\frac{GM^2}{R} = -N^2 \left(\frac{GA^2 m_p^2}{R}\right) \simeq -N^{5/3} A^2 Z \left(\frac{Gm_p^2}{a_0}\right)$$

bzw.

$$E_G \simeq -N^{5/3}\, \alpha_G \alpha\, m_e c^2\, A^2 Z$$

Für die innere, atomare Energie gilt

$$E_i \simeq N\alpha^2\, m_e c^2\, Z^3$$

und die Gesamtenergie ist gegeben durch

$$E_{\rm tot} = E_G + E_i = \left(-N^{5/3}\alpha_G \alpha A^2 Z + N\alpha^2 Z^3\right) m_e c^2$$

Mit $A = Z/2$ ist $E_{\rm tot} = 0$, wenn

$$N_{max}^{5/3} \alpha_G \approx N_{max} \alpha$$

gilt, d.h.

$$\boxed{E_{\rm tot} < 0 \qquad \text{falls} \qquad N < N_{max} = (\alpha/\alpha_G)^{3/2} \simeq 10^{54}} \tag{1.5}$$

Die entsprechenden Körper sind Objekte mit

$$\boxed{\begin{array}{lll} M_{max} & \simeq N_{max} m_p & \simeq 10^{30}\,\text{g} \\ R_{max} & \simeq N_{max}^{1/3} a_0 & \simeq 10^{10}\,\text{cm} \end{array}} \tag{1.6}$$

d.h. jupiterähnliche Planeten.

- Objekte mit $M \lesssim M_{max}$ sind durch Festkörperkräfte gegen die Gravitationskraft stabilisierbar.

- Falls man anstelle der elektromagnetischen Wechselwirkung die **starke** Wechselwirkung betrachtet, dh. α durch $\alpha_s \simeq 10^2 \alpha$ ersetzt, findet man

$$N_{max}^s = \left(\frac{\alpha_s}{\alpha}\right)^{3/2} \left(\frac{\alpha}{\alpha_G}\right)^{3/2} \simeq 10^3 10^{54} = 10^{57}\,,$$

$$M_{max}^s \simeq N_{max}^s m_p \simeq 10^{33}\,\text{g}$$

und

$$R^s_{max} \simeq {N^s_{max}}^{1/3}\, 10^{-5} a_0 = 10^6\,\mathrm{cm}$$

d.h. einen **Neutronenstern**. Der Faktor 10^{-5} folgt aus der etwa hundertmal größeren Kopplungskonstante und der etwa tausendmal größeren Masse der Nukleonen, bzw. aus dem etwa hunderttausendmal kleineren Atomkernradius.

- Schwarzschildradius:

  Damit ein Testteilchen der Masse m von der Oberfläche eines Körpers der Masse M und des Radius R zu beliebig großen Abständen gelangen kann, muss seine kinetische Energie mindestens gleich seiner potentiellen Energie sein:

$$\frac{mv^2}{2} = G\frac{Mm}{R}\,.$$

  Die entsprechende kritische Geschwindigkeit heisst Fluchtgeschwindigkeit und ist durch

$$v^2 = 2GM/R$$

  gegeben. Setzt man $v = c$, d.h. betrachtet man die physikalisch maximale Fluchtgeschwindigkeit, so erhält man bei gegebener Masse M einen kritischen Radius, den Schwarzschildradius:

$$\boxed{R_s = 2\frac{GM}{c^2}} \quad , \qquad \frac{2G}{c^2} = 1.5\,10^{-28}\left[\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{g}}\right] \tag{1.7}$$

  Wird ein Objekt der Masse M auf die Größe seines Schwarzschildradius komprimiert, wird die Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit.

Objekt	Masse [g]	Radius [cm]	R_s [cm]	R_s/R
Nukleon	10^{-24}	10^{-15}	10^{-52}	10^{-37}
Mensch	10^5	10^2	10^{-23}	10^{-25}
Erde	$6\,10^{27}$	$6\,10^8$	0.9	10^{-9}
Sonne	$2\,10^{33}$	$7\,10^{10}$	$3\,10^5$	$4\,10^{-6}$
WD	$2\,10^{33}$	10^9	$3\,10^5$	$3\,10^{-4}$
NS	$2\,10^{33}$	10^6	$3\,10^5$	0.3
	$2\,10^{42}$ ($10^9 M_\odot$)		$3\,10^{14}$ (20 AU)	

  Die Längeneinheit $1AU = 1.496\,10^{13}$ [cm] ist der mittlere Abstand Erde–Sonnne; 20 AU beträgt etwa die mittlere Entfernung des Planeten Uranus von der Sonne. Das Symbol $M_\odot$ steht für die Masse der Sonne, d.h. $M_\odot = 1.989\,10^{33}$ [g].

- Objekte mit $R < R_S$ nennt man **Schwarze Löcher**.
- Die mittlere Dichte eines Schwarzen Lochs der Masse M kann man gemäß

  $$\overline{\varrho} > M/(\frac{4\pi}{3}R_S^3)$$

  abschätzen. Setzt man die Definition des Schwarzschildradius ein, so folgt

  $$\overline{\varrho} > \frac{3}{32\pi}\,\frac{1}{M^2}\,\left(\frac{c^6}{G^3}\right)$$

  und damit

  $$\overline{\varrho} > \frac{1.84\,10^{16}}{(M/M_\odot)^2}\,\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right]$$

  Für ein **stellares** Schwarzes Loch mit $M = M_\odot$ übersteigt die mittlere Dichte einen Wert von $2\,10^{16}\,[\mathrm{g/cm^3}]$, was etwa 100-facher Kernmateriedichte entspricht.

  Für ein **massereiches** Schwarzes Loch von 10^9 Sonnenmassen gilt $\overline{\varrho} > 0.02\,[\mathrm{g/cm^3}]$. Dieser Dichtewert entspricht der Schüttdichte von Stroh!

  Für die Entstehung eines Schwarzen Lochs sind daher nicht notwendigerweise sehr hohe Dichten erforderlich.

- Massendefekt

  Wenn aus einer Gaswolke ein Stern entsteht, wird Gravitationsbindungsenergie frei. Der (differentielle) Energiegewinn bei Anlagerung einer Kugelschale der Dichte ϱ und Dicke dr, an eine bereits vorhandene (sphärisch symmetrische) Massenverteilung $m(r) = 4\pi \int_0^r \varrho(\xi)\xi^2 d\xi$ vom Radius r beträgt

  $$dE_G = -\frac{Gm(r)}{r}\,dm \qquad \text{mit} \quad dm = 4\pi\varrho r^2 dr\,.$$

  Die gesamte Gravitationsbindungsenergie eines Objekts vom Radius R ist dann durch

  $$E_G = -G\int_0^R \frac{m(r)}{r} dm \tag{1.8}$$

  bzw. durch

  $$E_G = -G\int_0^R \frac{1}{r}\left[4\pi\int_0^r \varrho(\xi)\xi^2 d\xi\right]\,4\pi\varrho r^2 dr$$

gegeben, wobei ϱ die Dichte ist. Unter der Annahme ϱ = konstant folgt

$$E_G = -\frac{3}{5}\frac{GM_0^2}{R} \quad \text{mit} \qquad M_0 = \frac{4\pi}{3}\varrho R^3 \,.$$

Der Faktor 3/5 ergab sich aus der Annahme einer sphärisch symmetrischen und inkompressiblen Dichteverteilung. Allgemein gilt (bis auf einen Faktor von der Größenordnung eins)

$$\boxed{E_G \approx -\frac{GM_0^2}{R}}$$

wobei M_0 die Masse des Sterns ist. Die Bindungsenergie wird bei der Sternentstehung in Form von Photonen und/oder Neutrinos abgestrahlt, d.h. der Stern hat weniger Masse als das (verdünnte) Gas, aus dem er entstanden ist.

$$M = M_0 - \frac{|E_G|}{c^2} \approx M_0 - \frac{GM_0^2}{Rc^2} = M_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{R_s}{R}\right)$$

Der Massendefekt beträgt daher

$$\Delta M = M_0 - M \approx M_0 - M_0\left(1 - \frac{1}{2}\frac{R_s}{R}\right)$$

und die relative Massenänderung ist damit von der Größenordnung

$$\boxed{\frac{\Delta M}{M_0} \approx \frac{R_s}{R}} \tag{1.9}$$

Für die Sonne und für Weiße Zwerge ist der gravitative Massendefekt ΔM kleiner als der Massendefekt durch Kernkräfte ($\Delta M_{\rm nuc} \approx 1\%$).

- Hydrostatisches Gleichgewicht:

  Wir betrachten eine selbstgravitierende Gaskugel vom Radius R im hydrostatischen Gleichgewicht. Dann ist an jedem Punkt der Gaskugel der (negative) Druckgradient (der Druck nimmt im Stern vom Zentrum aus ab) gleich der Gravitationsanziehungskraft:

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\varrho(r)} \tag{1.10}$$

Größenordnungsmäßig gilt dann

$$\frac{dp}{dr} \approx \frac{p(R) - p(0)}{R} .$$

Da der Druck an der Sternoberfläche verschwindet ($p(R) = 0$) und da der zentrale Druck $p(0)$ ungefähr gleich dem mittleren Druck $\bar{p}$ ist, folgt

$$\frac{dp}{dr} \approx -\frac{\bar{p}}{R} .$$

Analog läßt sich die Gravitationsanziehungskraft abschätzen:

$$\frac{Gm(r)}{r^2}\varrho(r) \approx \frac{GM}{R^2}\bar{\varrho}$$

wobei M die Gesamtmasse der Gaskugel ist und $\bar{\varrho}$ die mittlere Dichte. Damit folgt

$$\boxed{\frac{\bar{p}}{\bar{\varrho}c^2} \approx \frac{R_s}{R}}$$

d.h. das Verhältnis Schwarzschildradius zu Sternradius ist in etwa gleich dem Verhältnis mittlerer Druck zu mittlerer Ruheenergiedichte des Sterns.

- Nichtentartete („normale“) Sterne:

  Die Materie des Sterns läßt sich als ideales Gas beschreiben und die Zustandsgleichung lautet

$$pV_{mol} = \mathcal{R}T , \tag{1.11}$$

  wobei $\mathcal{R} = 8.32\,10^7$ [erg/K/Mol] die universelle Gaskonstante, T die Temperatur und $V_{mol} = N_a M_A/\varrho$ das Molvolumen sind. $N_a = 1/m_u = 6.023\,10^{23}$ ist die Avogadrosche Konstante und $M_A = Am_u$ ist die Masse eines Gasatoms der Massenzahl A. Für ein Gemisch von idealen Gases ist M_A durch das entsprechende mittlere Molekulargewicht zu ersetzen. Umformen von (1.11) ergibt

$$\boxed{\frac{p}{\varrho} = \frac{\mathcal{R}}{N_A}\frac{T}{M_A} = k_B\frac{T}{M_A}} \tag{1.12}$$

  wobei $k_B \equiv \mathcal{R}/N_A = 1.38\,10^{-16}$ [erg/K] die Boltzmannsche Konstante ist.

Im hydrostatischen Gleichgewicht gilt daher

$$\boxed{T \propto \frac{M}{R}}$$

d.h. wenn ein Stern abkühlt, wächst sein Radius (Rotes Riesenstadium). Weiterhin folgt

$$\boxed{\frac{R_s}{R} \approx \frac{p}{\varrho c^2} = \frac{k_B T}{M_A c^2}}$$

d.h. die Größe relativistischer Effekte ist durch die mittlere Temperatur im Sterninneren bestimmt. Für das Wasserstoffbrennen (Fusion von Wasserstoff zu Helium) findet man

$$\frac{R_s}{R} \approx \frac{k_B T}{M_A c^2} \approx \frac{1\text{keV}}{1\text{GeV}} \approx 10^{-6}\,,$$

d.h. die Größenordnung der relativistischen Effekte in „normalen“ Sternen wird durch die Kernphysik bestimmt. Man beachte, dass die Größenordnung der relativistischen Effekte unabhängig von der Gravitationskonstanten ist.

- Energieverlust durch Strahlung

  Jeder Körper tauscht mit seiner Umgebung Wärme aus. Dieser Austausch erfolgt auch, wenn sich der Körper im Vakuum befindet, so dass gewöhnliche Wärmeleitung ausgeschaltet ist. Die Energieabgabe (oder –aufnahme) erfolgt durch die Emission (oder Absorption) von Strahlung (unterschiedlicher Wellenlänge).

  Die Leuchtkraft L, d.h. die gesamte (über alle Wellenlängen) pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie, eines kugelförmigen schwarzen Körpers vom Radius R mit der Temperatur T beträgt

  $$\boxed{L = |\dot{E}| = 4\pi\sigma R^2 T^4} \tag{1.13}$$

  wobei $\sigma = 5.67\,10^{-5}\,[\text{erg/cm}^2/\text{s/K}^4]$ die Stefan–Boltzmannsche Strahlungskonstante ist. (Aus dem Planckschen Strahlungsgesetz für Schwarze Körper folgt: $\sigma = (2\pi^5 k_B^4)/(15c^2h^3)$).

  Falls Sterne keine inneren Energiequellen besitzen, kühlen sie sich auf der sogenannten **Kelvin–Helmholtz–Zeitskala** ab:

  $$\tau_{kH} \equiv \frac{E_G}{L} \approx \frac{GM^2}{R\,4\pi\sigma R^2 T^4} \propto R^{-1}T^{-2}\,. \tag{1.14}$$

  Für die Sonne gilt: $\tau_{KH} \approx 3\,10^7$ Jahre.

Schlussfolgerung: **Sterne aus idealem Gas können sich für Zeiten $\tau > \tau_{KH}$ nur dann im hydrostatischen Gleichgewicht befinden, wenn sie Energie aus inneren (z.B. nuklearen) Quellen beziehen**.

Diese Schlussfolgerung ist letztendlich eine Konsequenz der Tatsache, dass

$$\left.\frac{\Delta M}{M_0}\right|_{Grav} \approx \frac{R_s}{R} \approx 10^{-6} \ll \left.\frac{\Delta M}{M_0}\right|_{Nuklear} \approx 10^{-2}\,.$$

- Entartete Sterne:

  Während der Druck für nichtentartete Sterne durch die kinetische Energie der Gasteilchen bestimmt ist, ist der Druck entarteter Materie eine Folge des Pauli–Prinzips

  $$\frac{p}{\varrho c^2} = f(\varrho, T) = \begin{cases} f(T)\,; & \text{ideales Gas} \\ f(\varrho)\,; & \text{entartete Fermionen} \end{cases}\,.$$

  Demnach gilt für ein ideales Gas: Wenn $T \to 0$, dann folgt $p \to 0 \;\Rightarrow$ kein Gleichgewicht!

  Zur Abschätzung des Drucks eines entarteten Elektronengases (Fermionengas) betrachten wir ein Elektron (Fermion) in einem Würfel der Kantenlänge d und damit in einem Volumen d^3. Nach der Heisenbergschen Unschärferelation gilt für den Impuls p_F des Elektrons (Fermions)

  $$p_F\, d \approx \hbar$$

  Die kinetische Energie oder **Fermi–Energie** des (nicht–relativistischen) Elektrons beträgt

  $$\boxed{\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{m_e d^2}} \tag{1.15}$$

  Falls $\varepsilon_F \gg kT$ ist die kinetische Energie des Elektrons (Fermions) nicht durch die Temperatur, sondern durch die Dichte bestimmt.

  $$\frac{p}{\varrho c^2} \approx \frac{\varepsilon_F}{M_A c^2} \approx \frac{\hbar^2}{m_e d^2 M_A c^2}\,. \tag{1.16}$$

  Man beachte, dass bei gegebener Dichte die leichtesten Teilchen die größte Fermienergie besitzen ($\varepsilon_F \propto m^{-1}$) und damit den größten Beitrag zum Druck leisten. Daher gilt näherungsweise

  $$p(e^-, A) \approx p(e^-)\,.$$

Die Massendichte ist dagegen durch die schwerste Komponente bestimmt

$$\varrho \approx \frac{m_e + M_A}{d^3} \approx \frac{M_A}{d^3}\,.$$

Setzt man diese Beziehung in (1.16) ein, so erhält man

$$\frac{p}{\varrho c^2} \approx \frac{\hbar^2 \varrho^{2/3}}{m_e M_A^{5/3} c^2} = \left(\frac{m_e}{M_A}\right)\left(\frac{\varrho}{\varrho_c}\right)^{2/3} \tag{1.17}$$

wobei

$$\boxed{\varrho_c \equiv \frac{M_A}{(\hbar/m_e c)^3} = 3\,10^7 \left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right]} \tag{1.18}$$

die Dichte ist, bei der der mittlere Abstand der Teilchen gleich der Compton-Wellenlänge des Elektrons $\lambda_e/2\pi = \hbar/m_e c = 3.86\,10^{-11}$ [cm] ist.

Für $\rho \geq \rho_c$ folgt aus der Heisenbergschen Unschärferelation

$$p_F \geq \frac{\hbar}{d} \gtrsim \frac{\hbar}{\lambda_e} \approx m_e c\,,$$

d.h. die Elektronen sind relativistisch. Die Fermi–Energie ist daher $\varepsilon_F \approx p_F c$ (anstelle von $\varepsilon_F \approx p_F^2/2m_e$) und

$$\frac{p}{\varrho c^2} \approx \frac{m_e}{M_A}\left(\frac{\varrho}{\varrho_c}\right)^{1/3} \quad \text{falls} \qquad \varrho > \varrho_c\,. \tag{1.19}$$

Somit gilt für die Zustandsgleichung eines Fermigas

$$\boxed{p = f(\varrho) \sim \begin{cases} \varrho^{5/3}\,; & \varrho < \varrho_c \\ \varrho^{4/3}\,; & \varrho > \varrho_c \end{cases}} \tag{1.20}$$

Folgerung: Aufgrund von Quanteneffketen übt ein Gas auch bei $T = 0$ (wegen seiner „Nullpunktsenergie“) Druck aus.

- **WD:** entartetes relativistisches Elektronengas
- **NS:** entartetes nicht–relativistisches Neutronengas

⇒WD als auch NS brauchen keine inneren Energiequellen, um im hydrostatischen Gleichgewicht zu sein.

1.2 Vorkommen und Erscheinungsformen

Sterntyp	Druckquelle	chemische Zusammensetzung	Masse $[M_\odot]$	Radius	Vorläufer-stern $[M_\odot]$
WD	Fermidruck relativistischer entarteter Elektronen	He C/O O/Ne/Mg	< 1.44	$\approx 10^4$ km	$0.8 - \sim 8$
NS	starke WW, Fermidruck nicht-relativ. entarteter Neutronen	n ($\sim 90\%$), p,e$^-$ ($\sim 10\%$)	$\sim 0.1 - \sim 3$	≈ 10 km	$\sim 8 - \sim 25$
BH	–	–	$\gtrsim 3$	$R_s = \frac{2GM}{c^2}$	$\gtrsim 25$?
Hauptreihen-stern (H–Brennen)	Gasdruck, Strahlung	H ($\sim 74\%$) He ($\sim 24\%$) „Metalle“ ($\sim 2\%$)	$0.08 - \sim 100$	$0.1 R_\odot - \sim 20 R_\odot$	–

a) **Weiße Zwerge:**

(i) als Einzelsterne:
unauffällige, schwache, bläuliche Sterne ($N_{\rm obs} \lesssim 2000$; siehe Abb 1.1)
als Zentralsterne Planetarischer Nebel, die sehr heiß ($T \gtrsim 10^5$ K) und blau sind ($N \approx 500$)

(ii) in Doppelsternsystemen:

(I) **ohne Akkretion** (d.h. ohne Anlagerung von Materie)
unauffällige, schwache, bläuliche Sterne, die vom Begleitstern überstrahlt werden und daher schwer zu finden sind
Anzahl: $N \approx 10$, bzw. wenn man auch Binärsystem mit Radiopulsaren betrachtet $N \gtrsim 20$
Beispiele: Sirius B (1892 von A.C. Clark entdeckt; Bahnperiode: 49.9 a; $R = 0.008\,R_\odot$; $M = 1.05 M_\odot$; $\bar{\varrho} = 3\,10^6$ [g/cm^3]), Procyon B, 40 Eri B

(II) **mit Akkretion** (Abb 1.2)
Novae, Zwergnovae und verwandte Objekte (sehr auffällige veränderliche Sterne mit zum Teil starken Helligkeits-Ausbrüchen (Novae): $N \approx 1000$

(iii) Charakteristische Größen:
Masse: $\langle M \rangle = 0.58\,M_\odot$ mit $\sigma_M \approx 0.1$, d.h. wenige WD mit $M \lesssim 0.4 M_\odot$ und $M \gtrsim 0.8 M_\odot$ (siehe Abb 1.3) .

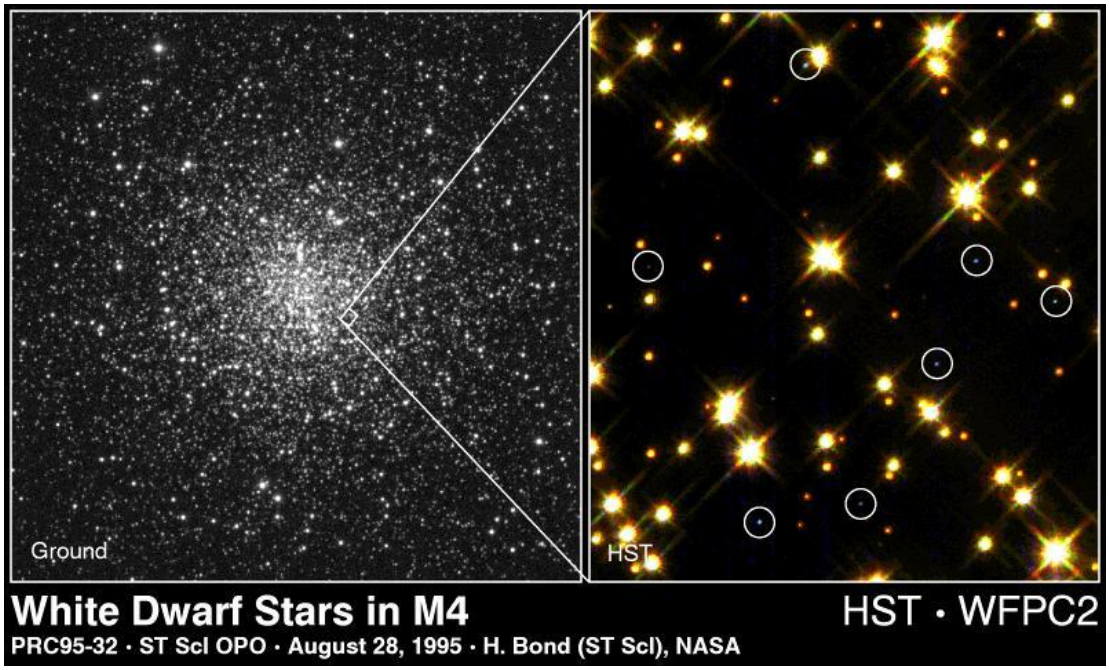


Abbildung 1.1: Das linke Bild zeigt eine irdische Aufnahme des der Erde nächstgelegenen ($\approx 2\,\mathrm{kpc}$) Kugelsternhaufens M4. Man sieht darauf vorwiegend alte, rote Riesensterne. Die HST–Aufnahme (rechts) eines kleinen Teils von M4 zeigt sieben Weiße Zwerge (innerhalb der blauen Kreise) zusammen mit den viel helleren anderen Sternen des Kugelsternhaufens.

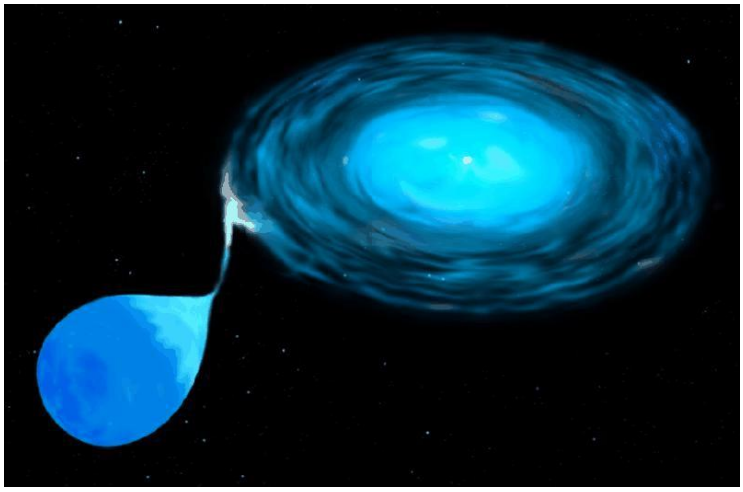
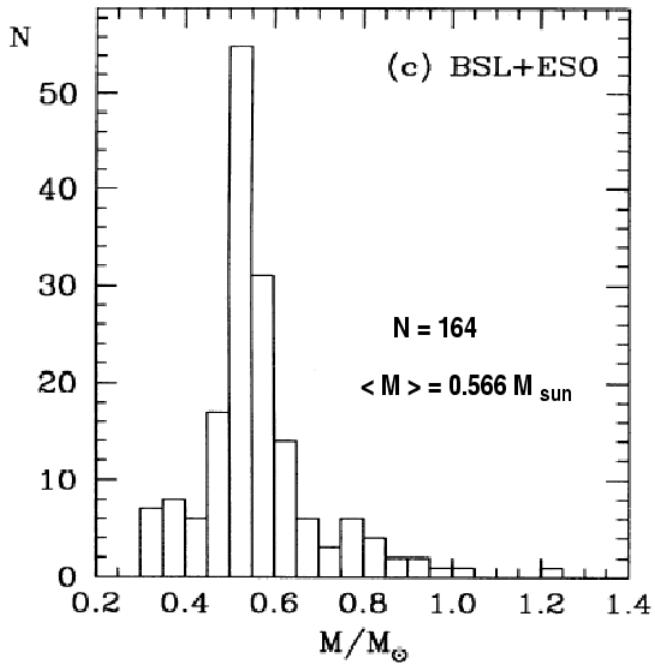


Abbildung 1.2: Skizze eines Doppelsternsystem mit Akkretionsscheibe



Massenverteilung von Weissen Zwergen

(Bragaglia et al., 1995, Astrophys. J. 443, 735)

Abbildung 1.3:

Radius: $\langle R \rangle = 0.012\, R_\odot$

Dichte: $\langle \overline{\varrho} \rangle = 4.7\, 10^5\, [\mathrm{g/cm^3}]$

Schwerebeschleunigung: $\langle GM/R^2 \rangle = 1.1\, 10^8\, \mathrm{cm/s^2}$ (d.h. $\approx 10^5\, \mathrm{g}$)

Leuchtkraft: $L \approx 10^{-3} L_\odot \ldots 10^{-2} L_\odot$

(iv) Spektraltypen: (Barstow, Chin. J. Astron. Astrophys. **3**, 2003, 287)

DA: reines H–Spektrum, nur Balmer–Linien, keine He- oder Metall–Linien; $6000\,\mathrm{K} \lessapprox T_{eff} \lessapprox 70000\,\mathrm{K}$; Oberfläche des WD besteht nur aus Wasserstoff.

DB: reines He–Spektrum, keine H- und Metall–Linien; $12\,000\,\mathrm{K} \lessapprox T_{eff} \lessapprox 30\,000\,\mathrm{K}$; Oberfläche des WD besteht nur aus Helium

DC: kontinuierliches Spektrum

DO: starke He II–Linien, auch He I und H–Linien; $45\,000\,\mathrm{K} \lessapprox T_{eff} \lessapprox 100\,000\,\mathrm{K}$ (oder mehr)

DZ: nur Metall–Linien, keine H- oder He–Linien

DQ: mit Kohlenstoff–Linien, (C_2–Molekül)

DBA: mit He I und H–Linien

Häufigkeit: Für Effektivtemperaturen $10^4\,\mathrm{K} \lesssim T_{eff} \lesssim 5\,10^4\,\mathrm{K}$ gilt $N_{DA} \approx 4N_{non-DA}$ und für kühlere WD mit $T_{eff} \lesssim 10^4\,\mathrm{K}$ findet man $N_{DA} \approx N_{non-DA}$.

(v) Rotation und Magnetfeld:

$\forall$ isolierten WD mit gemessener Rotationsperiode gilt $P_{rot} \gg (R^3/GM)^{1/2}$, d.h. isolierte WD rotieren langsam.

Schmidt & Smith [Astrophys. J. **448** (1995), 305]: Etwa $4\% \pm 1.5\,\%$ der isolierten WD haben ein Magnetfeld mit $3\,10^4\,\mathrm{G} \lesssim B \lesssim 10^9\,\mathrm{G}$; etwa 2 Dutzend isolierte, magnetische WD sind bekannt

(vi) Gesamtpopulation:

WD–Geburtsrate (aus Beobachtungen): $\approx 10^{-12}$/Jahr/pc^3. Das Volumen der galaktischen Scheibe $V_{disk} = \pi r^2(2H)$ ergibt sich aus dem Radius ($r \approx 15\,\mathrm{kpc}$) und der Dicke ($2H \approx 200\,\mathrm{pc}$) der Scheibe zu $V_{disk} \approx 10^{11}\,\mathrm{pc}^3$. Daraus folgt eine galaktische Geburtsrate von 0.1 WD/Jahr und bei einem Alter der Milchstrasse von 10^{10} Jahren eine galaktische Population von $\approx 10^9$ WD.

b) **Neutronensterne:**

(i) als Einzelsterne

Radiopulsare (N $\approx$ 1300), z.B. Crab- und Vela–Pulsar; Eigenbewegung PSR J0437-4715 (Bugstoßwelle; Abb 1.4); als Gravitationslinse; sonst praktisch nicht beobachtbar!

Ausnahme: RX J185635-3754 wegen der großen Nähe des Objekts ($d = 61\,\mathrm{pc}$; siehe Abb 1.5)

(ii) in Doppelsternsystemen

(I) ohne Akkretion
Binärpulsare, Millisekunden–Pulsare ($N \approx 100$); siehe z.B. Lorimer in *Living Reviews of Relativity*
www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-5lorimer/index.html
PSR B1913+16: Hulse–Taylor–Pulsar; NS–NS–System geeignet zum Überprüfen der Allgemeinen Relativitätstheorie
PSR B1937+214: bisher kürzeste gemessene Pulsperiode (1.55781 ms) eines Millisekunden–Pulsar; außerdem extrem genaue Uhr ($\dot{P} = 1.05\,10^{-19}$, d.h. Ungenauigkeit pro Jahr etwa 3 ps!); $N \approx 50$
PSR B1821-24: Erster entdeckter Pulsar in Kugelsternhaufen (M28); $N \approx 50$

(II) mit Akkretion
massereiche (HMXB) ($N \approx 70$) und massearme (LMXB) ($N \approx 120$) Röntgendoppelsterne oder Röntgenpulsare

(iii) Charakteristische Eigenschaften:
$T_{eff} \gtrsim 10^6\,\mathrm{K} \approx 0.1\,\mathrm{keV}$ →Röntgenstrahlung

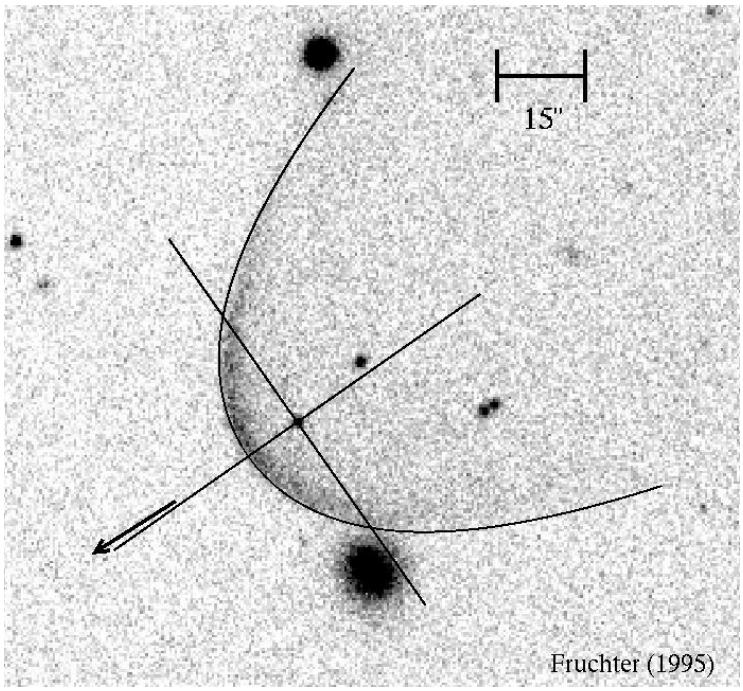


Abbildung 1.4: H_α–Aufnahme der Umgebung des Millisekunden–Pulsars PSR 0437-4715. Der Pfeil zeigt die Bewegungsrichtung des Pulsars an. Der leuchtschwache Stern direkt hinter der Stoßfront ist ein Weißer Zwerg, der zusammen mit dem Pulsar ein Doppelsternsystem bildet. Der Abstand zwischen Pulsar und Bugstoßwelle beträgt etwa 1400 AU.

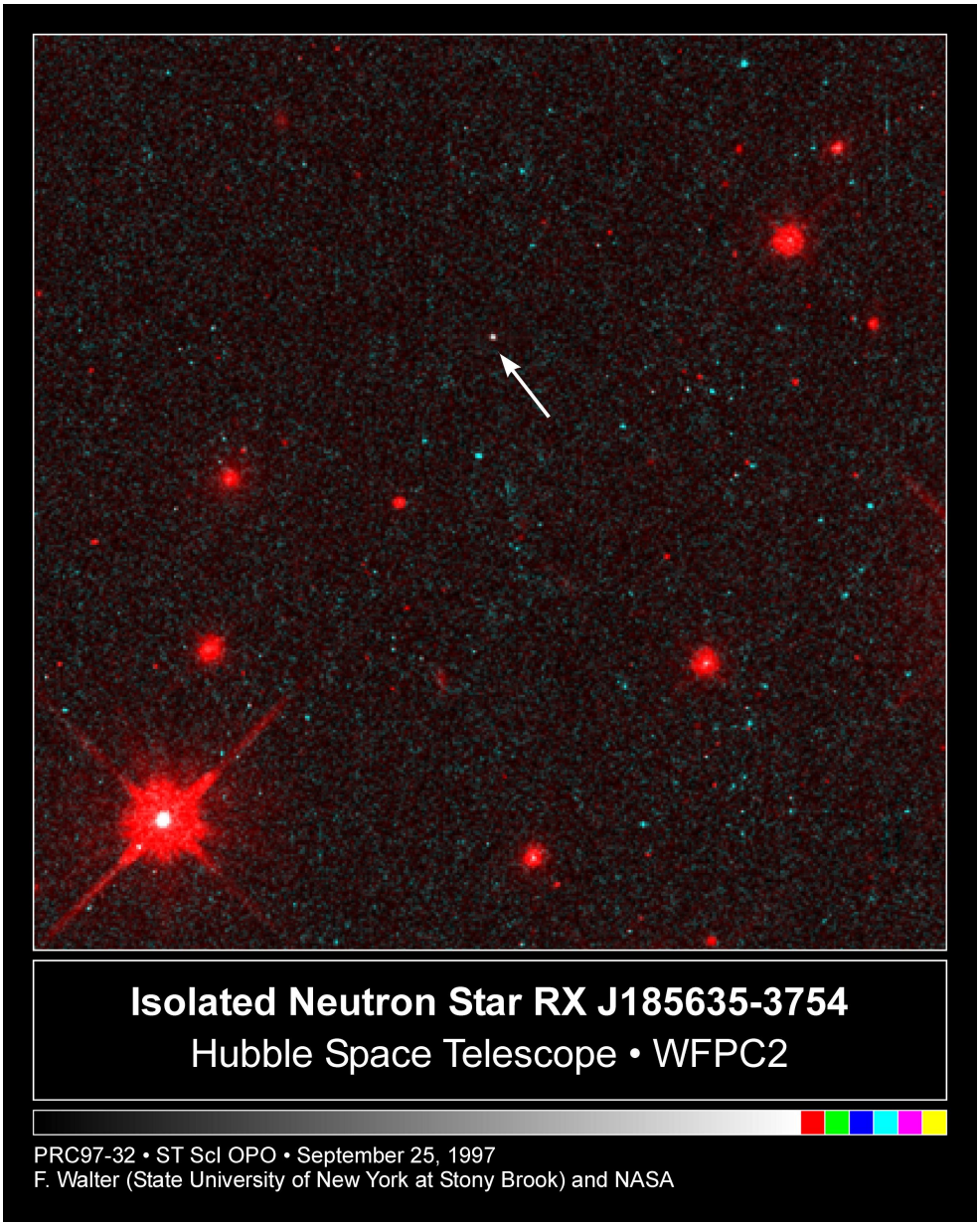


Abbildung 1.5: HST–Aufnahme des (nicht–pulsierenden) isolierten Neutronensterns RX J185635-3754. Er wurde zuerst durch seine intensive Röntgenstrahlung mit ROSAT gefunden (Walter et al. 1996, Nature 379, 233) und später mit dem HST entdeckt (Walter & Matthews 1997, Nature 389, 358). Der Neutronenstern ist sehr heiß ($T \approx 1.2\,10^6$K) und seine Entfernung beträgt nur 61 pc (Walter 2001, ApJ 549, 433). Er ist damit der uns nächstgelegene Neutronenstern.

teilweise sehr starke Magnetfelder 10^{12} bis einige 10^{13} Gauss (bis $\sim 10^{15}$ Gauss im Falle von Magnetaren)

einige mit fast kritischer Rotation (wenige msec), aber auch Spinperioden von bis zu 10 s

hohe Eigengeschwindigkeit: $\langle v \rangle \approx 450\,\mathrm{km/sec}$; Rekordhalter: $\approx 3000\,\mathrm{km/sec}$, d.h. $v \approx 0.01c \rightarrow E_{kin} \approx 3\,10^{50}\,\mathrm{erg}$; Ursache?

Assoziation mit Supernova–Überresten (SNR): z.B. Crab, Vela ($N \approx 10$)

Population: $\approx 10^5$ aktive Radiopulsare in der Milchstrasse; $\approx 10^8$ insgesamt in der Milchstrasse; aus Alter der Milchstrasse (10^{10} Jahre) und Entstehungsrate (1 Pulsar pro 100 Jahre)

c) **Schwarze Löcher:**

(i) als Einzelsterne:

praktisch nicht beobachtbar, außer durch Gravitationslineseneffekt (http://xxx.uni-augsburg.de/astro-ph/0109467)

(ii) in Doppelsternsystemen:

(I) ohne Akkretion: praktisch nicht beobachtbar; kein Beispiel bekannt

(II) mit Akkretion: Röntgendoppelsterne, einige Kandidaten (z.B. Cyg X-1)

(iii) als massereiche Schwarze Löcher:

Vorkommen: im Zentrum von (allen?) Galaxien (einschließlich der Milchstraße!) und aktiven Galaxienkernen (AGN's); „Maschine" zur Produktion extragalaktischer Jets

Masse: $10^6 M_\odot \lessapprox M_{BH} \lessapprox 10^9 M_\odot$

Leuchtkraft: $L \lessapprox 10^{47}\,\mathrm{erg/s}$; Akkretionsleuchtkraft $L_{ac} = GM\dot{M}/R$ für ein Objekt mit $R \approx R_S$:

$$L_{ac}^{BH} \approx \frac{c^2}{2}\dot{M} \approx 3\,10^{46}\frac{\dot{M}}{M_\odot/Jahr}\left[\frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{s}}\right]$$

Nachweis: Keplerbewegung von Gas im „Akkretionsstrudel" (Abb 1.6 und Abb 1.7) oder von nahen Sternen, wie im Falle des massereichen Schwarzen Lochs ($M_{BH} = 3.6\,10^6 M_\odot$) im Zentrum unserer Heimatgalaxie (Schödel et.al. 2003, ApJ 596,1015; siehe auch http://www.mpe.mpg.de/ir/GC/index.php).

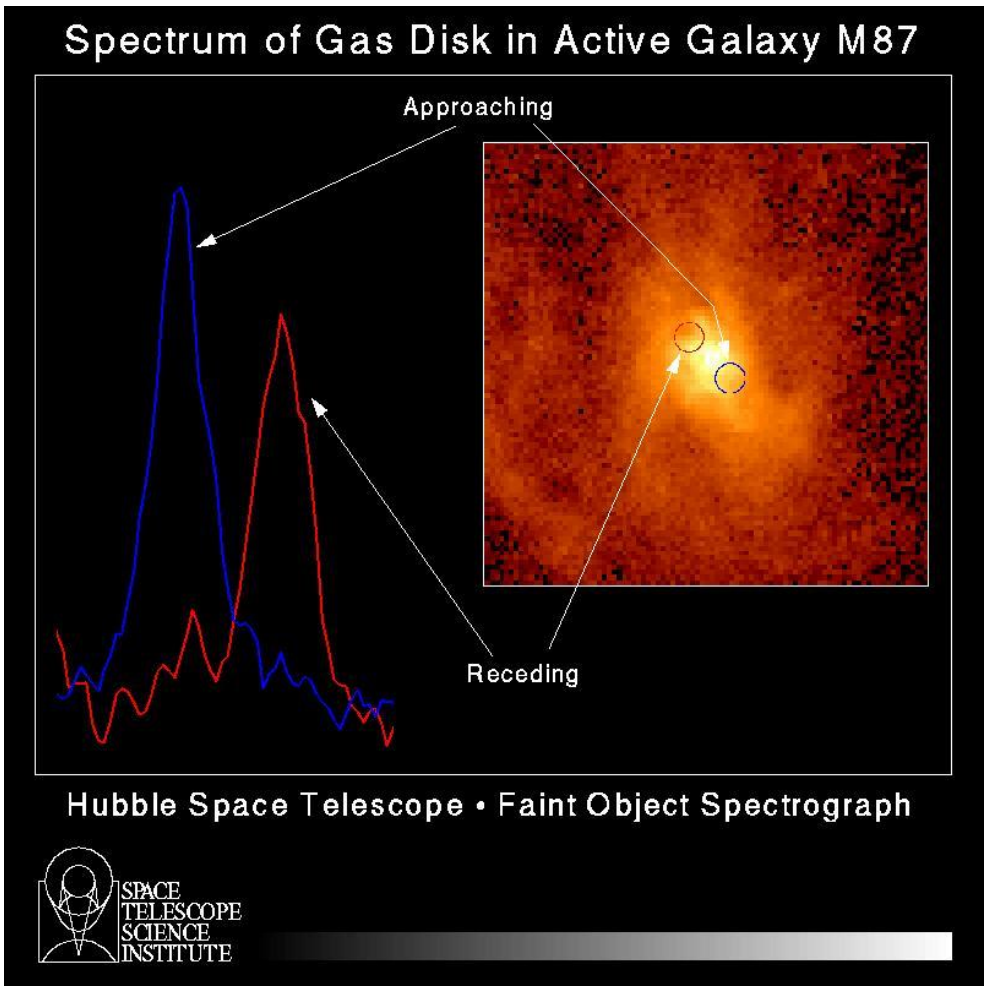


Abbildung 1.6: Geschwindigkeitsmessung des heißen Gases der rotierenden Akkretionsscheibe im Zentrum der aktiven Galaxie M87. Das Gas bewegt sich mit bis zu 500 km/s auf uns zu (bzw. von uns weg). Diese hohen Geschwindigkeiten weisen auf ein massereiches Schwarzes Loch hin ($M_{bh} \approx 3\,10^9\,M_\odot$)

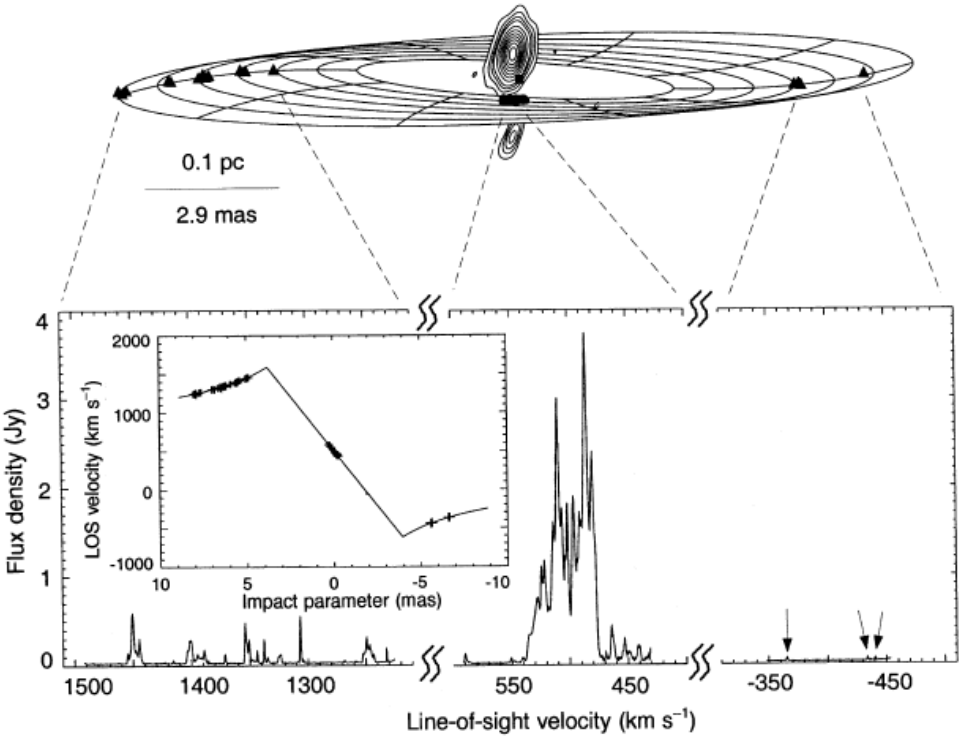


Abbildung 1.7: Ähnlich wie Abb. 1.7, aber für die Galaxie NGC 4527, wo man die Keplerbewegung um das zentrale Schwarze Loch durch eine Reihe von Wasser–Masern genau vermessen kann.

Kapitel 2

Weiße Zwerge

2.1 Zur Geschichte

1834 Bessel (1784 – 1846) entdeckt variable Eigenbewegung von Sirius $\rightarrow$ Doppelstern mit unsichtbarem Begleiter

1862 A.G. Clark findet Sirius–Begleiter nahe am vorausberechneten Ort. Aus den Bahnelementen und der Parallaxe folgt für Sirius B: $M \sim 1 M_\odot, L \sim \frac{1}{400} L_\odot$

1915 Adams bestimmt Spektraltyp (F) von Sirius B: $T \approx 8500\,\mathrm{K}$, $R \approx R_\odot/55$, $\overline{\varrho} \approx 61\,000\,[\mathrm{g/cm^3}]$

1924 A.S. Eddington formuliert Paradoxon: Hohe Dichte nur bei vollständiger Ionisation, d.h. bei hohen Temperaturen möglich. Ein Stern mit so hoher Dichte braucht Energie um abzukühlen!

1925 Adams misst Gravitationsrotverschiebung bei Sirius B ($v_R \approx 20\,\mathrm{km/s}$) und bestätigt damit Voraussagen der ART und hohes $\overline{\delta}$ von Sirius B.

1926 R.H. Fowler löst Eddingtons Paradoxon: Vollständige Ionisation nicht nur bei hoher T möglich, sondern auch bei $T \rightarrow 0$, wenn nur der Druck hoch genug ist (Druckionisation). Pauli-Prinzip, d.h. Fermi–Dirac–Statistik für das Elektronengas (Entartungsdruck) $\rightarrow$ Zustandsgleichung, WD sind Polytrope mit $n = 3/2$, d.h. $R \propto M^{-1/3}$.

1931 S. Chandrasekhar verallgemeinert Fowlers Ansatz: Berücksichtigung der speziellen RT $\rightarrow$ relativistische Entartung $\rightarrow$ Grenzmasse für WD. Beginn der Kontroverse mit Eddington, der behauptet: Relativistische Entartung gibt es nicht, folglich auch keine Grenzmasse. Die Masse–Radius–Beziehung ist $R \propto M^{-1/3}$ für beliebige M.

Chandrasekhar sucht Unterstützung bei Physikern (u.a. bei Bohr und Pauli), die sich aber nicht öffentlich zur Sache äussern.

1939 Chandrasekhar zieht Schlusstrich unter die Affaire und schreibt sein Buch „An Introduction to the Study of Stellar Structure“. Dann wendet er sich anderen Dingen zu. (Die Kontroverse endet letztlich mit Eddingtons Tod). 1983 erhält er den Nobelpreis!

2.2 Ideales Fermigas, Maxwell-Boltzmann Grenzfall

Die Impulsverteilung (**Fermi–Verteilung**) von N (idealen) Fermionen der Masse m, Spin s und Energie

$$E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2} = mc^2 \left[\left(\frac{p}{mc} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \tag{2.1}$$

in einem Volumen V bei einer Temperatur T ist gegeben durch

$$\boxed{\frac{dN}{dp} = \frac{g}{h^3} V\, 4\pi p^2\, f(E) \equiv \frac{g}{h^3} V\, 4\pi p^2 \frac{1}{\exp[(E-\mu)/k_B T] + 1}} \tag{2.2}$$

mit

g :	**statistisches Gewicht**; für Teilchen mit Spin s: $g = 2s + 1$; Elektronen $s = 1/2 \rightarrow g = 2$; Neutrinos: $g = 1$
$V\, 4\pi p^2 dp/h^3$:	**Zahl der Phasenraumzellen** vom Volumen h^3 im Ortsvolumen V und Impulsintervall $p, \ldots, p + dp$ (Isotropieannahme!)
f(E):	**Auffüllfaktor**, d.h. Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Phasenraumzelle bei der Energie E besetzt ist
$\mu \equiv \partial\varepsilon/\partial n\vert_{S,V}$	**chemisches Potential**

wobei ε die Energiedichte (inkl. Ruheenergie) und n die Anzahldichte der Fermionen sind. Statt des chemischen Potentials μ verwendet man oft auch die Größe

$$\eta \equiv \frac{\mu}{k_B T}\,, \tag{2.3}$$

die **Entartungsparameter** genannt wird. Aus der Fermi–Verteilung ergeben sich

- Anzahldichte:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{g}{h^3}\, 4\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp[(E-\mu)/k_B T] + 1}\,, \tag{2.4}$$

- Energiedichte (inkl. Ruhemassenergie!)

$$\varepsilon = \frac{E}{V} = \frac{g}{h^3}\,4\pi \int_0^\infty E\,\frac{p^2 dp}{\exp[(E-\mu)/k_B T]+1}\,, \tag{2.5}$$

- isotroper Druck (Impulsfluss)

$$P = \frac{1}{3}\,\frac{g}{h^3}\,4\pi \int_0^\infty pv\,\frac{p^2 dp}{\exp[(E-\mu)/k_B T]+1}\,, \tag{2.6}$$

wobei der Faktor 1/3 von der Integration über den Ortsraum herrührt und $v = pc^2/E$ die Geschwindigkeit der Fermionen ist. Für hinreichend niedrige Teilchendichten und hohe Temperaturen gilt

$$\lim_{\eta\to-\infty} f(E) = f_{MB}(E) = \exp\left(\frac{\mu - E}{k_B T}\right)\,, \tag{2.7}$$

d.h. die Fermi–Verteilung $f(E)$ geht in die **Maxwell–Boltzmann–Verteilung** $f_{MB}(E)$ über. In diesem **nicht entarteten** Fall gilt $f_{MB}(E) \ll 1$ („dünnes“ Gas) und man findet

$$\frac{\mu}{k_B T} = \ln\left[\frac{h^3}{(2\pi m k_B T)^{3/2}}\,\frac{n}{g}\right] \equiv \ln\left[\frac{n}{n^*}\right]\,, \tag{2.8}$$

d.h. $\mu/k_B T < 0$, falls die Teilchendichte n kleiner als die kritische Teilchendichte

$$n^* \equiv \frac{g}{h^3}\,(2\pi m k_B T)^{3/2} \tag{2.9}$$

ist. Mit $m = A m_u$ und $n = \varrho/A m_u$ folgt aus (2.8)

$$\frac{\mu}{k_B T} = \ln\left[\frac{h^3}{(2\pi A m_u k_B)^{3/2}}\,\frac{1}{g}\,\frac{1}{A m_u}\,\frac{\varrho}{T^{3/2}}\right]\,,$$

bzw.

$$\frac{\mu}{k_B T} = \ln\left[\frac{3.2\,10^{-3}}{g A^{5/2}}\,\frac{\varrho}{T^{3/2}}\right]\,. \tag{2.10}$$

Für Luft ($A \approx 30$, $\rho = 1.29\,10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$) bei $T = 273\,\mathrm{K}$ ergibt sich $\mu/k_B T \approx -30$. Im Grenzfall $T \to 0$ (mit $n > n^*$, d.h. $\mu > 0$) strebt $\eta = \mu/k_B T \to \infty$ und der Auffüllfaktor gegen

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad E \le E_F = \mu \\ 0 & \text{falls} \quad E > E_F = \mu \end{cases}\,, \tag{2.11}$$

d.h. die Fermi–Verteilung **entartet vollständig** (zu einer Kastenfunktion).

(i) **Nicht–relativistischer Grenzfall (NR)**

Im nicht–relativistischen Grenzfall ($p/mc \ll 1$) gilt für die Teilchenenergie (2.1)

$$E \approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2 \ldots\right]$$

bzw. für die nicht–relativistische Teilchenenergie (ohne Ruhemasse!)

$$E_{NR} = E - mc^2 \approx \frac{p^2}{2m}$$

Die Teilchenanzahldichte ergibt sich zu (η im folgenden ohne Ruhemasse!)

$$n_{NR} = \frac{g}{h^3}\, 4\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left[\frac{p^2}{2m\, k_B T} - \eta\right] + 1}\,,$$

bzw. nach Einführung der Hilfsgröße

$$x \equiv \frac{p^2}{2m\, k_B T}$$

mit $mk_BTdx = pdp$ zu

$$n_{NR} = \frac{g}{h^3}\, 2\pi\, (2mk_BT)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{\exp(x-\eta)+1} dx\,.$$

Definiert man als **Fermi-Integral**

$$\boxed{F_n(\eta) \equiv \int_0^\infty \frac{x^n dx}{\exp(x-\eta)+1}} \tag{2.12}$$

so erhält man

$$\boxed{n_{NR} = \frac{g}{h^3}\, 2\pi\, (2mk_BT)^{3/2}\, F_{1/2}(\eta)} \tag{2.13}$$

Dies ist eine implizite Definitionsgleichung für η bei gegebener Temperatur T und Teilchenanzahldichte n_{NR}. Die Gleichung zeigt, dass die Entartung mit zunehmender Dichte und/oder sinkender Temperatur wächst. Weiter gilt

$$\varepsilon_{NR} = \frac{g}{h^3}\, 4\pi \int_0^\infty \frac{p^2}{2m} \frac{p^2 dp}{\exp\left[\frac{p^2}{2m\, k_B T} - \eta\right] + 1}\,, \tag{2.14}$$

bzw.

$$\varepsilon_{NR} = \frac{g}{h^3}\, 2\pi\, (2mk_BT)^{3/2}\, k_BT\, F_{3/2}(\eta)\,.$$

Unter Verwendung von (2.13) gilt daher

$$\boxed{\varepsilon_{NR} = n_{NR}\, k_BT\, \frac{F_{3/2}(\eta)}{F_{1/2}(\eta)}} \tag{2.15}$$

Für den Druck erhält man den Ausdruck

$$P_{NR} = \frac{1}{3}\frac{g}{h^3}\, 4\pi \int_0^\infty \frac{p^2}{m}\, \frac{p^2 dp}{\exp\left[\frac{p^2}{2m\, k_BT} - \eta\right] + 1}\,.$$

Ein Vergleich dieses Ausdrucks mit dem für ε_{NR} (2.14) ergibt

$$\boxed{P_{NR} = \frac{2}{3}\varepsilon_{NR}} \tag{2.16}$$

(a) Im Grenzfall vollständiger Entartung ($\eta \to +\infty$) gilt

$$\boxed{\lim_{\eta\to\infty} F_n(\eta) = \int_o^\eta x^n dx = \frac{1}{n+1}\eta^{n+1}} \tag{2.17}$$

und damit

$$n^D_{NR} = \frac{g}{h^3}\, 2\pi\, (2mk_BT)^{3/2}\, \frac{2}{3}\eta^{3/2} \tag{2.18}$$

und

$$\varepsilon^D_{NR} = \frac{g}{h^3}\, 2\pi\, (2mk_BT)^{3/2}\, k_BT\, \frac{2}{5}\eta^{5/2}\,. \tag{2.19}$$

Löst man (2.18) nach η auf und setzt den Ausdruck in (2.19) ein, folgt

$$\boxed{\varepsilon^D_{NR} = \frac{3h^2}{10m}\left(\frac{3}{4\pi g}\right)^{2/3} \left(n^D_{NR}\right)^{5/3}} \tag{2.20}$$

und daher

$$P^D_{NR} \sim \left(n^D_{NR}\right)^{5/3} \sim \left(Y_F\, \rho\right)^{5/3}\,,$$

wobei Y_F die **Anzahl der Fermionen pro Baryon** ist.

(b) Im Grenzfall nicht–entarteter Fermionen ($\eta \to -\infty$) gilt

$$\boxed{\lim_{\eta\to-\infty} F_n(\eta) = e^\eta \int_o^\infty x^n e^{-x} dx = e^\eta \Gamma(n+1)}\,, \tag{2.21}$$

wobei $\Gamma(n+1)$ die Gammafunktion ist. Für positive ganzzahlige n gilt $\Gamma(n+1) = n!$ (Fakultät). Weiterhin gilt $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ und $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$. Für die Teilchenanzahldichte folgt damit

$$\boxed{n_{NR}^{ND} = \frac{g}{h^3}\,(2\pi m k_B T)^{3/2}\, e^\eta} \tag{2.22}$$

und für die Energiedichte (2.15)

$$\boxed{\varepsilon_{NR}^{ND} = \frac{3}{2}\, n_{NR}^{ND}\, k_B T} \tag{2.23}$$

(ii) **Extrem–relativistischer Grenzfall (ER)**

Im extrem–relativistischen Grenzfall gilt $p/mc \gg 1$ und damit $E \approx pc$. Die Teilchenanzahldichte ist daher durch

$$n_{ER} = \frac{g}{h^3}\, 4\pi \int\limits_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left[\frac{pc-\mu}{k_B T}\right] + 1}$$

gegeben. Mit $x \equiv pc/k_B T$ folgt

$$n_{ER} = 4\pi g \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 \int\limits_0^\infty \frac{x^2}{\exp(x-\eta)+1} dx\,,$$

bzw.

$$\boxed{n_{ER} = 4\pi g \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 F_2(\eta)} \tag{2.24}$$

Analog folgt

$$\varepsilon_{ER} = \frac{g}{h^3}\, 4\pi \int\limits_0^\infty pc\, \frac{p^2 dp}{\exp\left[\frac{pc-\mu}{k_B T}\right] + 1} \tag{2.25}$$

und damit unter Verwendung von (2.12) und (2.24)

$$\boxed{\varepsilon_{ER} = n_{ER}\, k_B T\, F_3(\eta)} \tag{2.26}$$

Für den Druck ergibt sich

$$P_{ER} = \frac{1}{3}\,\frac{g}{h^3}\,4\pi \int\limits_0^\infty pc\,\frac{p^2 dp}{\exp\left[\frac{pc-\mu}{k_B T}\right]+1}$$

und durch Vergleich mit (2.25)

$$\boxed{P_{ER} = \frac{1}{3}\varepsilon_{ER}} \tag{2.27}$$

(a) Im Grenzfall vollständiger Entartung ($\eta \to +\infty$) gilt

$$n_{ER}^{D} = 4\pi g \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 \frac{1}{3}\eta^3$$

und

$$\varepsilon_{ER}^{D} = 4\pi g \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 k_B T\,\frac{1}{4}\eta^4$$

bzw.

$$\varepsilon_{ER}^{D} = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4\pi g}\right)^{1/3} hc\,\left(n_{ER}^{D}\right)^{4/3}$$

und

$$P_{ER}^{D} \sim \left(n_{ER}^{D}\right)^{4/3} \sim \left(Y_F \rho\right)^{4/3}\ .$$

(b) Im Grenzfall nicht–entarteter Fermionen ($\eta \to -\infty$) gilt

$$n_{ER}^{ND} = 8\pi g \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 e^{\eta}$$

und

$$\varepsilon_{ER}^{ND} = 24\pi g \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 k_B T\, e^{\eta}$$

bzw.

$$\varepsilon_{ER}^{ND} = 3\, n_{ER}^{ND}\, k_B T$$

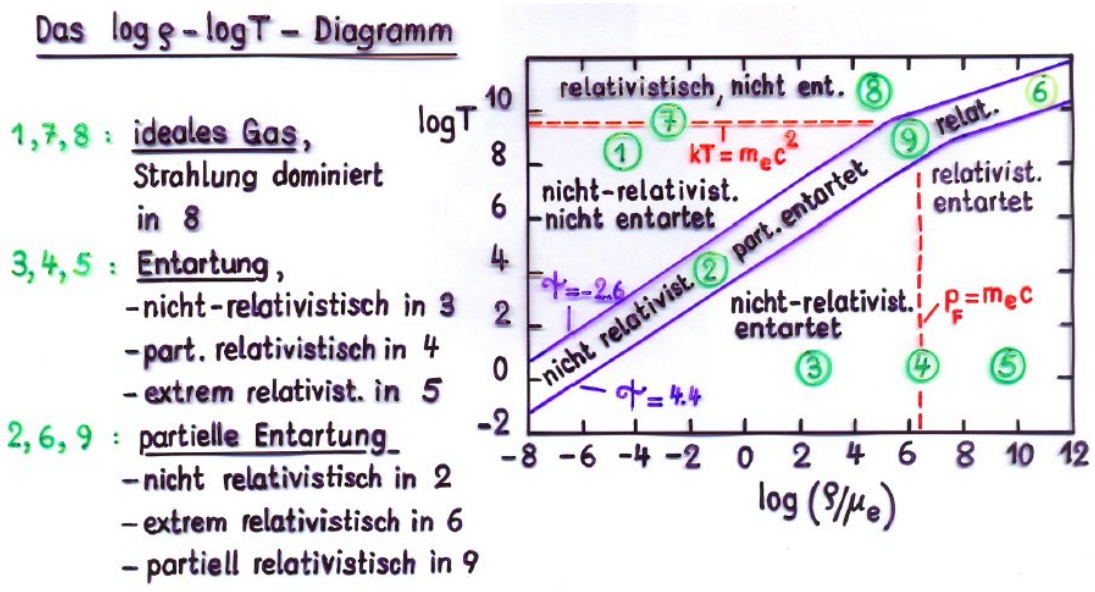


Abbildung 2.1: Das $\log \rho - \log T$-Diagramm zeigt die verschiedenen Zustandsbereiche eines thermodynamischen System, dessen Komponenten (i) ein ideales Boltzmanngas, (ii) ein beliebig entartetes und beliebig relativistisches Elektronengas und (iii) Strahlung sind.

(iii) **Zusammenfassung**

Grenzfall	Zustandsgleichung	ND	D
NR	$P = \frac{2}{3}\varepsilon$	$P = nk_BT$	$P \sim (Y_F\rho)^{5/3}$
ER	$P = \frac{1}{3}\varepsilon$	$P = nk_BT$ (Jüttner 1915)	$P \sim (Y_F\rho)^{4/3}$

- Für nicht–entartete (ND) Fermionen gilt die Ideale Gas Zustandsgleichung sowohl im nicht–relativistischen (NR) als auch im extrem relativistischen (ER) Fall.
- Im Falle vollständiger Entartung (D) hängt der Druck nicht von der Temperatur ab.
- Im nicht–entarteten, nicht–relativistischen Fall ist der Gasdruck unter Umständen kleiner als der Strahlungsdruck. (siehe nächstes Unterkapitel).

2.3 Bosegas, Strahlungsdruck und Planck-Verteilung

Die statistische Mechanik und Thermodynamik von Fermionen (Elektronen, Positronen, Neutrinos, Nukleonen, Quarks) spielt in der Astrophysik eine wichtige Rolle, z.B. für das Verständnis der Spätstadien der Sternentwicklung und von kompakten Objekten. Für Bosonen gilt dies nur im Falle von Photonen (Strahlung).

- Die Impulsverteilung (**Bose-Einstein-Verteilung**) von N idealen Bosonen der Masse m, Spin s und Energie E (2.1) in einem Volumen V bei einer Temperatur T ist durch

$$\boxed{\frac{dN}{dp} = \frac{g}{h^3} V 4\pi p^2 f_{BE} \equiv \frac{g}{h^3} V 4\pi p^2 \frac{1}{\exp[(E-\mu)/k_B T] - 1}} \tag{2.28}$$

  gegeben.

- Vergleicht man die Bose-Einstein–Verteilung mit der Fermi-Dirac-Verteilung (2.2), so besteht der einzige Unterschied darin, dass der Auffüllfaktor (die Wahrscheinlichkeit dass eine Phasenraumzelle bei der Energie E besetzt ist) $f_{BE}(E)$ im Nenner ein Minuszeichen anstelle des Pluszeichens in $f_{FD}(E)$ aufweist.

  Daher kann $f_{BE}(E)$ beliebig groß werden, während (wegen des Pauli-Prinzips) $0 \leq f_{FD}(E) \leq 1$ gilt.

- Im Falle von **Photonen**, d.h. masselosen Bosonen mit Spin $s = 1$ und statistischem Gewicht $g = 2$ (nur zwei transversale Freiheitsgrade) im thermischen Gleichgewicht, ist das chemische Potential $\mu = 0$ (Teilchenzahl nicht konstant), und die Bose-Einstein-Verteilung $f_{BE}(E)$ geht in die **Planck-Verteilung**

$$\boxed{f_{Planck}(E) = \frac{1}{\exp(E/k_B T) - 1}} \tag{2.29}$$

  über.

- Die **Energiedichte der Photonen** der Frequenz $\omega = E/\hbar$ bei der Temperatur T ist dann mit $x \equiv (\hbar\omega)/(k_B T)$ durch

$$\varepsilon(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^4 \frac{x^3}{\exp(x) - 1} \tag{2.30}$$

  gegeben.

  Die Energiedichteverteilung besitzt ein Maximum (der Emission), das sich mit wachsender Temperatur zu höheren (kürzeren) Frequenzen (Wellenlängen) verschiebt

(Abb. 2.2). Bezeichnet man die Wellenlänge, die zum Maximum gehört mit $\lambda_{\max}$, so gilt das **Wien'sche Verschiebungsgesetz**

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{konst.} = 0.2898\,[\text{cm Grad}]\,. \tag{2.31}$$

Bei $T = 6000\,\text{K}$ liegt das Maximum damit bei $\lambda_{\max} = 480\,\text{nm}$ (im Grünen).

- Für die **Gesamt–Energiedichte der Photonen** folgt (analog zu (2.5); extrem relativistischer Grenzfall mit $E = pc = \hbar\omega$, da $m_\gamma = 0$)

$$\varepsilon_\gamma = 8\pi \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 k_B T \int\limits_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \tag{2.32}$$

Das Integral hat den Wert $\pi^4/15$. Damit folgt

$$\varepsilon_\gamma = aT^4 \tag{2.33}$$

bzw.

$$P_\gamma = \frac{1}{3}\varepsilon_\gamma = \frac{1}{3}aT^4 \tag{2.34}$$

mit der **Strahlungskonstanten**

$$a \equiv \frac{8\pi^5\, k_B^4}{15\,(hc)^3} = 7.56464\,10^{-15}\,\left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3\text{K}^4}\right]\,. \tag{2.35}$$

Für $T = 10^{10}\,\text{K}$ ist $P_\gamma \approx 2\,10^{25}\,[\text{erg/cm}^3]$ und $P_{\text{Gas}} \approx 10^{-6}\,n\,[\text{erg/cm}^3]$, wobei n die Anzahldichte der Boltzmann-Gasteilchen ist. Demnach ist $P_\gamma \gg P$ falls $n \ll 2\,10^{31}\,[\text{cm}^{-3}]$.

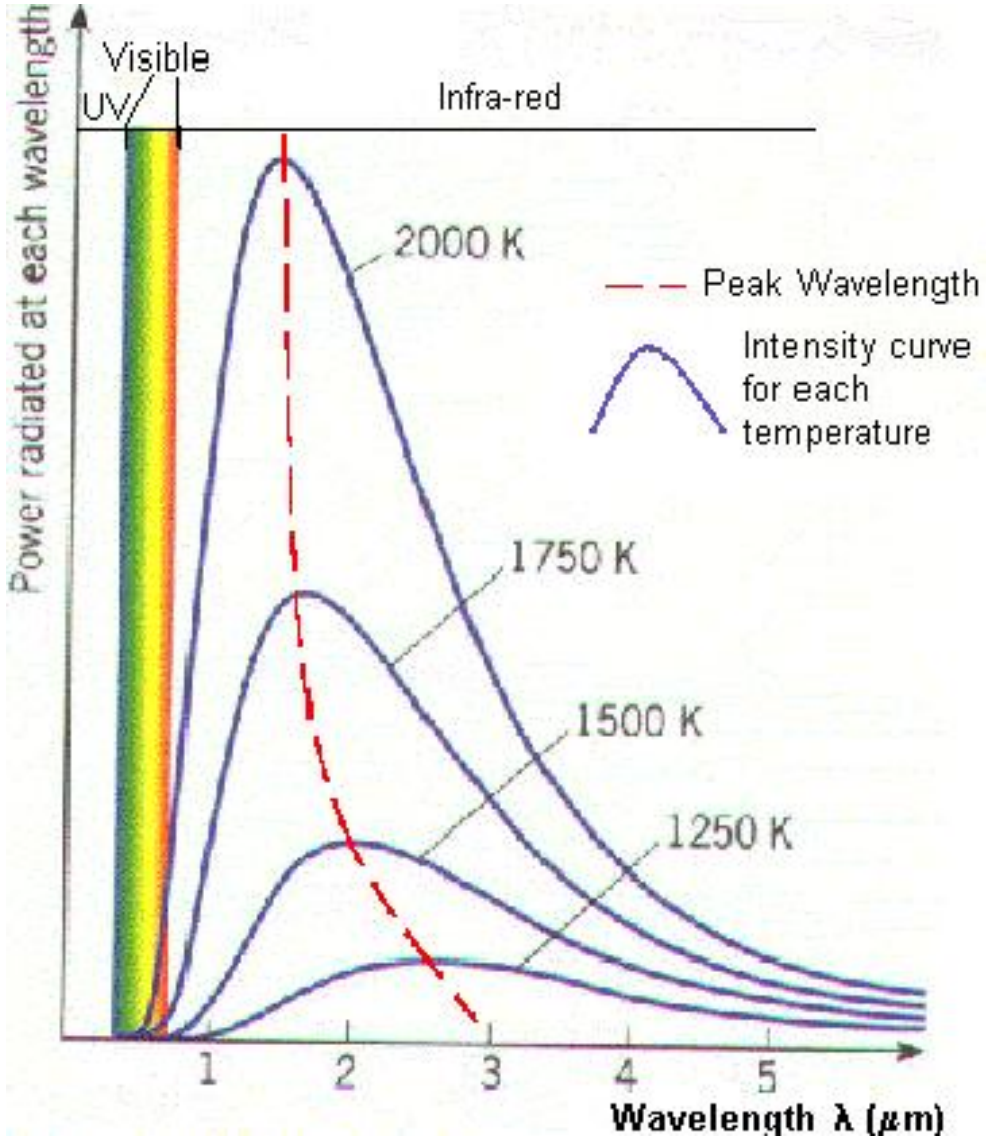


Abbildung 2.2: Energiedichteverteilung von Photonen gemäß der Planck–Verteilung bei verschiedenen Temperaturen.

2.4 Polytrope Gaskugeln

- einfachster Typ von Sternmodellen [Emden (1907), Lane (1870)]
- **Polytrope;** Modell eines Sterns im hydrostatischen Gleichgewicht bei dem die Druck- und Dichteverteilung die Bedingung

$$\boxed{P(r) = K\,\rho(r)^{1+\frac{1}{n}}} \tag{2.36}$$

  erfüllt. Die Größen K und n heißen **Polytropenkonstante** und **Polytropenindex**. Beziehung (2.36) gilt im ganzen Stern, d.h. K und n sind räumlich (aber nicht notwendigerweise zeitlich) konstant.

- Die Polytropenbeziehung braucht **nicht** mit der Zustandsgleichung identisch zu sein!
- Es existieren zwei Möglichkeiten für Polytrope

  a) Die Zustandsgleichung ist polytrop
  Dies gilt zum Beispiel für ein vollständig entartetes Elektronengas
  1. NR: $P \sim \rho^{5/3} \rightarrow n = 3/2$
  2. ER: $P \sim \rho^{4/3} \rightarrow n = 3$

  b) Druck- und Temperatur–Schichtung sind gekoppelt
  Das Gas im Stern genüge der Zustandsgleichung $P = P(\rho, T)$. Außerdem gelte für die Temperaturschichtung im Stern noch die Nebenbedingung $T = T(P)$.
  1. **isotherme** Schichtung ($T = T_0$) eines idealen Gas ($P = \mathcal{R}/\mu\rho T$) mit mittlerem Molekulargewicht $\mu \quad \rightarrow \quad P \sim \rho$, $n = \infty$ und $K = \mathcal{R}T_0/\mu$, d.h. K hängt von T_0 und μ ab und ist daher frei wählbar.
  2. **adiabatische** Schichtung ($T \sim P^{\nabla_{ad}}$) durch Konvektion in einem idealen Gas mit einem Temperaturgradienten $\nabla = \nabla_{ad} \equiv (d\ln T/d\ln P)_{ad}$. Wenn der Strahlungsdruck zu vernachlässigen ist, folgt für ein (1-atomiges) ideales Gas $\nabla_{ad} = 2/5$, d.h $T \sim P^{2/5}$ im ganzen Stern. Daraus ergibt sich (für $\mu = const.$) die polytrope Beziehung
  $$P \sim \rho^{1+\frac{1}{n}} \qquad \text{mit} \quad n = \frac{1-\nabla_{ad}}{\nabla_{ad}}$$
  und $n = 3/2$.

- **Wichtiger Unterschied:** Wenn Zustandsgleichung von polytropem Typ ist, ist die Polytropenkonstante K festgelegt und läßt sich aus Naturkonstanten berechnen. Wenn dagegen die Druck- und Temperatur–Schichtung gekoppelt sind, ist K ein freier Parameter, der innerhalb des Sterns konstant ist, aber von Stern zu Stern variieren kann.

- Emdensche Differentialgleichung

  Die mechanische Sternaufbaugleichung lautet

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho \tag{2.37}$$

  mit

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho\,. \tag{2.38}$$

  Kombiniert man beide Gleichungen, so erhält man die Poisson–Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho \tag{2.39}$$

  Für eine Polytrope (2.36) gilt

$$\frac{dP}{dr} = K\,(1+\frac{1}{n})\rho^{\frac{1}{n}}\frac{d\rho}{dr}\,.$$

  Damit folgt für die Poisson–Gleichung

$$K\,\frac{n+1}{n}\,\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\rho^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho}{dr}\right) = -4\pi G\rho\,.$$

  Führt man dimensionslose Größen y und x gemäß

$$\rho = \rho_c\, y^n$$

  und

$$r = \alpha x \qquad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G}\,\rho_c^{\frac{1}{n}-1} \quad [\mathrm{cm}^2]$$

  ein, so erhält man die nicht–lineare **Emdensche Differentialgleichung**

$$\boxed{\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{dy}{dx}\right) = -y^n} \tag{2.40}$$

  für die **Lane–Emden–Funktion** $y(x)$ mit den Randbedingungen $y(x=0)=1$ und $dy/dx|_{x=0}=0$. Analytische Lösungen existieren für $n = 0$, 1 und 5

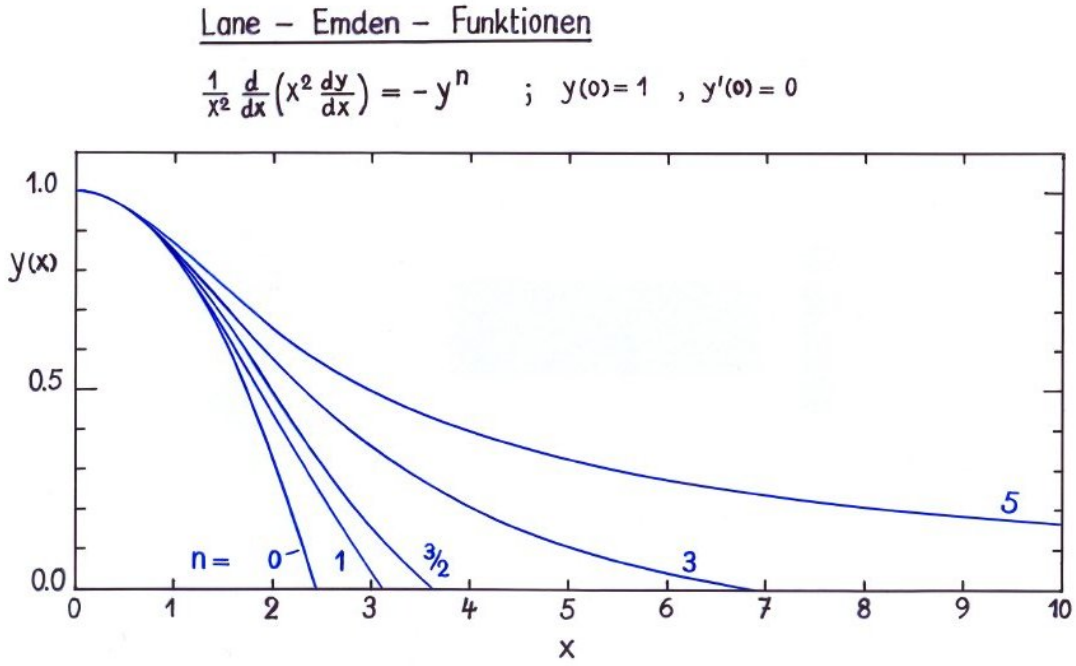


Abbildung 2.3: Graphisches Darstellung einiger ausgewählter Lösungen der Lane-Emden-Gleichung .

1. $n = 0$ $\quad y(x) = 1 - x^2/6$

2. $n = 1$ $\quad y(x) = \sin x/x$

3. $n = 5$ $\quad y(x) = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1/2}$

$\forall n < 5 : \; y = 0$ für $x = x_0 < \infty$ und $y'(x_o) < 0$, d.h. Polytrope mit $n < 5$ haben einen scharfen Rand

$\forall n : \; y(x) \approx 1 - \frac{x^2}{6}$ für $x \ll 1$

- Wichtige Eigenschaften von Polytropen

  Der **Radius** einer Polytrope entspricht der ersten Nullstelle der entsprechenden Lane–Emden–Funktion ($y(x_0) = 0$) und ist durch

$$\boxed{R = \alpha x_o = \left[\frac{K(n+1)\rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}\right]^{1/2} x_o} \tag{2.41}$$

gegeben. Für die **Masse** einer Polytropen gilt

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr$$

bzw.

$$M = 4\pi\rho_c\alpha^3 \int_0^{x_0} x^2 y^n(x) dx \,.$$

Unter Verwendung der Emdenschen Differentialgleichung (2.40) erhält man

$$M = -4\pi\rho_c\alpha^3 \int_0^{x_0} \frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dy}{dx}\right) dx$$

und damit schließlich

$$\boxed{M = -4\pi\rho_c\alpha^3 x_0^2 \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}} \tag{2.42}$$

bzw.

$$\boxed{M = -4\pi \left[\frac{K(n+1)}{4\pi G}\right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n}\, x_0^2\, y'(x_0)} \tag{2.43}$$

Wichtig: Für $n = 3$ hängt M nicht von ρ_c ab

$$M_3 = 4\pi \left(\frac{K}{\pi G}\right)^{3/2} \left[-x_0^2\, y'(x_0)\right]_{n=3} \,. \tag{2.44}$$

Aus den obigen Gleichungen für Masse und Radius einer Polytrope erhält man die **Masse–Radius–Beziehung** (eindeutig für festes K und n)

$$\boxed{R^{3-n} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{K(n+1)}{G}\right]^n \left[-x_0^{\frac{n+1}{n-1}}\, y'(x_0)\right]^{n-1} M^{1-n}} \tag{2.45}$$

1. $n = 3:$ M ist unabhängig von R
2. $n = 1:$ R ist unabhängig von M

Für gegebene Werte von K, n und M gibt es nur eine einzige Lösung

Die **potentielle Energie** einer Polytrope ist gegeben durch

$$\boxed{E_G = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}} \tag{2.46}$$

2.5 Die Chandrasekhar Grenzmasse

- In Weißen Zwergen ist das Elektronengas entartet. Daher betrachten wir die Zustandsgleichung eines (vollständig) entarteten Elektronengas ($g = 2$)

  (i) nicht–relativistisch ($\rho \ll 10^6$ [g/cm^3]; siehe Gl.2.20)

  $$P = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e}\, n_e^{5/3}\,.$$

  Da $n_e = \rho Y_e/m_B$ folgt damit

  $$\boxed{P = K_{3/2}\rho^{5/3} \quad \text{mit} \quad K_{3/2} = \frac{h^2}{5m_e m_B}\left(\frac{3}{8\pi m_B}\right)^{3/2} Y_e^{5/3} = 9.9\,10^{12}\,Y_e^{5/3}\,[\text{cgs}]} \quad (2.47)$$

  d.h. eine Zustandsgleichung, die mit der Struktur einer Polytrope vom Polytropenindex $n = 3/2$ verträglich ist.

  (ii) relativistisch ($\rho \gg 10^6$ [g/cm^3]; siehe Gl.2.27 ff)

  $$P = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/3} hc\, n_e^{4/3}$$

  $$\boxed{P = K_3\rho^{4/3} \quad \text{mit} \quad K_3 = \frac{hc}{4m_B}\left(\frac{3}{8\pi m_B}\right)^{1/3} Y_e^{4/3} = 1.2\,10^{15}\,Y_e^{4/3}\,[\text{cgs}]} \quad (2.48)$$

  d.h. eine Zustandsgleichung, die mit der Struktur einer Polytrope vom Polytropenindex $n = 3$ verträglich ist.

- Für die Masse–Radius bzw. Masse–Zentraldichte–Beziehung von Polytropen gilt (2.45)

  $$R \propto M^{\frac{1-n}{3-n}} \quad \text{bzw.} \quad \rho_c \propto M^{\frac{2n}{3-n}}\,,$$

  d.h. für ein vollständig entartetes, nicht–relativistisches Elektronengas folgt ($n = 3/2$, $K = K_{3/2}$)

  $$R \propto M^{-1/3} \quad \text{bzw.} \quad \rho_c \propto M^2$$

  Aus $d\rho_c/dM > 0$ folgt $d\eta/dM > 0$, d.h. die Entartung wächst mit der Masse M der Polytrope. Oberhalb einer gewissen Masse ist das Elektronengas daher relativistisch entartet.

(i) entartetes, extrem relativistisches Elektronengas
Der Polytropenindex hat den Wert $n = 3$. Die Masse–Radius–Beziehung ist singulär, d.h. es existiert eine von R und ρ_c unabhängige Masse M_3 (2.44)
Für $n = 3 - \epsilon$ mit $\epsilon \ll 1$ folgt

$$R \propto M^{1-\frac{2}{\epsilon}} \quad \text{bzw.} \quad \rho_c \propto M^{\frac{6}{\epsilon}-2}$$

und daraus

$$\lim_{\epsilon\to 0} R = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\epsilon\to 0} \rho_c = \infty \,.$$

(ii) Übergang von $n = 3/2$ zu $n = 3$
Für ein nicht–relativistisches Elektronengas gilt $n = 3/2$. Die zentrale Dichte einer entsprechenden Polytrope skaliert wie $\rho_c \propto M^2$, d.h. die zentrale Dichte und damit die Fermi–Energie der Elektronen nehmen mit der Masse M zu und das Elektronengas wird relativistischer.
Für einen Weißen Zwerg der Masse M gilt andererseits $d\rho/dM_r < 0$, d.h. die Entartung des Elektronengas ist im Zentrum stärker relativistisch als in der Nähe der Oberfläche.
Konsequenz: Ein Weißer Zwerg ist keine Polytrope.

- Die relevante Zustandsgleichung eines Weißen Zwergs ist die eines beliebig relativistischen, (vollständig) entarteten Elektronengas ($f(E)$ ist zur Kastenfunktion entartet)

$$P_e = \frac{1}{3}\,\frac{8\pi}{h^3}\int_0^{p_F} pv\, p^2 dp$$

Bezeichnet man mit m und m_e die Masse bzw. die Ruhemasse eines Elektrons so gilt für seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{p}{m} = \frac{p}{m_e}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \,.$$

Löst man diese Gleichung nach v auf, so folgt

$$v = \frac{p}{m_e}\left(\frac{m_e^2 c^2}{m_e^2 c^2 + p^2}\right)^{1/2}$$

und damit

$$P_e = \frac{8\pi}{3 m_e h^3}\int_0^{p_F} \frac{p^4 dp}{(1 + p^2/m_e^2 c^2)^{1/2}} \,.$$

Mit den Definitionen $z \equiv p/m_e c$ und $x \equiv p_F/m_e c$ läßt sich der Druck auch in der Form

$$P_e = \frac{8\pi}{3m_e h^3} (m_e c)^5 \int_0^x \frac{z^4 dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

schreiben. Damit erhält man schließlich

$$\boxed{P_e = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} f(x) \equiv A\, f(x)} \tag{2.49}$$

mit (man beachte, dass $\operatorname{arsh} \mathrm{x} \equiv \ln(\mathrm{x} + \sqrt{1+\mathrm{x}^2})$)

$$\boxed{f(x) \equiv 8 \int_0^x \frac{z^4 dz}{\sqrt{1+z^2}} = x(2x^2-3)\sqrt{1+x^2} + 3 \operatorname{arsh} x} \tag{2.50}$$

Ist die Entartung des Elektronengas nicht vollständig sind Korrekturterme infolge der endlichen Temperatur des Elektronengas zu berücksichtigen (siehe Chandrasekhar (1939), Seite 392, Gl. 198)

Analog findet man

$$\rho = n_e \frac{m_B}{Y_e} = B\, x^3 \tag{2.51}$$

mit

$$B = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{m_e c}{h}\right)^3 \frac{m_B}{Y_e} \tag{2.52}$$

- Setzt man die obigen Beziehungen für den Druck (2.49) und die Dichte (2.51) eines beliebig relativistischen Elektronengas in die Poisson–Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht (2.39) ein, so erhält man

$$\frac{A}{B} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{x^3} \frac{df(x)}{dr} \right) = -4\pi G B x^3 \,.$$

Gemäß der Definition von $f(x)$ (2.50) gilt

$$\frac{1}{x^3} \frac{df(x)}{dr} = \frac{8x}{\sqrt{x^2+1}} \frac{dx}{dr} = 8 \frac{d\sqrt{x^2+1}}{dr}$$

und damit

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\sqrt{x^2+1}}{dr}\right) = -\frac{\pi G B^2}{2A}x^3\,.$$

Diese Gleichung kann man durch Einführung einer neuen Variablen $y^2 \equiv x^2+1$ umformen in

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dy}{dr}\right) = -\frac{\pi G B^2}{2A}(y^2-1)^{3/2}$$

Sei $x_0 \equiv x(r=0)$, d.h. $y_0^2 = x_0^2+1$ und definitiert man einen dimensionslosen Radius gemäß

$$r \equiv \alpha\lambda \qquad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{2A}{\pi G}}\frac{1}{By_0}\,[\text{cm}]\,, \tag{2.53}$$

sowie ein „Potential“ Φ gemäß

$$y \equiv y_0\Phi\,, \tag{2.54}$$

so erhält man

$$\boxed{\frac{1}{\lambda^2}\frac{d}{d\lambda}\left(\lambda^2\frac{d\Phi}{d\lambda}\right) = -\left(\Phi^2 - \frac{1}{y_0^2}\right)^{3/2}} \tag{2.55}$$

mit den zentralen Randbedingungen $\Phi(\lambda=0)=1$ (folgt aus 2.54) und $(d\Phi/d\lambda)_{\lambda=0} = 0$, sowie der zusätzlichen Randbedingung $\Phi(\lambda_1) = 1/y_0$, die wegen des Verschwindens der Dichte an der Oberfläche des Weißen Zwergs erfüllt sein muss.

- Die Masse einer Gaskugel vom Radius λ ist durch

$$M(\lambda) = 4\pi\int_0^\lambda \rho r^2 dr$$

gegeben. Aus der obigen Zustandsgleichung folgt unter Verwendung der Poisson-Gleichung (2.55) damit für die Masse eines Weißen Zwergs

$$\boxed{M(\lambda_1) = 4\pi\left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{3/2}\frac{1}{B^2}\left(-\lambda^2\frac{d\Phi}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_1}} \tag{2.56}$$

- Die Differentialgleichung (2.55) impliziert, dass wenn $y_0 \to \infty$ die Funktion Φ gegen die Lane–Emden–Funktion Θ_n mit $n = 3$ strebt. Außerdem folgt $\alpha \to 0$ und damit $R \to 0$, d.h. der Radius des Sterns strebt gegen Null.

  Andererseits strebt die Masse des Weißen Zwergs gegen einen endlichen Grenzwert

  $$\lim_{x_0 \to \infty} M = 4\pi \left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{3/2} \frac{1}{B^2} \left(-\lambda^2 \frac{d\Theta_3}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_1(\Theta_3)}$$

  wobei $\lambda_1(\Theta_3)$ die Nullstelle der Lane–Emden–Funktion Θ_3 vom Index $n = 3$ ist.

- Für $x_0 \to \infty$ und damit $y_0 = \sqrt{x_0^2 + 1} \to \infty$ (d.h. die Elektronen im ganzen WD sind relativistisch entartet) nähert sich die Zustandsgleichung der eines extrem relativistischen Elektronengas an. d.h. $f(x) \to 2x^4$ und

  $$P_e = 2Ax^4 \quad \text{und} \quad \rho = Bx^3$$

  oder

  $$P = K_{Ch} \rho^{4/3} \tag{2.57}$$

  mit

  $$K_{Ch} = \frac{2A}{B^{4/3}} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8m_B^{4/3}} Y_e^{4/3} = 1.231\, 10^{15}\, Y_e^{4/3}\, [\text{cgs}] \tag{2.58}$$

  wobei K_{Ch} die Polytropenkonstante eines extrem relativistischen, vollständig entarteten Elektronengas ist.

  Die **Chandrasekhar Grenzmasse** ist die Masse einer $n = 3$ Polytrope mit $K_3 Y_e^{4/3} = K_{Ch}$ und hat den Wert

  $$\boxed{M_{Ch} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{4\pi m_B^2} \left(\frac{hc}{G}\right)^{3/2} Y_e^2 \left(-\lambda^2 \frac{d\Theta_3}{d\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_1(\Theta_3)} = 5.76\, Y_e^2\, M_\odot} \tag{2.59}$$

  Sie ist die größte Masse, die ein Stern haben kann, der durch den Druck eines entarteten Elektronengases gestützt wird.

  Für symmetrische Materie (bestehend, z.B. aus ^{4}He, ^{12}C oder ^{16}O) ist $Y_e = 0.5$, d.h. $M_{Ch} = 1.44\, M_\odot$.

2.6 Entstehung und Entwicklung Weißer Zwerge

2.6.1 Grundlagen des Sternaufbaus und der Sternentwicklung

- Ein Stern entsteht aus interstellarem Gas durch den Kollaps lokaler Verdichtungen (mit $M > M_{Jeans}$) und anschließender Fragmentation
- Treibende Kraft der Sternentwicklung ist die **Gravitation**
- Sterne verlieren Energie durch Abstrahlung ($\gamma' s, \nu' s$). Die abgestrahlte Energie wird
  - entweder durch Kernfusionsprozesse ersetzt (hydrostatische Brennphase)
  - oder durch Gravitationsbindungsenergie (Stern kontrahiert, verdichtet und erhitzt (!) sich).

Einschub: Virialsatz

Statistische Aussage über ein System wechselwirkender Teilchen (siehe z.B. Chandrasekhar S. 49ff). Zur Ableitung des Virialsatzes geht man von der Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts aus:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho$$

bzw.

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \quad \text{mit} \quad dM_r = 4\pi r^2 \rho dr$$

Integration über den Stern liefert

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{dP}{dM_r} dM_r = -\int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r$$

bzw. nach partieller Integration

$$4\pi r^3 P\big|_0^M - \int_0^M 12\pi r^2 \frac{dr}{dM_r} P dM_r = E_G$$

wobei E_G die Gravitationsbindungsenergie ist. Da der Druck an der Sternoberfläche verschwindet, ist der erste Term auf der linken Seite der obigen Gleichung gleich Null. Damit folgt der Virialsatz

$$\boxed{E_G = -3\int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r} \tag{2.60}$$

– Betrachtet man ein ideales Gas mit $P/\rho = \mathcal{R}T/\mu = 2/3 c_V T$, so folgt aus dem Virialsatz

$$\boxed{E_G = -3 \int_0^M \frac{2}{3} c_V T dM_r = -2E_T} \tag{2.61}$$

wobei E_T die thermische Energie und c_V die spezifische Wärme (bei konstantem Volumen) des Gases sind.

Kontrahiert ein Stern, so erhöht sich der Betrag seiner (negativen) Gravitationsbindungsenergie $|E_G|$ und seine Dichte nimmt zu. Die bei der Kontraktion freigesetzte Gravitationsbindungsenergie $-\delta E_G > 0$ wird zur Hälfte abgestrahlt $E_{rad} = -\delta E_G/2$. Die andere Hälfte erhöht die thermische Energie des Sterns ($\delta E_T = -\delta E_G/2 > 0$), d.h. der Stern wird heisser.

Ein Stern kann nicht abkühlen! Solange sich die Sternmaterie durch ein ideales Gas beschreiben läßt, führt die durch die Gravitation angetriebene Entwicklung eines Sterns zu immer höheren Dichten und Temperaturen.

- Coulomb–Abstoßung zwischen Atomkernen ($\sim Z_1, Z_2$) bewirkt Hierarchie der verschiedenen nuklearen Brennphasen in T

  – Nukleare Brennphasen sind zeitlich und räumlich getrennt. Sie führen zu einer Zwiebelschalenstruktur des Sterns in späten Entwicklungsphasen.

  – Die thermonukleare „Asche“ einer Brennphase wird zum „Brennstoff“ für die sich anschließende Brennphase.

  – Ob eine weitere Brennphase stattfindet, hängt von der erreichbaren Maximaltemperatur und daher von der Sternmasse ab.

  Die Anzahl der thermonuklearen Brennphasen ist durch die Masse des Sterns bestimmt.

  – Für $M \gtrsim 8 - 10 M_\odot$ werden alle kernphysikalisch möglichen thermonuklearen Brennphasen durchlaufen.

Brennphase	Brennstoff	Zünd–temperatur $[10^9\,\mathrm{K}]$	„Asche“	Energie-erzeugung $[10^{18}\,\mathrm{erg/g}]$	Kühlung durch
H–Brennen	^{1}H	0.02	^{4}He, ^{14}N	[Sonne: 6.3] $5 \sim 8$	γ
He–Brennen	^{4}He	0.2	^{12}C, ^{16}O, ^{22}Ne	0.7	γ
C–Brennen	^{12}C	0.8	^{20}Ne, ^{24}Mg, ^{16}O, ^{23}Na	0.5	ν
Ne–Brennen	^{20}Ne	1.5	^{16}O, ^{24}Mg, ^{28}Si, ...	0.1	ν
O–Brennen	^{16}O	2	^{28}Si, ^{32}S	0.5	ν
Si–Brennen	^{28}Si	3.5	^{56}Ni, $A \approx 56$	$0.1 - 0.3$	ν
	^{56}Ni	$6 \sim 10$	n, ^{4}He, p	-8	ν

- Kontraktion (des Zentrums des Sterns) führt zur Erhöhung der Entartung und zur Erhöhung der Zentraltemperatur, solange das Gas nicht stark entartet ist. Die möglichen Endstadien der Sternentwicklung sind WD, NS oder BH.

  – Aus Sternentwicklungsrechnungen ergibt sich, dass die Kontraktion in guter Näherung selbstähnlich verläuft. Für Polytrope mit festem n gilt dies exakt [siehe Kippenhahn & Weigert, S. 191ff]

  Eine Entwicklung heißt selbstähnlich oder homolog, wenn

  $$\boxed{\frac{\tilde{r}}{r} = \frac{\tilde{R}}{R} = f = \text{const.}} \tag{2.62}$$

  gilt, wobei r und R zwei beliebige radiale Positionen im Stern vor der Kontraktion sind, und $\tilde{r}$ und $\tilde{R}$ die entsprechenden Koordinaten nach der Kontraktion sind.

  – Folgerung für den Sternaufbau: Im Fall einer homologen Entwicklung (2.62) gilt [siehe Kippenhahn & Weigert, S. 191ff]

  $$\frac{d\rho}{\rho} = -3\frac{dr}{r} \tag{2.63}$$

und

$$\frac{dP}{p} = -4\frac{dr}{r}\,. \tag{2.64}$$

Parametrisiert man die Zustandsgleichung durch den Ansatz (das mittlere Molekulargewicht μ ist dabei konstant angenommen)

$$\rho \propto P^{\alpha}\, T^{-\delta}$$

so folgt

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha\frac{dP}{p} - \delta\frac{dT}{T}\,. \tag{2.65}$$

Kombiniert man die Beziehungen (2.63), (2.64) und (2.65), so erhält man

$$\boxed{\frac{d\ln T}{d\ln \rho} = \frac{4\alpha - 3}{3\delta}} \tag{2.66}$$

Für ein ideales Gas gilt $\alpha = 1$ und $\delta = 1$, d.h. $d\ln T/d\ln\rho = 1/3$, während im Falle eines entarteten Elektronengas $\alpha \in [3/5, 3/4]$, $\delta \approx 0$ und $d\ln T/d\ln\rho < 0$ sind.

Mit Hilfe der Relation (2.66) läßt sich die Entwicklung eines Sterns in der T–ρ–Ebene anschaulich verstehen (siehe Abb. 2.4).

- Die **Zündkurven** sind durch die relevanten thermonuklearen bzw. pyknonuklearen Reaktionsraten bestimmt.

  – In thermonuklearen Reaktionen ist die kinetische Energie der Reaktanten durch die Wärmebewegung der Atomkerne gegeben

  $$\langle E_{kin}\rangle = \frac{3}{2}kT\,,$$

  d.h. es existiert eine Schwellentemperatur für jede Brennphase.

  – In pyknonuklearen Reaktionen ist die kinetische Energie der Reaktanten durch die Nullpunktsenergie der Ionen gegeben

  $$E_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/2}\frac{\hbar e}{Am_u}\rho^{1/2}\,,$$

  d.h. es existiert eine Schwellendichte ρ_{pyk} für jede Reaktion.

Der Übergang zwischen beiden Brennmoden (als Funktion von ρ und T) ist kontinuierlich.

Für $\rho > \rho_{pyk}$ setzten die Kernreaktionen sehr schnell ein. Typische Werte ($\tau_{pyk} \simeq 10^5$ a) sind:

$\rho_{pyk}(^1\mathrm{H} \rightarrow {}^4\mathrm{He}) \approx 10^6\,[\mathrm{g/cm^3}]$,

$\rho_{pyk}(^4\mathrm{He} \rightarrow {}^{12}\mathrm{C}) \approx 10^9\,[\mathrm{g/cm^3}]$

$\rho_{pyk}(^{12}\mathrm{C} \rightarrow {}^{24}\mathrm{Mg}) \approx 10^{10}\,[\mathrm{g/cm^3}]$

(siehe Salpeter & von Horn 1969, ApJ **155**, 183; Kippenhahn & Weigert, S. 370; Shapiro & Teukolsky S. 72ff).

Umfangreiche Sternentwicklungsrechnungen ergeben das folgende Bild (siehe auch Abb. 2.5):

- Kein H–Brennen, wenn $M_H \lesssim 0.08 M_\odot$. Sterne entarten bereits bei der Kontraktion zur Hauptreihe.

- Kein He–Brennen, wenn $M_{He} \lesssim 0.35 M_\odot$. Entartung tritt nach dem H–Brennen auf falls $M \lesssim 0.5 M_\odot$. Im Massenbereich $0.5 \lesssim M/M_\odot \lesssim 2.5$ durchläuft ein Stern das He–Brennen in Form eines He–Blitzes.

- Kein C–Brennen, wenn $M_C \lesssim 0.9 M_\odot$. Entartung tritt nach dem He–Brennen auf ($M \lesssim 8 - 10 M_\odot$).

Wie wir bereits früher gesehen haben gilt für die mittlere Masse von Weißen Zwergen $\langle M_{WD} \rangle \simeq (0.6 \pm 0.1) M_\odot$. Die nukleare Entwicklungszeit von Sternen mit einer solchen Masse ist größer als das Alter des Universums. Da man aber WD auch in jungen Sternhaufen findet, müssen ihre Vorläufersterne massereicher gewesen sein, da diese eine kürzere Entwicklungszeit haben. Weiterhin müssen die massereicheren Vorläufersterne von WD während ihrer Entwicklung einen beträchtlichen **Massenverlust** erfahren haben.

Die Beziehung zwischen der Anfangsmasse M_i und der Endmasse $M_f(M_i)$ läßt sich aus Beobachtungen junger (offener) Sternhaufen gewinnen. Man findet

$$\boxed{M_{crit} = \max_i \{M_i\} = M_i\,(M_f \leq M_{Ch}) = (8 \pm 2) M_\odot}$$

2.6.2 Entwicklung von Weißen Zwergen

- Unter der Annahme $M = const.$ folgt aus der Masse–Radius–Beziehung $R(t) = const.$ bzw. $\dot{R} = 0$. Damit gilt für die zeitliche Änderung der Gravitationsbindungsenergie

$$\dot{E}_G = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^M \frac{G M_r}{r} dM_r \right) = 0\,,$$

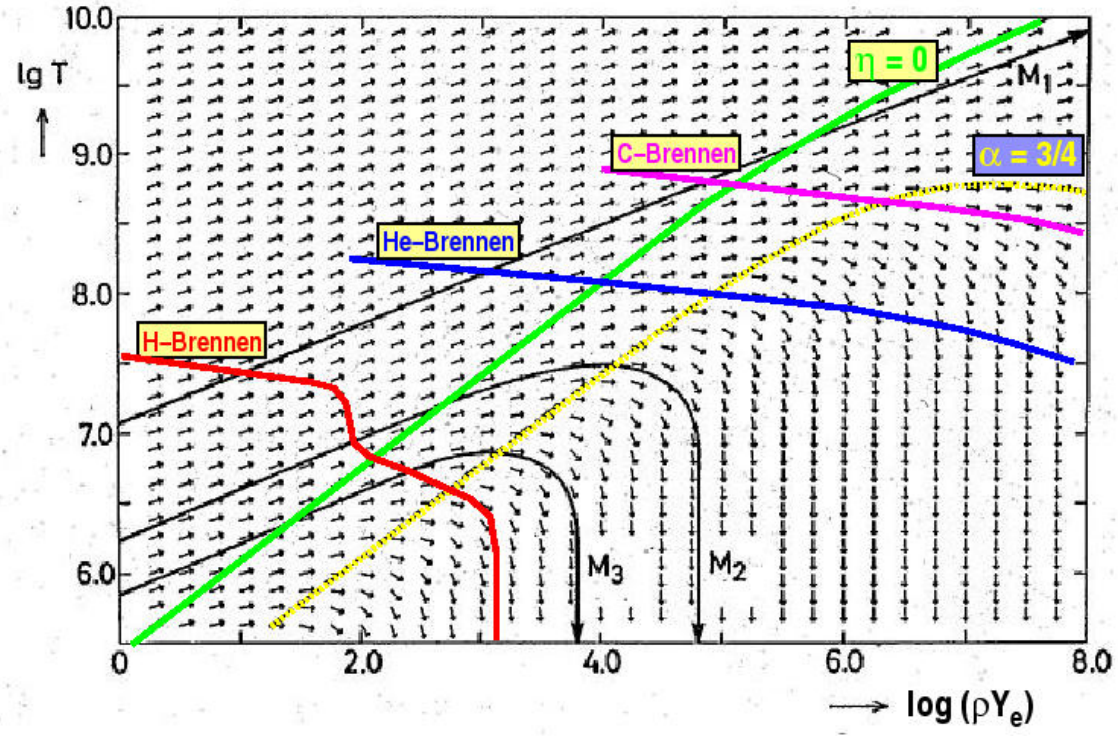


Abbildung 2.4: Entwicklungspfade der Zentren dreier Sterne (schwarze Linien) der Massen M_1, M_2 und M_3 in der Temperatur–Dichte–Ebene. Das Vektorfeld zeigt die Richtung an, in die sich ein homolog kontrahierender Stern entwickeln würde. Im linken, oberen Teil der Figur ist die Zusandsgleichung die eines idealen Gas, d.h. die Pfeile haben den Anstieg 1/3. Die grüne Linie ist durch $\eta = 0$ definiert. Unterhalb dieser Linie muss die Entartung der Elektronen berücksichtigt werden. Auf der gelben Linie gilt $\alpha = 3/4$ und damit $d \ln T / d \ln \rho = 0$, d.h. auf der Linie sind die Pfeile horizontal und unterhalb der Linie zeigen sie nach unten. Oberhalb der roten, blauen bzw. rosa Linie findet H–Brennen, He–Brennen, bzw. C–Brennen statt. Die Entwicklung des Sterns mit der Masse M_1 wird kaum durch Entartungseffekte beeinflusst; sein Zentrum heizt sich während der Kontraktion kontinuierlich auf. Im Zentrum des Sterns der Masse $M_2 (< M_1)$ tritt Entartung auf; die homologe Kontraktion kann die Temperatur maximal auf einige 10^7 K erhöhen. Im Falle des Sterns der Mass $M_3 (< M_2)$ ist die maximal erreichbare Zentraltemperatur noch geringer. Für M_2 und M_3 wird die Zündtemperatur für die Heliumfusion nicht erreicht.

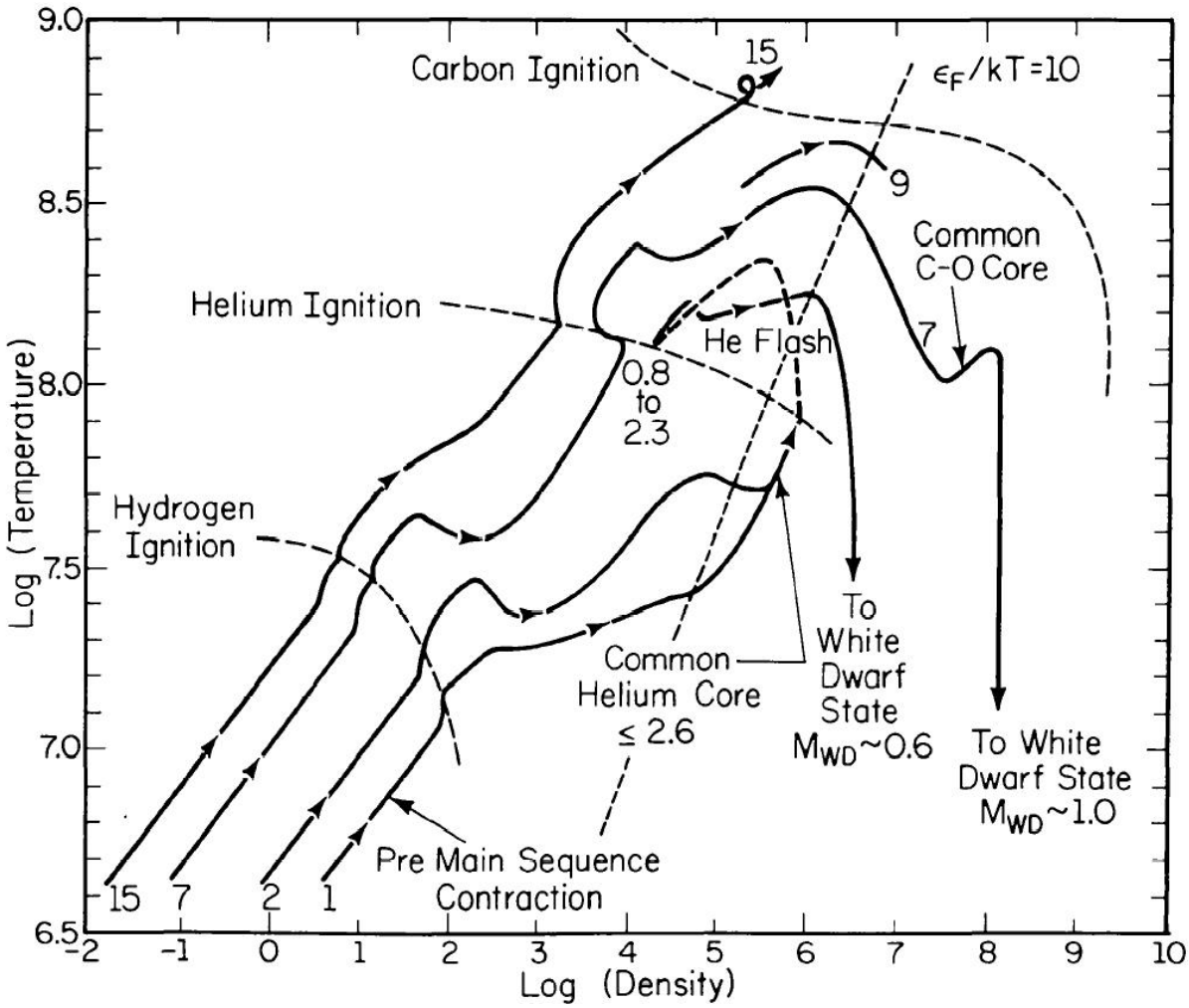


Abbildung 2.5: Entwicklung der Zentraltemperatur und Zentraldichte in der Dichte–Temperatur–Ebene von Sternen unterschiedlicher Masse (Werte in Einheiten von Sonnenmassen). Die gestrichelten Linien sind die Zündkurven für H-, He- und C–Brennen. Die gestrichelte Gerade markiert (bei nicht allzu hohen Temperaturen) die ungefähre Grenze zwischen nicht–entartetem und entartetem Elektronengas [Iben, 1991, ApJ Suppl **76**, 55].

d.h. es wird keine Gravitationsbindungsenergie frei. Nimmt man weiterhin an, dass $\dot{E}_{nuklear} = 0$, d.h. dass keine thermonukleare Energieerzeugung stattfindet, so folgt für die Leuchtkraft L des WD

$$L = -\dot{E}_T \,,$$

d.h. er bezieht seine Leuchtkraft vollständig aus seinem thermischen Energiereservoir.

Daher gilt: **Die Entwicklung von WD besteht aus Abkühlung!**

- Die Abkühlzeit ergibt sich aus

$$\tau = -\frac{E_T}{\dot{E}_T} = \frac{E_T}{L} \,.$$

Mit

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

folgt

$$\log L = 4 \log T_{eff} + 2 \log[R(M)] + const. \,,$$

d.h. für eine gegebene Masse gilt:

$$\boxed{\log L = 4 \log T_{eff} + const.}$$

Beobachtungen liefern als typische Werte

$$\begin{array}{ll} L & = 10^{-2} \ldots 10^{-3} L_\odot \\ R & \simeq 10^{-2} R_\odot \\ T_{eff} & \simeq (1 \ldots 2)\, 10^4 \,\mathrm{K} \end{array}$$

- Eine Abschätzung der Abkühlzeit von WD ergibt

$$\boxed{\tau \approx \frac{3}{5} \frac{k T_0}{\mu m_B L_\odot} \left(\frac{M/M_\odot}{L/L_\odot} \right)^{5/7}}$$

wobei $T_0 = T(r_0)$ mit $r_0 = r(\eta = 0)$ die Temperatur am Rande des entarteten Teils des (praktisch isothermen) WD ist. Für $T_0 \approx 3\, 10^7$ K und $\mu = 14$ (C+O) erhält man

$$t = 1.7\, 10^6 \left(\frac{M/M_\odot}{L/L_\odot} \right)^{5/7} \,[\text{Jahre}] \,.$$

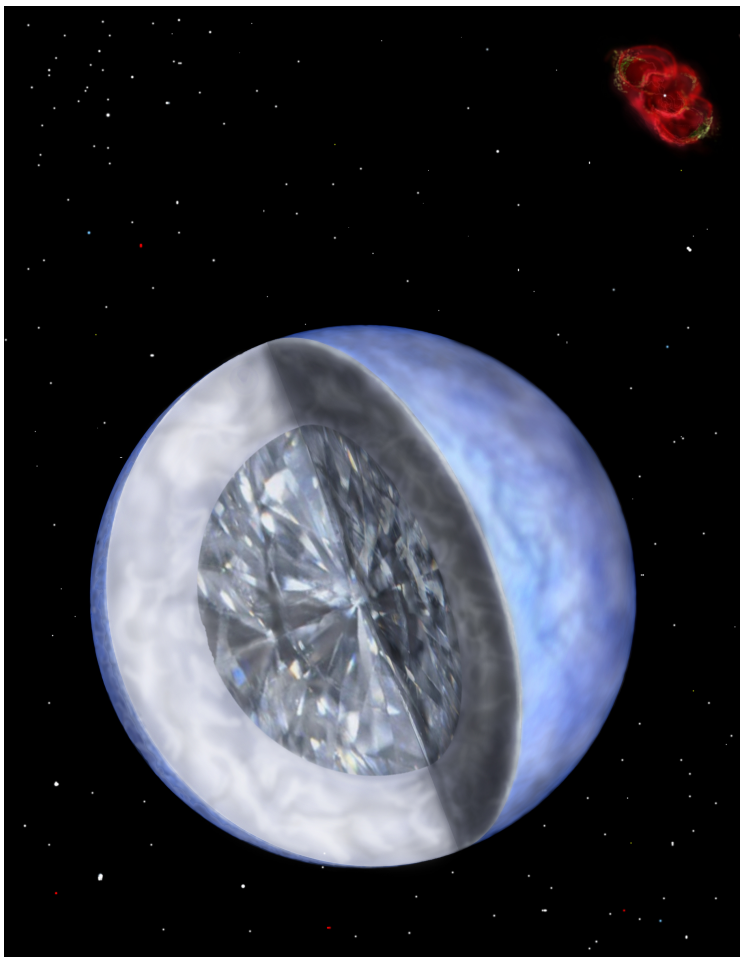


Abbildung 2.6: Künstlerische Darstellung eines teilweise bereits auskristallisierten Weißen Zwerges. Wenn ein Weißer Zwerg auskühlt, beginnt er in seinem Inneren, wo die größten Dichten vorherrschen, auszukristallisieren. Da viele Weiße Zwerge im Inneren aus Kohlenstoff (und Sauerstoff) bestehen, hat man es also mit unvorstellbar dichten „Diamanten“ zu tun. [Bildquelle: http://www.cfa.harvard.edu/news/archive/pr0407image.html] Langfristig ($t > 10^{1000}$ Jahre) wird sich der Weiße Zwerg aufgrund der quantenmechanischen Nullpunktsbewegung der Atomkerne in eine (rostfreie, da kein Sauerstoff mehr vorhanden) Eisenkugel verwandeln, da Eisenatomkerne die maximale Bindungsenergie aller Atomkerne besitzen.

- zusätzliche Energiequellen und Senken für WD:
  - **Neutrinoverluste** sind in WD mit $L \gtrsim 0.1 L_\odot$ die dominierende Energiesenke (Plasmon–Neutrino–Prozess)
  - **Latente Wärme**, die bei der Kristallisation der Ionen (Phasenübergang 1. Art) frei wird
  - **Gravitationsbindungsenergie**, die durch die Entmischung des WD (nach teilweiser Kristallisation) frei wird

- Inverser β–Zerfall

  Betrachten wir ein Nuklid (A, Z) mit A Nukleonen, Z Protonen, $N = A - Z$ Neutronen, Kernmasse $M_K(A, Z)$ und Atommasse $M_A(A, Z) = M_K(A, Z) + Z m_e$

  - β–**Zerfall**

    $$(A, Z-1) \to (A, Z) + e^- + \bar{\nu}_e$$

    findet spontan statt, wenn $M_K(A, Z-1) > M_K(A, Z) + m_e$, bzw. $M_A(A, Z-1) > M_A(A, Z)$ ist.
  - **Inverser** β–**Zerfall** (Elektroneneinfang)

    $$e^- + (A, Z) \to (A, Z-1) + \nu_e$$

    ist möglich, wenn die Dichte (und damit auch die Entartung) der Elektronen so groß ist, dass ihre Fermi–Energie die Bedingung

    $$\boxed{E_F = m_e c^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} > M_A(A, Z-1) - M_A(A, Z)}$$

    erfüllt, d.h. die Reaktion $e^- + (A, Z) \to (A, Z-1) + \nu_e$ exotherm ist.
  - Relevante Nuklide, die in WD inversen β–Zerfall erleiden, sind gg–Kerne (^{4}He, ^{12}C, ^{16}O, ^{20}Ne, ^{24}Mg und ^{56}Fe; besonders stark gebunden) für die

    $$M_A(A, Z-1) - M_A(A, Z) > M_A(A, Z-2) - M_A(A, Z-1)\,.$$

    Wenn $E_F > M_A(A, Z-1) - M_A(A, Z)$ folgt daraus $E_F > M_A(A, Z-2) - M_A(A, Z-1)$, d.h. es kann ein **doppelter** inverser β–Zerfall $(A, Z) \to (A, Z-2)$ stattfinden.

– Für jeden Kern (A, Z) existiert eine Schwellendichte ρ_β oberhalb derer inverser β–Zerfall stattfinden kann.

Reaktionen	$E_F(MeV)$	$\rho_\beta[\mathrm{g/cm^3}]$
^{4}He$\rightarrow^3$H+n$\rightarrow$ 4n	20.6	$1.4\,10^{11}$
^{12}C$\rightarrow^{12}$B$\rightarrow^{12}$Be	13.4	$3.9\,10^{10}$
^{16}O$\rightarrow^{16}$N$\rightarrow^{16}$C	10.4	$1.9\,10^{10}$
^{24}Mg$\rightarrow^{24}$Na$\rightarrow^{24}$Ne	5.5	$3.2\,10^{9}$
^{56}Fe$\rightarrow^{56}$Mn$\rightarrow^{56}$Cr	3.7	$1.1\,10^{9}$

– Inverser β–Zerfall ist von entscheidender Bedeutung für die Entstehung von Neutronensternen und die Hochdichte–Zustandgleichung (siehe Kap. 4).

Kapitel 3

Allgemeine Relativitätstheorie (AR)

3.1 Tensorkalkül

Literatur:
R. d'Inverno, *Einführung in die Relativitätstheorie*, Wiley;
E.Klingbeil, *Tensorrechnung für Ingenieure*, BI.

- Einsteinsche Summenkonvention

  Über doppelt auftretende Indizes wird summiert, z.B.

$$\boxed{\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b \equiv \sum_{b=1}^{N} \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b} \tag{3.1}$$

- Koordinatentransformationen

  Ein Koordinatentransformation $x^a \to x'^a$ ist gegeben durch die N Gleichungen

$$x'^a = f^a(x^1, x^2, \ldots, x^N) \quad \text{mit} \quad a = 1, 2, \ldots, N$$

  wobei f^a stetig differenzierbare Funktionen sind. Oft verwendet man die kompaktere Schreibweise

$$x'^a = f^a(x) \quad \text{oder} \quad x'^a = x'^a(x)\,. \tag{3.2}$$

  – Differentiation von (3.2) nach jeder Koordinate x^b ergibt die $N \times N$ Transformationsmatrix (Jacobi–Matrix)

$$\frac{\partial x'^a}{\partial x^b} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'^N}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial x'^N}{\partial x^N} \end{bmatrix}$$

mit der **Determinante**

$$J' \equiv \left| \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} \right|$$

– Falls $J' \neq 0$ in einem gewissen Koordinatenwertebereich, dann existiert die **inverse Transformation** $x^a = x^a(x')$ mit

$$J \equiv \left| \frac{\partial x^a}{\partial x'^b} \right| = \frac{1}{J'}$$

- Mannigfaltigkeit

  – Zur Beschreibung **nicht-euklidischer Geometrien** muss man den Raumbegriff verallgemeineren. Riemann definierte einen solchen verallgemeinerten Raum und nannte ihn **Mannigfaltigkeit**. Der Euklidische Raum ist ein Spezialfall einer solchen Mannigfaltigkeit.

  – **Definition:** Jedes System von n Werten, das den n Veränderlichen $\Theta^1, \Theta^2, \ldots, \Theta^n$ erteilt wird, heißt Punkt oder Element einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M_n. Die n Zahlen $\Theta^1, \Theta^2, \ldots, \Theta^n$ sind die Koordinaten des Punktes. Die Menge M_n aller dieser Punkte, die noch bestimmte Axiome (die Axiome des Hausdorffschen Raumes) erfüllen muss, ist die Mannigfaltigkeit.

  – Beispiel 1: Betrachten wir die Gesamtheit aller Ellipsen mit verschiedenen Halbachsen a und b. Eine beliebige Ellipse wird durch die Zahlen a und b festgelegt. Die Gesamtheit der Ellipsen ist also eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten $\Theta^1 = a$ und $\Theta^2 = b$.

  – Beispiel 2: Der zweidimensionale Riemannsche (oder Euklidische) Raum ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, denn jeder Punkt auf der Fläche (oder Ebene) wird gegeben durch seine Gaussschen Flächenparameter Θ^1 und Θ^2, die zugleich die Koordinaten der Mannigfaltigkeit sind.

  – In einer Mannigfaltigkeit selbst kann man keine Vektoren definieren. Man kann aber jedem Punkt einer Mannigfaltigkeit einen **Satz von Basisvektoren** zuordnen, die tangential zu den Koordinatenlinien sind und in Richtung zunehmender Koordinatenwerte zeigen. Diese affine (tangentiale) Basis spannt einen flachen Raum auf, den **affinen Tangentialraum**, der dieselbe Dimension wie die Mannigfaltigkeit hat. Besitzt die Mannigfaltigkeit ein **Metrik** (siehe unten) lässt sich ein **Skalarprodukt** definieren und man kann jedem Punkt der Mannigfaltigkeit, die man dann auch **Riemannschen Raum** nennt, einen Euklidschen Tangentialraum „anheften“. [1]

[1] Man beachte, dass dieses Konzept die Existenz eines flachen Einbettungsraums voraussetzt. Da aber ein Riemannscher Raum der Dimension D nicht immer in einen Euklidschen Raum der Dimension $D+1$ eingebettet werden kann, betrachtet man die Kurven $x^\alpha(p)$ durch einen Punkt P des Riemannschen Raums (p ist ein Kurvenparameter) und konstruiert die Vektoren $A^\sigma = (dx^\sigma/dp)_P$, die den (abstrakten) Tangentialraum von P aufspannen, der unabhängig von irgendeiner Einbettung existiert.

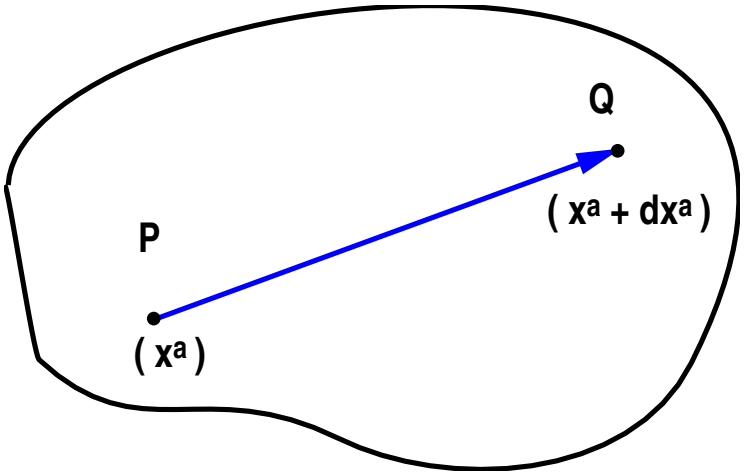


Abbildung 3.1:

- Kontravariante Tensoren (Indizes oben)
  - Gegeben seien zwei benachbarte Punkte P und Q in einer Mannigfaltigkeit mit Koordinaten x^a und $x^a + dx^a$ (Abb. 3.1). Die 2 Punkte definieren eine **infinitesimale Verschiebung** oder einen **infinitesimalen Vektor** $\overrightarrow{PQ}$ (der dem Punkt P zugeordnet ist) mit den Komponenten dx^a
  - In einem anderen Koordinatensystem x'^a sind die Komponenten von $\overrightarrow{PQ}$ durch die lineare, homogene Transformation

    $$dx'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} dx^b \tag{3.3}$$

    gegeben, wobei $\partial x'^a / \partial x^b$ die Transformationsmatrix am Punkt P ist.
  - Ein **kontravarianter Vektor** oder **kontravarianter Tensor vom Rang (Ordnung) 1** ist ein Satz von Größen (X^a im Koordinatensystem x^a), die einem Punkt P zugeordnet sind und die sich bei einer Koordinatentransformation wie folgt transformieren

    $$\boxed{X'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} X^b} \tag{3.4}$$

    Ein Beispiel eines kontravarianten Vektors ist der Tangentenvektor dx^a/du einer Kurve $x^a = x^a(u)$ (Abb. 3.2).
  - Für das Transformationsverhalten eines **kontravarianten Tensors vom Rang 2** gilt

    $$\boxed{X'^{ab} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} X^{cd}}$$

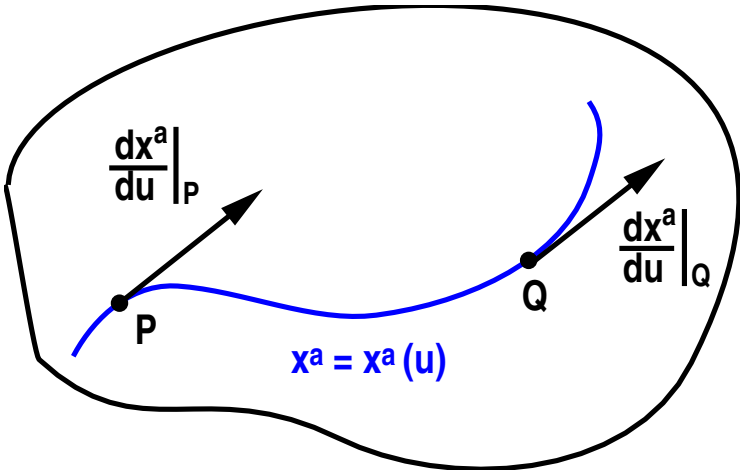


Abbildung 3.2:

Entsprechend lassen sich kontravariante Tensoren höheren Rangs definieren.

- Wichtiger Spezialfall: Für einen Tensor vom Rang 0, d.h. einen **Skalar** gilt: $\Phi' = \Phi$ (invariant)

- Kovariante Tensoren (Indizes unten)

  - Gegeben sei eine stetig differenzierbare reelle Funktion

    $$\Phi = \Phi(x^a)$$

    auf einer Mannigfaltigkeit.

  - Mit $x^a = x^a(x')$ gilt dann $\Phi = \Phi(x^a(x'))$ und daraus folgt

    $$\frac{\partial \Phi}{\partial x'^b} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^a}\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}$$

    oder (Terme vertauschen; Indizes umbenennen)

    $$\frac{\partial \Phi}{\partial x'^a} = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a}\frac{\partial \Phi}{\partial x^b}$$

    Die ist die Transformation der Komponenten des Normalenvektors der Hyperfläche $\Phi = const.$

  - **Wichtig:** Transformation erfolgt mit **inverser** Transformationsmatrix wie im Falle von kontravarianten Vektoren (3.4).

  - Ein **kovarianter Vektor** oder **kovarianter Tensor vom Rang 1** ist ein Satz von Größen (X_a im Koordinatensystem x^a), die einem Punkt P zugeordnet sind und die sich bei einer Koordinatentransformation wie folgt transformieren

$$\boxed{X'_a = \frac{\partial x^b}{\partial x'^a} X_b} \tag{3.5}$$

    Entsprechende Definitionen gelten für kovariante Tensoren höheren Rangs.
  - **Wichtig:** Da sich die **Differentiale** dx^a wie ein kontravarianter Tensor transformieren (3.3), schreibt man konventionell die **Koordinaten** als x^a (anstatt x_a), obwohl sie **keinen** tensoriellen Charakter besitzen.

- Gemischte Tensoren (Indizes oben und unten)

  z.B.

$$X'^a{}_{bc} = \frac{\partial x'^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial x'^b} \frac{\partial x^f}{\partial x'^c} X^d{}_{ef}$$

- Metrik

  - Jeder symmetrische kovariante Tensor vom Rang 2 definiert eine **Metrik**.
  - Eine Mannigfaltigkeit mit einer Metrik heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.
  - Eine Metrik erlaubt die Definition von Entfernungen und der Länge von Vektoren.
  - Metrik bestimmt **lokale** Struktur der Mannigfaltigkeit, macht aber keine Aussage über ihre globale (topologische) Struktur. [2]
  - Der infinitesimale Abstand ds (Intervall) zweier Punkte x^a und $x^a + dx^a$ ist definiert durch

$$\boxed{ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b} \tag{3.6}$$

  - Die **Länge** oder **Norm** X eines kontravarianten Vektors X^a ist durch den Ausdruck:

$$\boxed{X^2 = g_{ab}(x) X^a X^b} \tag{3.7}$$

    gegeben.

[2] Eine Ebene, ein Kegel und ein Zylinder habe alle dieselbe Metrik $ds^2 = dx^2 + dy^2$, aber eine unterschiedliche globale Struktur

- Eine Metrik heißt $\left\{ \begin{array}{c} \text{positiv definit} \\ \text{negativ definit} \\ \text{indefinit} \end{array} \right\}$ falls für $\forall X$ $\left\{ \begin{array}{c} X^2 > 0 \\ X^2 < 0 \\ \text{sonst} \end{array} \right\}$
- **Die Metrik der AR ist indefinit**.
- Der **Winkel** zwischen zwei kontravarianten Vektoren X^a und Y^a ist durch

$$\cos(X,Y) = \frac{g_{ab}X^aY^b}{\sqrt{|g_{cd}X^cX^d|\,|g_{ef}Y^eY^f|}}$$

  gegeben.
- Zwei kontravariante Vektoren X^a and Y^a sind **orthogonal** zueinander, falls

$$\boxed{g_{ab}X^aY^b = 0} \tag{3.8}$$

  gilt.
- Falls die Metrik indefinit ist (wie in der AR), existieren **Nullvektoren**, die zu sich **selbst orthogonal** sind

$$g_{ab}X^aX^b = 0\,.$$

- Die Determinante der Metrik g_{ab} bezeichnet man üblicherweise mit g, d.h.

$$g \equiv \det(g_{ab})\,.$$

- Eine Metrik ist **nicht singulär**, falls $g \neq 0$. In diesem Fall existiert die **inverse Metrik** g^{ab} (kontravarianter Tensor vom Rang 2), die durch

$$g_{ab}g^{bc} = \delta^c{}_a$$

  gegeben ist, wobei $\delta^c_a = 1$, falls $c = a$, und $\delta^c_a = 0$ falls $c \neq a$.
- Mit Hilfe des Metriktensors können die Indizes von Tensoren **gesenkt** und **gehoben** werden; z.B.

$$T^c{}_a = g_{ab}T^{cb} \quad \text{oder} \quad T^b{}_c = g^{ab}T_{ac}\,.$$

- Der Metriktensor kann auch zur **Verjüngung** von Tensoren (Reduktion des Rangs um 2) verwendet werden; z.B.

$$g_{ab}T^{abcd} = T^{cd}$$

- Ergänzung: Tangentialraum
  - Wie bereits früher ausgeführt, definiert jeder symmetrische kovariante Tensor vom Rang 2 eine Metrik, aber es gibt eine bevorzugte Metrik. Dazu betrachten wir ein infinitesimal kleines Gebiet in einem Riemann Raum. Diese Gebiet ist praktisch flach und identisch zum Tangentialraum.

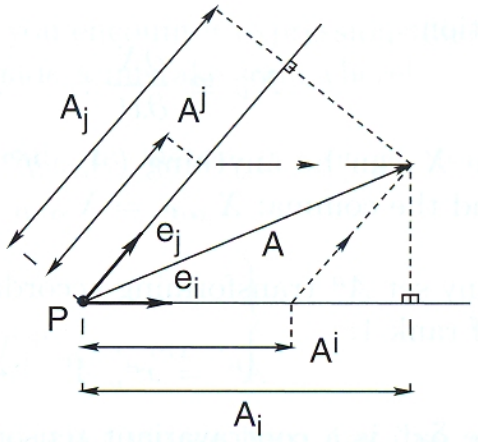


Abbildung 3.3:

– Einem infinitesimalen Vektor $d\mathbf{s} = dx^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ im Tangentialraum kann man daher die Länge des Linienelements ds im Riemannschen Raum zuordnen, d.h. wir fordern

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s} &= ds^2 && (3.9)\\ &= (dx^\alpha \mathbf{e}_\alpha) \cdot (dx^\beta \mathbf{e}_\beta) = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \; dx^\alpha dx^\beta && (3.10)\\ &= g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta && (3.11) \end{aligned}$$

Daher folgt

$$g_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta \,,$$

wobei $\mathbf{e}_\alpha$ die **Basisvektoren im Tangentialraum** sind und "$\cdot$" das innere Vektorprodukt (Skalarprodukt) repräsentiert.

– Die Basisvektoren bilden eine **Koordinatenbasis**, da sie ausschliesslich durch die Koordinaten und die Metrik definiert sind Die Länge der Basisvektoren hängt von der Koordinatenwahl ab und ist i.A. ortsabhängig. In ebenen Polarkoordinaten, zum Beispiel, ist die Länge von $\mathbf{e}_r$ konstant, während $|\mathbf{e}_\phi| \propto r$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r)\, dr^2 + (\mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi)\, d\phi^2 && (3.12)\\ &= 1 \cdot dr^2 + r^2 d\phi^2 && (3.13) \end{aligned}$$

– Nach Definition der Basis kann man nun (endliche) Vektoren $\mathbf{A} = A^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ im Tangentialraum mittels der üblichen Parallelogrammkonstruktion konstruieren. Die A^α sind die dabei **kontravarianten Komponenten**, d.h. die Komponenten des Vektors $\mathbf{A}$ entlang der Basis (Abb. 3.3).

– In einem nächsten Schritt definiert man eine weitere (kovariante) Darstellung A_α des Vektors $\mathbf{A}$, in dem man fordert, dass $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_\alpha A^\alpha$ für jeden Vektor $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = (A^\alpha \mathbf{e}_\alpha)\cdot\left(A^\beta \mathbf{e}_\beta\right) = g_{\alpha\beta}\, A^\beta A^\alpha \equiv A_\alpha A^\alpha\,, \tag{3.14}$$

woraus

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A^\beta \tag{3.15}$$

folgt. Da $A_\gamma = g_{\gamma\beta}\, A^\beta = \mathbf{e}_\gamma\cdot\mathbf{e}_\beta\, A^\beta = \left(A^\beta\mathbf{e}_\beta\right)\cdot\mathbf{e}_\gamma = \mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_\gamma$ gilt, sind die **kovarianten Komponenten** A_γ die Projektion von $\mathbf{A}$ entlang der Basisvektoren $\mathbf{e}_\beta$ [3] (Abb. 3.3).

- kovariante Ableitung

  – Gegeben sei ein kovariantes Vektorfeld $A_i(x)$. Die (gewöhnliche) **Ableitung**

  $$A_{i,k} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \tag{3.16}$$

  des Vektorfelds transformiert sich wie

  $$A_{i,k} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x'^l}\left(A'_m \frac{\partial x'^m}{\partial x^i}\right)$$

  bzw.

  $$A_{i,k} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^k}\frac{\partial x'^m}{\partial x^i}A'_{m,l} + \frac{\partial x'^l}{\partial x^k}\left(A'_m \frac{\partial^2 x'^m}{\partial x'^l \partial x^i}\right)\,.$$

  Da der zweite Term auf der rechten Seite dieser Gleichung im Allgemeinen ungleich Null ist, ist die (gewöhnliche) Ableitung $A_{i,k}$ **kein** Tensor.

  – Das Problem rührt daher, dass man zur Berechnung der Ableitung zwei Vektoren an verschiedenen Orten miteinander vergleicht (Abb. 3.4)

  $$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \lim_{\delta x^k \to\, 0} \frac{A_i(x^k + \delta x^k) - A_i(x^k)}{\delta x^k}$$

  und die Transformationsmatrix im Allgemeinen ortsabhängig ist. Der Vergleich der Vektoren muss daher am gleichen Ort vorgenommen werden. Dazu muss man das Konzept des **Paralleltransports** einführen. Beim Paralleltransport wird ein Vektor so verschoben, dass seine **Größe und Richtung unverändert** bleiben (aber nicht notwendigerweise die Komponenten des Vektors).

  – Annahme: Die Änderung von A_i sei proportional der Verschiebung und proportional den Komponenten des Vektors, d.h.

  $$\delta A_i = \Gamma^l_{ik} A_l \delta x^k\,.$$

[3] An sich müsste man zwischen Tensoren als geometrische Objekte und ihrer kontravarianten Darstellung im abstrakten Tangentialraum und dem dualen Tangentialraum der kovarianten Darstellung unterscheiden.

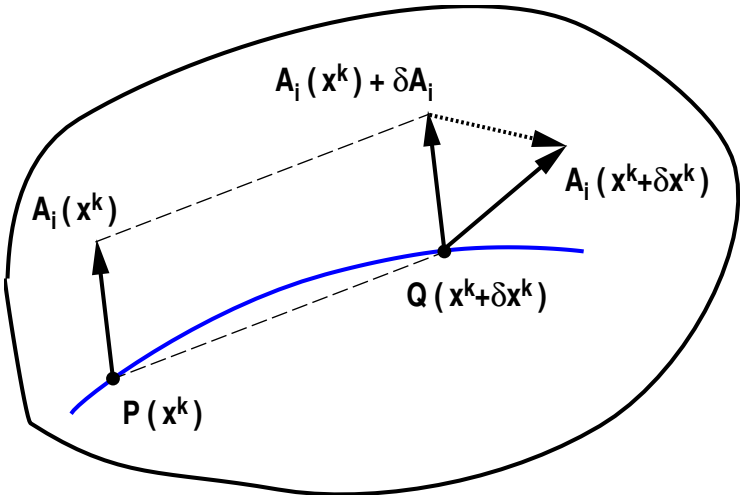


Abbildung 3.4:

– Der Satz von N^3 Funktionen Γ^l_{ik} heißt **affiner Zusammenhang** [2] (kein Tensor!).

– Am Punkt Q gilt

$$A_i(x^k + \delta x^k) - [A_i(x^k) + \delta A_i] = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} A_l\right) \delta x^k \,.$$

Demnach definiert man die **kovariante Ableitung** gemäß

$$\boxed{A_{i;k} \equiv \nabla_k A_i \equiv A_{i,k} - \Gamma^l_{ik} A_l} \tag{3.17}$$

bzw.

$$\boxed{A^i_{;k} \equiv \nabla_k A^i \equiv A^i_{,k} + \Gamma^i_{lk} A^l} \tag{3.18}$$

– Analog definitiert man die kovariante Ableitung von Tensoren höheren Rangs; z.B.

$$T^{ik}_{\ \ ;l} = T^{ik}_{\ \ ,l} + \Gamma^i_{nl} T^{nk} + \Gamma^k_{nl} T^{in}$$

– Falls die Mannigfaltigkeit eine Metrik und einen affinen Zusammenhang besitzt, kann man einen **metrischen Zusammenhang** definieren mit

$$\boxed{\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{dc,b} + g_{db,c} - g_{bc,d})} \tag{3.19}$$

[2] Die affinen Tangentialräume verschiedener Punkte einer Mannigfaltigkeit stehen im Allgemeinen in keinem Zusammenhang. Durch die Definition der kovarianten Ableitung wird jedoch ein affiner Zusammenhang zwischen den Tangentialräumen hergestellt. Der auf diese Weise aus der Mannigfaltigkeit entstehende Raum wird **affin zusammenhängender Raum** genannt.

Es gilt $\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb}$, d.h. der metrische Zusammenhang ist symmetrisch bezüglich der unteren Indizes.

- Riemannscher Krümmungstensor

$$\boxed{R^a{}_{bcd} \equiv \partial_c \Gamma^a_{bd} - \partial_d \Gamma^a_{bc} + \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} - \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}}$$

wobei Γ^a_{bc} der metrische Zusammenhang der Mannigfaltigkeit ist.

Falls $R^a{}_{bcd} \equiv 0$, ist die Metrik flach und $\Gamma^a_{bc} \equiv 0$, d.h. metrische Flachheit impliziert affine Flachheit.

Der Riemannsche Krümmungstensor besitzt eine ganze Reihe von Symmetrien [siehe z.B. d'Inverno]. Dadurch reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten von N^4 auf $N^2(N^2-1)/12$, d.h. in der AR von 256 auf 20 unabhängige Komponenten.

- Bianchi–Identität

$$\boxed{\nabla_a R_{debc} + \nabla_c R_{deab} + \nabla_b R_{deca} = 0} \tag{3.20}$$

- Ricci–Tensor (symmetrisch)

$$\boxed{R_{ab} = R^c{}_{acb} = g^{cd} R_{dacb}} \tag{3.21}$$

- Ricci–Skalar

$$\boxed{R = g^{ab} R_{ab}} \tag{3.22}$$

- Einstein–Tensor (symmetrisch)

$$\boxed{G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R} \tag{3.23}$$

3.2 Grundlagen der AR

Die Allgemeine Relativitätstheorie (kurz: AR) ist eine **relativistische und geometrische Theorie der Gravitation**.

- Ausgangspunkt: Die Spezielle Relativitätstheorie (kurz: SR) basiert auf dem Relativitätsprinzip (Erfahrungssatz):

  Physik ist identisch in allen Bezugssystemen, die geradlinig, gleichförmig gegeneinander bewegt sind.

- Inertialsysteme (I) bilden eine ausgezeichnete Klasse (K_I) von Bezugssystemen (kräftefreie Körper bewegen sich geradlinig und gleichförmig).

- Forderungen:

  - Newtonsche Bewegungsgleichung invariant unter Transformation von $I_1 \to I_2$
    $\to$ **Galilei–Transformationen** (klassische Physik, Mechanik)
  - Elektrodynamik invariant unter Transformation von $I_1 \to I_2$
    $\to$ **Lorentz–Transformationen** (SR)

- Spezielle Relativitätstheorie (SR): Raumzeit beschrieben durch **Minkowski–Metrik** $\eta_{\alpha\beta}$ (diagonale 4×4 Matrix) mit $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ und der (hier gewählten) **Signatur**

$$\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)\,. \tag{3.24}$$

  - Das Lorentz–invariante Linienelement ds^2 (Abstandsquadrat zweier Raumzeit–Ereignisse) der Minkowski–Metrik ist durch

$$\boxed{ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \tag{3.25}$$

    bzw. in kartesischen Koordinaten $x^o = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ durch

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

    gegeben.

    Beachte: Griechische Indizes laufen von 0 bis 3 und lateinische Indizes von 1 bis 3.

  - Die Minkowski–Metrik $\eta_{\alpha\beta}$ beschreibt eine **pseudo–Euklidsche Geometrie**, d.h. sie ist Euklidsch (flach) bis auf das Minuszeichen in (3.24).
  - Für **Lichtstrahlen** gilt $ds^2 = 0$ (Trajektorie ist **lichtartig**), d.h. die Lichtausbreitung ist invariant.

- Für **massebehaftete Teilchen** gilt $ds^2 < 0$ (Trajektorie ist **zeitartig** und verläuft innerhalb des Lichtkegels).
- Die Raumzeit kann auch durch nicht–kartesische, krummlinige Koordinaten y^γ (z.B. Polarkoordinaten) beschrieben werden oder durch das Koordinatensystem eines beschleunigten Beobachters. Sei

  $$x^\alpha = x^\alpha(y^\gamma)$$

  die Beziehung zwischen den Koordinaten x^α eines Inertialsystems und den Koordinaten y^α eines Nicht–Inertialsystems, so gilt für das Linienelement

  $$ds^2 = g_{\alpha\beta}(y^\gamma) dy^\alpha dy^\beta$$

  mit

  $$g_{\alpha\beta}(y^\gamma) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^\beta} \eta_{\lambda\sigma} \,.$$

  In diesem Fall hat die Metrik eine kompliziertere Form. Sie kann im Allgemeinen Nicht-Diagonalterme und ortsabhängige Koeffizienten aufweisen. Trotzdem ist die Raumzeit immer noch flach! In Polarkoordinaten (zum Beispiel) hat das Linienelement der Minkoswki–Metrik die Form

  $$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\varphi^2 \,.$$

- Eine Raumzeit heisst **flach** oder ist **Minkowski-artig**, wenn eine **globale** Koordinatentransformation existiert mit

  $$g_{\alpha\beta} \to \eta_{\alpha\beta} \,.$$

- Allgemeine Relativitätstheorie (AR): Eine Raumzeit ist im Allgemeinen nicht global flach, sondern sie ist **gekrümmt** (Riemannsche Räume).
  - Bei Vorhandensein von Gravitationsfeldern gibt es **keine neutralen Probekörper**, d.h. ein globales Inertialsystem ist nicht realisierbar.
  - Nur **lokale Inertialsysteme** sind realisierbar, d.h. an jedem Raumzeitpunkt existiert eine Koordinatentransformation mit $g_{\alpha\beta} \to \eta_{\alpha\beta}$ (Tangentialraum).
- Äquivalenzprinzip:

  Literatur: C.M. Will, *Theory and experiment in gravitational physics*, CUP, 1993.
  - Das Äquivalenzprinzip ist eine physikalische Aussage, dessen mathematische Realisation das **Kovarianzprinzip** ist.
  - Das Kovarianzprinzip besagt, dass physikalische Gesetze **forminvariant** oder **kovariant** unter beliebigen Koordinatentransformationen sein sollen. Es ist daher eine Anleitung zum Formulieren physikalischer Gesetze (ohne Gravitation).

- Die **Motivation** für das Äquivalenz- bzw. Kovarianzprinzip ist die Äquivalenz von schwerer und träger Masse (Einstein'sche Aufzugsexperimente). Die Richtigkeit des Äquivalenzprinzips muss experimentell überprüft werden.
- **Schwaches Äquivalenzprinzip** (Weak Equivalence Principle: WEP)
  - **Schwere und träge Masse sind gleich:** $m_i = m_g$, d.h. **alle Körper fallen gleich schnell**; denn aus $\vec{f_a} = m_i\vec{a}$ und $\vec{f_g} = m_g\nabla\Phi$ folgt $\vec{a} = -\nabla\Phi$, falls $m_i = m_g$ (Newton)
  - **präzise Definition:** Setzt man ein ungeladenes *Testteilchen* (elektrisch neutral; vernachlässigbare Gravitationsbindungsenergie; klein gegenüber Skalen, auf denen äußere Felder variieren) mit einer anfänglichen Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt an einen Raumpunkt der Raumzeit, so ist seine folgende Bewegung (Trajektorie) unabhängig von seiner inneren Struktur und Komposition.
  - *In ausreichend kleinen Raumzeitbereichen ist die **Physik frei–fallender Körper** (d.h. die Mechanik) identisch in einem Gravitationsfeld und in einem gleichförmig beschleunigten Bezugssystem (Einstein).*
- **Einstein Äquivalenzprinzip** (Einstein Equivalence Principle: EEP)
  1. Schwaches Äquivalenzprinzip (WEP) ist gültig.
  2. Messergebnis *lokaler, nicht–gravitativer Experimente* (durchgeführt in frei–fallendem Labor, das (i) gegenüber äußeren Einflüssen abgeschirmt ist, das (ii) klein gegenüber Skalen ist, auf denen äußere Felder variieren und (iii) in dem Effekte durch Eigengravitation vernachlässigbar sind) hängt nicht von der Geschwindigkeit (der frei–fallenden) Messapparatur ab.
  3. Messergebnis lokaler, nicht–gravitativer Experimente hängt nicht davon ab, wo und wann das Experiment durchgeführt wird.
  - Ist das Einstein Äquivalenprinzip erfüllt, muss die Gravitationstheorie eine metrische[4] Theorie sein.
  - *Das schwache Äquivalenzprinzip (WEP) gilt für **alle physikalischen Vorgänge ohne Gravitation**, d.h. die Physik ist in Gebieten der Raumzeit, die genügend klein sind, identisch zur Physik der SR; es ist **lokal** unmöglich die Existenz eines Gravitationsfelds nachzuweisen.* (Grundlage aller metrischen Gravitationstheorien und nicht nur der AR!)
  - **Schiff'sche Vermutung:** Jede vollständige, konsistente Gravitationstheorie, die dem schwachen Äquivalenzprinzip genügt, erfüllt auch das Einstein Äquivalenzprinzip

[4]**Metrische Gravitationstheorie:** (i) Raumzeit mit Metrik versehen; (ii) Weltlinien von Testteilchen sind Geodäten der Metrik; (iii) in lokal, frei–fallenden Bezugsystemen sind die nicht–gravitativen Gesetze der Physik durch die SR gegeben.

- **Starkes Äquivalenzprinzip** (Strong Equivalence Principle: SEP)
  Wird von allen bekannten, metrischen Gravitationstheorien nur von der AR erfüllt.
  1. Schwaches Äquivalenzprinzip (WEP) ist gültig sowohl für selbstgravitierende Körper als auch für ungeladene Testkörper.
  2. Das Messergebnis *beliebiger lokaler Experimente* hängt nicht von der Geschwindigkeit (der frei–fallenden) Messapparatur ab.
  3. Das Messergebnis lokaler Experimente hängt nicht davon ab, wo und wann das Experiment durchgeführt wird.
  4. Im Gegensatz zu Einsteins Äquivalenprinzip (EEP) beinhaltet das starke Äquivalenzprinzip (SEP) auch Körper mit Eigengravitation und gravitative Experimente.
  5. *In jeder metrischen Gravitationstheorie koppeln Materie und nicht-gravitative Felder nur an die Raumzeit-Metrik.*
     In einer solchen Theorie können allerdings neben der Metrik weitere „Gravitationsfelder“ existieren, wie z.B. Skalarfelder und Vektorfelder. Da die Materie nicht an diese zusätzliche „Gravitationsfelder“ ankoppelt, kann ihre Rolle nur darin liegen, die Art und Weise festzulegen, wie Gravitationsfelder und damit die Metrik durch die Materie und die nicht-gravitativen Felder erzeugt werden. Die so bestimmte Metrik wechselwirkt dann allerdings alleine mit der Materie gemäß dem EEP. Die Anzahl und Art der zusätzlichen „Gravitationsfelder“ bestimmt die Art der metrischen Gravitationstheorie. Gilt das SEP, dann gibt es genau ein Gravitationsfeld, das durch die Metrik $g_{\alpha\beta}$ gegeben ist.

- **Lorentzinvariante Formulierung physikalischer Gesetze**

  Das Äquivalenzprinzip stellt eine Anleitung dar, physikalische Gesetze (ausser denen die die Gravitation beschreiben) beim Vorhandensein eines Gravitationsfelds zu formulieren. Zur Erläuterung betrachten wir die Energieerhaltung in der SR (verschwindende 4–Divergenz des Energie–Impuls–Tensors)

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} T^{\alpha\beta} = 0\,. \tag{3.26}$$

  - Muss wegen des Äquivalenzprinzips im lokalen Inertialsystem gelten.
  - Gleichung (3.26) soll unter beliebigen Koordinatentransformationen terminvariant sein.
    → **Tensorkalkül** (siehe Kapitel 3.1)
    → Gewöhnliche Ableitung wird durch **kovariante Ableitung** (3.17) ersetzt.

- **Feldgleichungen:**

  Bisher haben wir betrachtet wie Gravitation andere physikalische Phänomene und Messungen in lokalen Inertialsystemen beeinflusst. Jetzt wenden wir uns der Frage zu wie die Masse–Energie–Verteilung die Geometrie der Raumzeit bestimmt. Dies führt uns zu den Feldgleichungen.

  Folgende **physikalische Bedingungen** sollen die Feldgleichungen erfüllen:

  1. Im nicht–relativistischen Grenzfall soll die Newtonsche Poissongleichung $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$ gelten.
  2. Die Quellen des Gravitationsfeldes werden durch den (symmetrischen) Energie–Impuls–Tensor $T^{\alpha\beta}$ beschrieben.
  3. Gravitation ist festgelegt durch die Raumzeitmetrik $g_{\alpha\beta}$ (SEP)
  4. Die Feldgleichungen separieren: $\Phi[g_{\alpha\beta}] = F[T^{\alpha\beta}]$ (Relativitätsprinzip)
  5. Gravitation ist universell anziehend

  Zusätzlich sollen noch zwei **Einfachheitshypothesen** gelten, die physikalisch nicht begründbar sind:

  1. Das Funktional $F[T^{\alpha\beta}]$ ist **linear** in $T^{\alpha\beta}$
  2. Das Funktional $\Phi[g_{\alpha\beta}]$ ist von 2. Ordnung in $g_{\alpha\beta}$ und quasilinear (d.h. in den 2. Ableitungen linear)

  Durch diese physikalischen Bedingungen und Einfachheitshypothesen sind die Feldgleichungen der Einsteinschen Gravitationstheorie eindeutig festgelegt. Sie lauten in kompakter Schreibweise und ohne kosmologisches Glied ($-\Lambda g_{\alpha\beta}$)

$$\boxed{G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}} \tag{3.27}$$

  wobei $G^{\alpha\beta}$ der symmetrische **Einstein–Tensor** (3.23) mit 10 unabhängigen Komponenten ist.

  Ein wichtige Konsequenz der Feldgleichungen folgt aus der Tatsache, dass die 4–Divergenz des Einstein-Tensors verschwindet, d.h. $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$ gilt. Damit erhält man unmittelbar die **Energie-Impuls-Erhaltung**:

$$\boxed{\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0} \tag{3.28}$$

  Man beachte, dass die Divergenz kovariante Ableitungen involviert, während die Divergenz in (3.26) durch gewöhnliche Ableitungen gegeben ist.

Aus (3.27) folgen 10 Feldgleichungen für 10 unbekannte Metrik-Koeffizienten und aus (3.28) bei gegebenen Quellen 4 Erhaltungs- bzw. Bewegungs-Gleichungen. Damit hat man nur 6 unabhängige Gleichungen für die 10 Komponenten der Raumzeitmetrik $g_{\alpha\beta}$, oder anders ausgedrückt, die Theorie hat 4 Freiheitsgrade. Die Ursache für diese Freiheitsgrade ist die Kovarianz der Theorie, die eine „freie Koordinatenwahl" gestattet.

- **Experimentelle Bestätigung der AR:**
  - Gravitationsrotverschiebung
  - Periheldrehung des Merkur (43"/100 Jahre)
  - Lichtablenkung an Sonne (1.75")
  - Gleichheit von schwerer und träger Masse
  - Binärpulsar
  - Zeitdilatation im Erdgravitationsfeld
  - Starke Felder: Gravitationswellen (?), BH (?), Lense–Thirring–Effekt (?)

3.3 Bewegung von Testteilchen

Unter einem Testteilchen versteht man ein idealisiertes Materieobjekt (klein, ungeladen, sphärisch, ...), das sich frei im Gravitationsfeld bewegt, ohne dies zu beeinflussen (siehe auch die Diskussion zum Äquivalenzprinzip).

- In der **Speziellen Relativitätstheorie** bewegen sich Testteilchen mit konstanter Geschwindigkeit.
  - Die **Bewegungsgleichungen** von Testteilchen lassen sich mit Hilfe des **Variationsprinzips** ableiten. Man fordert, dass der Abstand (das Intervall) längs einer Weltlinie extremal ist

    $$\delta \int ds = 0\,. \tag{3.29}$$

    Dazu schreiben wir den Integranden von (3.29) in der Form

    $$ds = \left(-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\right)^{1/2} d\lambda \tag{3.30}$$

    mit

    $$\dot{x}^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \tag{3.31}$$

    wobei λ ein beliebiger Parameter entlang der Weltlinie ist. Man beachte das Minuszeichen in (3.30) gilt für massebehaftete und damit zeitartige Teilchen (siehe Kap. 3.1). Der Ausdruck (3.30) für ds ist invariant unter der Parametertransformation $\lambda \to \lambda(\lambda')$.

– Die **Lagrangefunktion** für (3.29) lautet

$$L = \left(-\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\right)^{1/2} . \tag{3.32}$$

Aus den **Euler–Lagrange–Gleichungen**

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} \tag{3.33}$$

folgt mit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = -\frac{1}{L}\,\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta$$

und der Tatsache, dass die rechte Seite von (3.33) Null ist (da die Lagrangefunktion nicht explizit von den Koordinaten x^α abhängt)

$$\eta_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta - \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \lambda}\,\eta_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta = 0\,. \tag{3.34}$$

Mit einer Reskalierung $\lambda \to \lambda(\lambda')$ kann man erreichen, dass L entlang der Weltlinie konstant ist. Der Parameter λ heißt in diesem Fall **affiner Parameter**. Insbesondere kann man die Weltlinie des Testteilchen immer durch die Länge $s = c\tau$ entlang der Weltlinie parametrisieren, d.h. durch die Eigenzeit τ des Testteilchens. Dann gilt $\lambda = s$, $L = 1$ und aus (3.34) folgt

$$\eta_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta = 0\,.$$

Multiplikation mit der inversen Matrix $\eta^{\gamma\alpha}$ der Matrix $\eta_{\alpha\beta}$ ergibt

$$\boxed{\ddot{x}^\gamma = 0 = \frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2}} \tag{3.35}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für eine Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit entlang einer geraden Linie.

* Die Extremalkurven entlang deren die Bewegung der Testteilchen erfolgt heißen **Geodäten**.
* In der Minkowski–Raumzeit sind die Geodäten vierdimensionale Geraden
* Die Geodäten freier Testteilchen sind **zeitartig** ($ds^2 < 0$).
* Photonen und andere masselose Teilchen bewegen sich entlang **Null–Geodäten** ($ds^2 = 0$). In diesem Fall kann man die Eigenzeit τ nicht als Parameter λ wählen. Stattdessen wählt man λ so, dass $dx^\alpha/d\lambda \equiv p^\alpha$ gilt, wobei p^α der 4–Impuls ist.

- In der **Allgemeinen Relativitätstheorie** ist aufgrund des Äquivalenzprinzips (3.29) ebenfalls ein Variationsprinzip für die Bewegung von Testteilchen.

– Freie Testteilchen bewegen sich entlang Geodäten der Raumzeit. Die Lagrange-Funktion lautet statt (3.32) nun

$$L = \left[-g_{\alpha\beta}(x^\gamma)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\right]^{1/2} \tag{3.36}$$

und aus den Euler–Lagrange–Gleichungen ergibt sich (mit einer affinen Parametrisierung, so dass $L = const.$)

$$\boxed{g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + g_{\alpha\beta,\gamma}\dot{x}^\gamma\dot{x}^\beta - \frac{1}{2}g_{\gamma\beta,\alpha}\dot{x}^\gamma\dot{x}^\beta = 0} \tag{3.37}$$

Mit

$$g_{\alpha\beta,\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta})\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma$$

folgt

$$g_{\alpha\beta}\ddot{x}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0$$

wobei

$$\boxed{\Gamma_{\alpha\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\gamma\beta,\alpha})} \tag{3.38}$$

die **Christoffel–Symbole** sind. Durch Multiplikation von (3.38) mit dem inversen Metriktensor $g^{\delta\alpha}$ und anschließender Umbenennung $\delta \leftrightarrow \alpha$ erhält man die **Geodätengleichung der AR**

$$\boxed{\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma = 0} \tag{3.39}$$

mit

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \equiv g^{\alpha\delta}\Gamma_{\delta\beta\gamma}\,.$$

3.4 Sphärisch–Symmetrische Gravitationsfelder

- Eine sphärisch–symmetrische Metrik kann von der Zeit (t) und einer radialen Koordinate (r) abhängen. Sie kann außerdem eine Funktion der Winkelkoordinaten θ und φ sein, aber nur in der Kombination

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2\,.$$

Die **allgemeinste Form** einer sphärisch–symmetrischen Metrik lautet [siehe Shapiro & Teukolsky 1983, Kap. 5.6]

$$\boxed{ds^2 = -e^{2\Phi(t,r)}dt^2 + e^{2\lambda(t,r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2} \tag{3.40}$$

wobei Φ und λ beliebige Funktionen von (t, r) sind.

- In der Newtonschen Theorie gilt: Das Gravitationsfeld an einem beliebigen Punkt außerhalb einer sphärisch–symmetrischen Massenverteilung hängt nur von der Masse innerhalb des Punktes ab.

  Bewegt sich die Massenverteilung innerhalb des Punktes radial–symmetrisch, ist das äußere Gravitationsfeld trotzdem statisch und ist durch $\Phi = -GM/r$ gegeben.

- Diese beiden Aussagen gelten auch im Falle der AR und sind als **Birkhoff Theorem** bekannt: **Das einzige existierende, sphärisch–symmetrische Vakuum–Gravitationsfeld ist statisch.**

  Es ist durch die **Schwarzschild–Metrik**

$$\boxed{ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2} \tag{3.41}$$

  gegeben. Die Konstante M ist ein Parameter der Lösung. Ihre Bedeutung erschließt sich aus der **Schwachfeldnäherung** der Schwarzschild–Metrik.

  Dazu betrachtet man ein sich langsam bewegendes ($v \ll c$) Testteilchen in einem schwachen Gravitationsfeld ($\Phi \ll c^2$). Für die 00–Komponente der Metrik gilt in diesem Fall [siehe Shapiro & Teukolsky 1983, Kap. 5.4]

$$g_{00} \approx -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) ,$$

  wobei Φ das Newtonsche Gravitationspotential ist. Durch Vergleich mit der Schwachfeldnäherung der Schwarzschild–Metrik ($r \gg \frac{2GM}{c^2}$) folgt daraus

$$-\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$$

  und damit

$$\Phi = -\frac{GM}{r} ,$$

d.h. der Parameter M der Schwarzschild–Metrik ist die Masse der Quelle des Gravitationsfelds. Sie ist messbar, in dem man z.B. einen Satelliten auf eine entfernte Umlaufbahn um die Quelle bringt und mit Hilfer der Kepler–Gesetze die gravitierende Masse bestimmt.

- Die Schwarzschild–Metrik ist **asymptotisch flach**
- In der Schwarzschild–Metrik haben die Koordinaten eine direkte physikalische Interpretation:
  - θ und φ sind die „gewöhnlichen“ Polarkoordinaten einer 2-Sphäre (Radius r).
  - Die Radialkoordinate r ist definiert durch den Eigen–Umfang der 2–Sphäre mit t und r konstant.
    Gemäß der Metrik auf der 2–Sphäre gilt für die physikalisch messbare Größe
    $$^{(2)}ds^2 = r^2 d\Omega^2 = r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2)$$
    und damit für den Eigen–Umfang
    $$\oint_{\theta=\pi/2} {}^{(2)}ds = \int_0^{2\pi} r d\varphi = 2\pi r$$
  - Für den Eigenabstand zwischen 2 Punkten r_1 und r_2 auf einem radialem Strahl gilt
    $$\int_{r_1}^{r_2} (g_{rr})^{1/2} dr \neq r_2 - r_1$$
  - Die Zeitkoordinate t strebt gegen $t_{\text{Minkowski}}$ für $r \gg GM/c^2$, wobei immer $t \leq t_{\text{Minkowski}}$ gilt (d.h. im Gravitationsfeld gehen Uhren langsamer).

3.5 Sphärische Sterne und TOV–Gleichung

- Die Metrik (3.40) beschreibt auch das Gravitationsfeld innerhalb eines sphärischen Sterns.
- Im hydrostatischen Gleichgewicht sind die Metrikfunktionen Φ und λ nicht von t abhängig.
- Wir nehmen an, dass die Sternmaterie als ideales Gas mit der Zustangsgleichung $\rho = \rho(n, s)$ beschrieben werden kann, wobei $\rho = \varepsilon/c^2$, ε, n und s die Massendichte, Gesamtenergiedichte, Baryonenanzahldichte und die Entropie pro Baryon sind. Mit Hilfe des 1. Hauptsatz der Thermodynamik folgt dann der Druck gemäß $P = P(n, s)$.

- Obwohl ein ideales Gas adiabatisch ist (Entropie ist zeitlich konstant), ist es nicht notwendigerweise isentropisch, d.h. seine Entropie ist nicht überall gleich. Kalte ($k_B T \ll E_F$) WD und NS sind aber in guter Näherung isentropisch ($s \approx 0$). In diesem Fall gilt $P = P(\rho)$, d.h. der Druck ist nur eine Funktion der Massendichte.

- Zur Herleitung der AR Sternstrukturgleichungen definiert man eine neue Metrikfunktion $m(r)$ gemäß

$$e^{2\lambda} \equiv \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} . \tag{3.42}$$

  Mit (3.40) und (3.42) folgt dann aus den Einsteinschen Feldgleichungen

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \,, \tag{3.43}$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right)^{-1} , \tag{3.44}$$

  und

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi P r^3}{mc^2}\right)\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} . \tag{3.45}$$

  bzw.

$$\boxed{\frac{dP(r)}{dr} = -G\frac{\left[\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2}\right]\left[m(r) + 4\pi r^3 \frac{P(r)}{c^2}\right]}{r\left[r - \frac{2Gm(r)}{c^2}\right]}} \tag{3.46}$$

  Dies ist die berühmte Tolman–Oppenheimer–Volkov–Gleichung, die meistens kurz **TOV–Gleichung** genannt wird.

- Den Newtonschen Grenzfall erhält man für $P \ll \rho c^2$ und $Gm/c^2 \ll r$.

- Die Metrikfunktion $m(r)$ kann man als „Masse innerhalb des Radius r“ interpretieren und

$$M \equiv m(R) = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr \tag{3.47}$$

  gemäß (3.43) als die Gesamtmasse des Sterns. Letzteres gewährleistet, dass der Metrikkoeffizient (3.42) der inneren Lösung glatt an den entsprechenden Koeffizienten der äußeren Schwarzschildlösung (3.41) anschließt.

- **Wichtig:** Die Größen $m(r)$ und M beinhalten **alle** Beiträge zur (gravitierenden) Masse inklusive der (negativen) Gravitationsbindungsenergie.

  Diese Tatsache, die in (3.47) nicht offensichtlich ist, wird deutlich, wenn man das von $4\pi r^2 dr$ verschiedene Eigenvolumenelement

  $$d\mathcal{V} \equiv \sqrt{g_{rr}} dr \times 4\pi r^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1/2} 4\pi r^2 dr \tag{3.48}$$

  betrachtet. Demnach ist die Größe M in Gleichung (3.47) nicht die Summe der lokalen Gesamtmassenbeiträge $\rho d\mathcal{V}$, sondern enthält einen globalen Beitrag von der negativen Gravitationsbindungsenergie des Sterns.

- Die **Randbedingungen** für die TOV–Gleichung sind im Zentrum

  $$m(r = 0) = 0$$

  und an der Sternoberfläche

  $$P(r = R) = P_{\text{Oberfläche}} \ll P_0\,,$$

  wobei P_0 der Druck im Zentrum des Sterns ist.

- Lösung der TOV–Gleichung für $\rho = const.$

  Im Falle konstanter Dichte ρ folgt aus (3.43) die Beziehung $m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$. Einführen neuer Variablen

  $$r \to \xi \equiv \sqrt{\frac{8\pi}{3}\frac{G\rho}{c^2}}\, r = \sqrt{\frac{2Gm(r)}{c^2 r^3}}\, r \quad \text{(dimensionslos)}$$

  und

  $$P \to \eta \equiv \frac{P}{c^2} \quad [g/cm^3]$$

  und einsetzen in die TOV–Gleichung (3.46) ergibt

  $$\frac{dP}{dr} = -G\frac{(\rho + \eta)\left(\frac{4\pi}{3} r^3 \rho + 4\pi r^3 \eta\right)}{r^2(1 - \xi^2)}\,,$$

  bzw.

  $$\frac{d(P/c^2)}{dr} = -\frac{4\pi}{3}\frac{G\rho}{c^2} r\, \frac{(\rho + \eta)(\rho + 3\eta)}{\rho(1 - \xi^2)}$$

und schließlich mit $d(\xi^2) = 4\,\frac{4\pi}{3}\frac{G\rho}{c^2} r\,dr$

$$\boxed{\frac{d\eta}{d(\xi^2)} = -\frac{(\rho+\eta)(\rho+3\eta)}{4\rho(1-\xi^2)}} \tag{3.49}$$

Die Integration von (3.49) mit der Randbedingung $P(R) = 0$, d.h. $\eta(\xi(R)) = 0$, ergibt

$$\boxed{\eta(\xi) = \rho\,\frac{\sqrt{1-\xi^2} - \sqrt{1-X^2}}{3\sqrt{1-X^2} - \sqrt{1-\xi^2}}}\,,$$

wobei

$$X^2 \equiv \xi^2(R) = \frac{2GM}{Rc^2} = \frac{R_s}{R}\,.$$

Im Zentrum ($\xi = 0$) gilt

$$\eta(0) = \frac{P_0}{c^2} = \rho_0\,\frac{1-\sqrt{1-X^2}}{3\sqrt{1-X^2}-1}\,.$$

Daraus resultiert eine Bedingung an X, da $P_0 < \infty$ sein muss:

$$X^2 = \frac{R_s}{R} < \frac{8}{9}\,.$$

Für einen sphärischen inkompressiblen Stern der Masse M folgt damit

$$\boxed{R > \frac{9}{8}R_s} \tag{3.50}$$

d.h. es existiert keine statische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen, falls der Radius eines sphärischen inkompressiblen Sterns kleiner als 9/8 seines Schwarzschildradius ist.

- $\exists$ ein Minimalradius bzw. eine maximale Kompaktheit für NS
- Verallgemeinerung: Das Bedingung (3.50) gilt für alle Dichteverteilungen $\rho(r)$ mit $d\rho/dr \leq 0$

Kapitel 4

Neutronensterne und Pulsare

4.1 Zur Geschichte und Bedeutung

- Geschichte

1931 Chandrasekhar findet maximale Masse für Weiße Zwerge: $M_{Ch} = 5.76\, {Y_e}^2\, M_\odot$

1932 Chadwick entdeckt das Neutron; Landau sagt NS voraus und berechnet deren maximale Masse

1934 Baade & Zwicky: Neutronensterne entstehen in Supernovae

1939 Oppenheimer & Volkoff: Erste Neutronensternmodelle

1967 Hewish et al. entdecken die Radiopulsare

1968 Gold: Pulsare sind rotierende Neutronensterne; Entdeckung des Krebspulsars im Supernovaüberrest SNR 1054

1969 Entdeckung des Krebspulsars im Visuellen

1971 Entdeckung der Röntgenpulsare mit UHURU (z.B. Her X-1); Deutung als akkretierende Neutronensterne in engen Doppelsternsystemen

1974 Hulse & Taylor entdecken den Binärpulsar PSR $1913 + 16$

1976 Trümper et al.: Erste Messung der Magnetfeldstärke eines Neutronensterns am Röntgenpulsar Her X-1

1982 Entdeckung des ersten ms–Pulsars PSR $1937 + 214$ mit einer Periode von $P = 1.5578\,\mathrm{ms}$

1987 Entdeckung des ersten ms–Pulsars in einem Kugelsternhaufen (M 28)

2000 Entdeckung des jungen Neutronensterns (300 Jahre) im Supernovaüberrest Cas A durch das CHANDRA Röntgenobservatorium

2010 Entdeckung des Binär-Pulsars J1614-2230 ($P = 3.15\,\mathrm{ms}$) mit einer Masse von 1.97 ± 0.04 Sonnenmassen

- Bedeutung

- Endstadium der Entwicklung massereicher Sterne ($M \gtrsim 8\,M_\odot$) nach einer Gravitationskollaps–Supernova (SNe II, Ib, Ic)

- Möglicherweise das Ergebnis eines akkretionsinduzierten Kollaps eines Weissen Zwergs mit $M \approx M_{Ch}$

- Neutronensterne erlauben das Studium von Materie bei extrem hoher Dichte ($(\rho > \rho_{\rm nuc} = 2\,10^{14} \ggg)$ und in extrem starken Magnetfeldern ($B \gtrsim 10^{13}\,$Gauss)

- akkretierende Neutronensterne

- thermonukleare Explosion auf einem Neutronenstern (Analogon zu den klassischen Novae)

- gehören zu den leuchtkräftigsten stellaren Röntgenquellen in der Milchstrasse ($L_x \gtrsim 10^{38}\,$erg/s)

- Radiopulsare

- Elektrodynamik der Pulsare, Beschleunigung von relativistischen Teilchen, Erzeugung von γ–Strahlung

- Pulsare in engen Doppelsternen wichtig als relativistische Laboratorien

- ms–Pulsare wichtig für Zeitmessung, verbesserte Ephemeriden, u.a.m.

4.2 Neutronenstern–Modelle

Ein Neutronenstern–Modell erhält man durch (numerische) Integration der TOV–Gleichung (3.46) für eine vorgegebene Zustandsgleichung. Die Eigenschaften der Sternmodelle (Zentraldichte, Radius, Masse, Trägheitsmoment, usw.) hängen stark von der Zustandsgleichung ab.

- Grenzmassen (gravitierende Masse; keine Rotation)

  a) Minimale Masse:
  Eine minimale Neutronensternmasse existiert, weil im Dichtebereich $4.3\,10^{11}\mathrm{g/cm}^3 \lesssim \rho \lesssim 7\,10^{12}\mathrm{g/cm}^3$ der Adiabatenindex $\Gamma < 4/3$ ist. Daher kann der mittlere Adiabatenindex im NS kleiner 4/3 werden. Die Gesamtenergie des NS ist dann positiv, d.h. der Stern ist instabil (siehe Virialsatz 2.60).

EOS	$M_{min}/M_\odot$	$R(M_{min})$/km	$\rho_c(M_{min})/[\mathrm{g/cm}^3]$
Harrison–Wheeler	~ 0.18	~ 300	$2.6\,10^{13}$
Bethe–Pethick–Sutherland	0.0925	164	$1.55\,10^{14}$

b) Maximale Masse:

* Für ein ideales Fermi-Gas bestehend aus Neutronen gilt: $M_{max} \approx 0.7 M_\odot$ (TOV-Masse), $R(M_{max}) \approx 9.6\,\mathrm{km}$ und $\rho_c \approx 5\,10^{15}\,[\mathrm{g/cm^3}]$
* M_{max} ist stark von der Zustandsgleichung abhängig. Aber für alle realistischen EOS ist $M_{max} \lesssim 3 M_\odot$
* Man kann eine obere Grenze für M_{max} unter den folgenden allgemeinen Bedingungen angeben (Rhoades & Ruffini, 1974, Phys. Rev. Lett. **32**, 324):
  1. AR ist die richtige Gravitationstheorie
  2. Es gilt $dP/d\rho \geq 0$, d.h. die Zustandsgleichung ist „mikroskopisch stabil“
  3. $0 < dP/d\rho \leq c^2$, d.h. Kausalität ist gewährleistet
  4. EOS ist bekannt für $\rho < \rho_0$
* Die Zustandsgleichung, die diese Bedingungen erfüllt und außerdem die Masse maximiert, hat die Form

  $$P = P_0 + (\rho - \rho_0)c^2\,, \quad \rho \geq \rho_0$$
* Integriert man mit dieser Zustandsgleichung (für $\rho \geq \rho_0 = 4.6\,10^{14}\,[\mathrm{g/cm^3}]$) und der Harrison–Wheeler–EOS (für $\rho \leq \rho_0$) die TOV–Gleichung (3.46), so findet man

  $$M_{max} = 3.2 M_\odot \left(\frac{\rho_0}{4.6\,10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}} \right)^{-1/2} .$$
* Verwendet man statt der Harrison–Wheeler–EOS die Baym–Bethe–Pethick–EOS (für $\rho \leq \rho_0 = 5\,10^{14}\,[\mathrm{g/cm^3}]$), so erhält man

  $$M_{max} = 3.6 M_\odot \left(\frac{\rho_0}{5\,10^{14}\mathrm{g/cm^3}} \right)^{-1/2} .$$

  Die hier genannten Zustandsgleichungen werden weiter unten noch genauer erläutert.

c) Absolute AR–Grenzmasse

Man betrachtet einen inkompressiblen Stern ohne Voraussetzung von $dP/d\rho < c^2$. Aus (siehe Gl.3.50)

$$R > \frac{9}{8} R_S = \frac{9}{4} \frac{GM}{c^2}$$

und

$$M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho_0$$

folgt (siehe z.B. Weinberg 1972, *Gravitation & Cosmology*, Wiley, N.Y.)

$$M < \frac{8}{27} \left(\frac{3}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3} \frac{c^3}{G^{2/3}}$$

bzw.

$$M \approx 5.3 M_\odot \left(\frac{\rho_0}{4.6\,10^{14}\mathrm{g/cm}^3} \right)^{-1/2}$$

- Zustandsgleichung

  (siehe auch Shapiro & Teuklosky, Kap. 2 und 8, bzw. Lattimer & Prakash, 2000, *Physics Reports*, **333-334**, 121)

  Die Berechnung der Zustandsgleichung (EOS) für Neutronensterne ist kompliziert, aufwendig und zum Teil noch ungeklärt,

  - da sie einen Dichtebereich von mehr als 10 Größenordnungen (bis zum 10fachen der Kernmateriedichte) umfasst (siehe Fig. 4.1),
  - da sie dichteabhängig Beiträge verschiedener Teilchensorten (n, p, e^-, Kerne, π^-, π^0, Hyperonen, Quarks) berücksichtigen muss,
  - da sie teilweise unbekannte Physik (bei Dichten oberhalb zwei- bis dreifacher Kernmateriedichte) involviert und
  - da sie verschiedene Wechselwirkungen zwischen den Teilchen (Coulomb-, schwache und starke Wechselwirkung) berücksichtigen muss.

  In der Praxis sind Näherungen für verschiedene Dichtebereiche notwendig. Eine Untersuchung der Temperaturabhängigkeit der EOS ist nur wichtig, wenn man den Entstehungsprozess von Neutronensternen betrachtet, da sonst $T \approx 0$ eine gute Näherung darstellt.

  1) $\rho \lesssim 10^7 \mathrm{g/cm}^3$
     - Die EOS ist, wie für kalte Weisse Zwerge, durch den Fermi–Druck der entarteten, nicht–relativistischen Elektronen dominiert. Die positiven Ionen (Atomkerne), die die Ladungsneutralität garantieren, sind in einem regelmäßigen Coulomb–Gitter angeordnet.
     - Falls sich die Materie im Grundzustand befindet, d.h. falls die Energie durch Änderung der Komposition infolge starker, schwacher und elektromagnetischer Prozesse nicht erniedrigt werden kann (nukleares Gleichgewicht), ist der Gleichgewichtskern $^{56}_{26}$Fe
  2) $10^7 \mathrm{g/cm}^3 \lesssim \rho \lesssim 4.3\,10^{11} \mathrm{g/cm}^3$
     - Die EOS enthält Beiträge von Elektronen, freien Nukleonen (n,p) und Kernen (A,Z).
     - **Inverser β–Zerfall** ($e^- + p \rightarrow n + \nu$) ist energetisch möglich, wenn $\rho > \rho_{crit}$, bzw. wenn $E_F > M_A(A, Z-1) - M_A(A, Z)$, d.h. wenn die Fermi–Energie größer als die Massendifferenz der beteiligten Kerne ist (siehe Kapitel 2.4). Man beachte, dass die Rückreaktion ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$) durch die Entartung der Elektronen blockiert ist (phase space blocking).

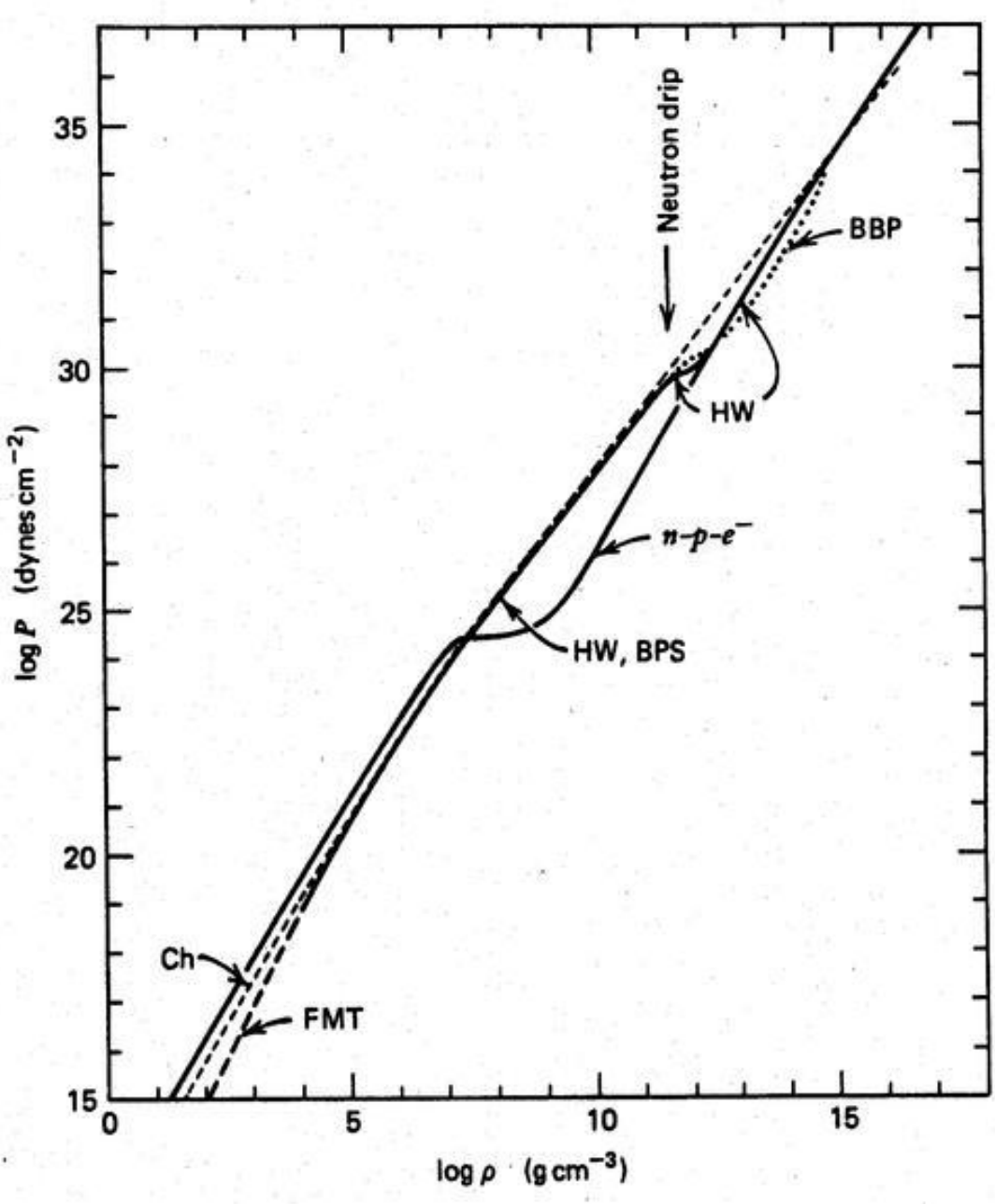


Abbildung 4.1: Repräsentative Zustandsgleichungen unterhalb des sogenannten „neutron drip“: Ch (Chandrasekhar; Elektronengas), FMT (Fermi–Metropolis–Teller), HW (Harrison–Wheeler), BPS (Bethe–Pethick–Sutherland), $n-p-e^-$ (ideales Gas aus Neutronen, Protonen und Elektronen) und BBP (Bethe–Baym–Pethick). Für die Ch–EOS wurde hier $\mu_e = 56/26$ angenommen (Abb. 2.2 aus Shapiro & Teukolsky)

* **Coulomb–Korrekturen** werden wichtig. Die positiven Ladungen sind nicht gleichförmig verteilt, sondern in Kernen der Ladung Z konzentriert. Dies reduziert die Energie und den Druck der sie umgebenden Elektronen: Die sich abstoßenden Elektronen sind im Mittel weiter voneinander entfernt als Kerne und Elektronen, d.h. die Abstoßung ist geringer als die Anziehung.
* Die Komposition ist durch **Reaktionsgleichgewicht**

  $$\mu_e + \mu_p = \mu_n + \mu_\nu = \mu_n \quad \text{und} \quad \mu(A,Z) = N\mu_n + Z\mu_p + B(A,Z)$$

  ($\mu_\nu = 0$, da die Neutrinos entweichen können) sowie durch die **Ladungsneutralität**

  $$n_e = n_p$$

  bestimmt.
* Die chemischen Potentiale der Nukleonen μ_n und μ_p sind durch die Massenformel $M_A(A,Z)$ bestimmt und das chemische Potential der Elektronen μ_e folgt aus Theorie der Fermi–Gase.
* Reaktionsgleichgewicht und Ladungsneutralität bestimmen den energetisch günstigsten (Gleichgewichts-) Kern (A,Z) und damit die EOS (siehe Abb. 4.1)
  - **Harrison-Wheeler EOS** [1] **(HW):** Kernmassen $M_A(A,Z)$ aus Tröpfchen–Modell.
  - **Baym, Pethick & Sutherland EOS** [2] **(BPS):** wie HW, aber mit „besserer“ Massenformel und Berücksichtigung der Coloumb–Gitterenergie.
* Bei $\rho_{drip} = 4.3\,10^{11}\mathrm{g/cm}^3$ erreicht das Neutron-Proton-Verhältniss in den Kernen einen kritischen Wert. Eine weitere Erhöhung der Dichte bewirkt die Freisetzung von Neutronen, d.h. oberhalb von ρ_{drip} koexistieren Elektronen, Kerne und freie Neutronen. Dieser Vorgang heisst **neutron drip**. Er macht die EOS „weich“, d.h. er erniedrigt den Adiabatenindex Γ (siehe Abb. 4.2).

3) $4.3\,10^{11}\mathrm{g/cm}^3 \lesssim \rho \lesssim 5\,10^{14}\mathrm{g/cm}^3$

* Die Komposition besteht aus Elektronen, (freien) Neutronen und (neutronenreichen) Kerne (A,Z). Letztere bilden ein Coulomb–Gitter (BCC)
* Mit steigender Dichte nimmt die Anzahldichte der freien Neutronen zu und die der Elektronen ab. Der Entartungsdruck der Neutronen steigt (Entartung ist nicht relativistisch, da $E_F^n \ll m_n c^2$) und der der Elektronen nimmt ab. Der Druckbeitrag der Elektronen wird schließlich unwichtig.
* Ab $\rho \approx 2\,10^{12}\mathrm{g/cm}^3$ wird der Beitrag der Kerne zunehmend unwichtiger, da freie Neutronen den Druck dominieren. Das Coulombgitter löst sich auf,

[1] Harrison, Thorne, Wakano & Wheeler (1965), „Gravitation Theory and Gravitational Collapse“, University of Chicago Press.

[2] Baym, Pethick & Sutherland (1971), ApJ **170**, 299; Baym, Bethe & Pethick (1971), Nucl.Phys **175**, 225.

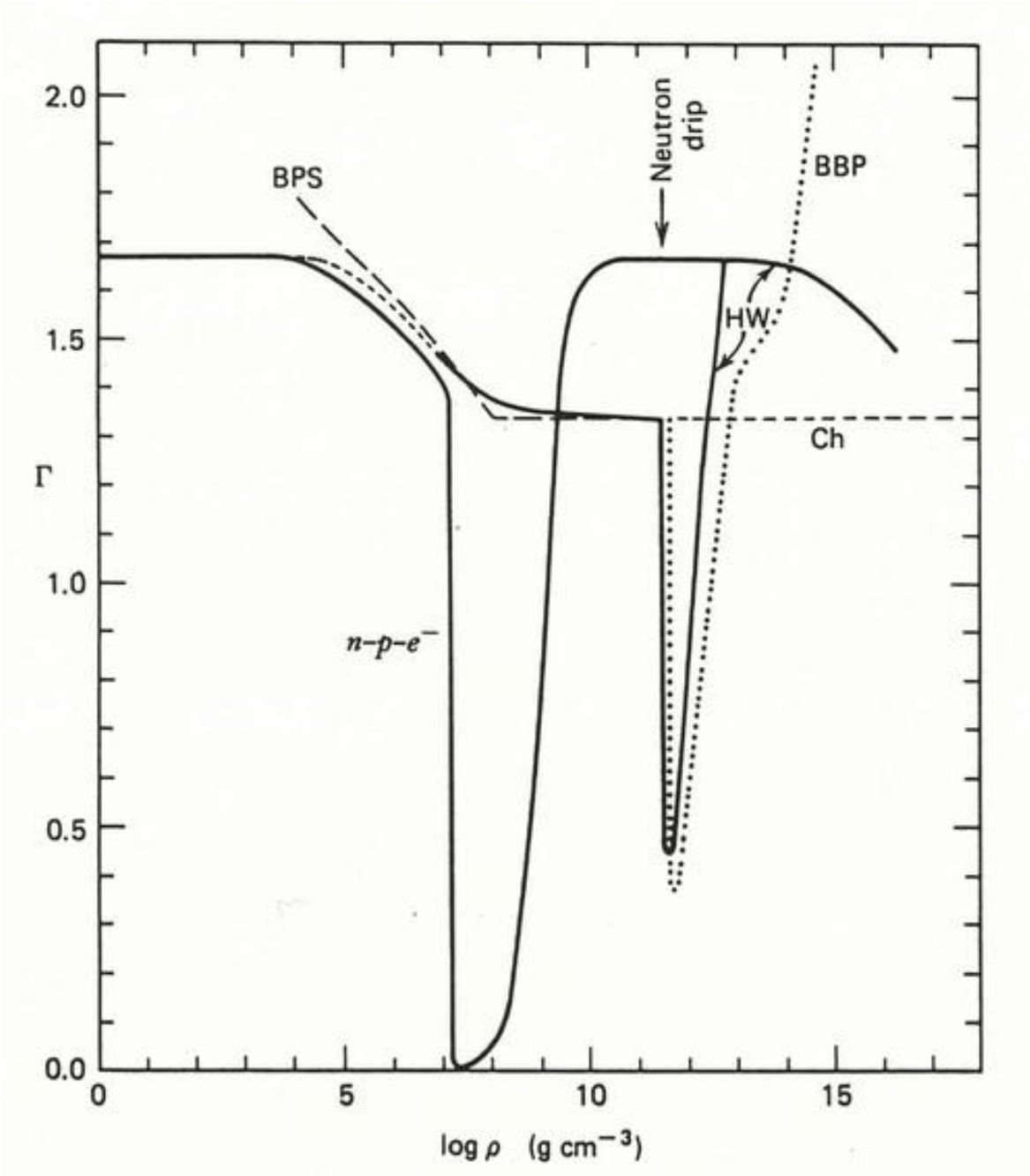


Abbildung 4.2: Adiabatenindex $\Gamma \equiv (d \ln P / d \ln \rho)$ als Funktion der Dichte für die in Fig. 4.1 gezeigten Zustandsgleichungen (Abb. 2.3 aus Shapiro & Teukolsky).

aber Kerne existieren bis $\rho \approx \rho_{nuc} = 2.8\,10^{14}\mathrm{g/cm}^3$. Bei noch höheren Dichten $\rho \gtrsim \rho_{nuc}$ lösen sich die Kerne auf.

* Im Bereich $\rho \gtrsim 2\rho_{nuc}$ ist die Zustandsgleichung weitgehend unbekannt.
* Modelle: Baym, Bethe & Pethick (**BBP–EOS)**) verwenden eine Massenformel $M_A(A, Z)$ gemäß dem Tröpfchen–Modell (compressible liquid drop) unter Berücksichtigung der Ergebnisse detaillierter Vielteilchenrechnungen (insbesondere der Verringerung des Oberflächenterms wegen des Vorhandenseins freier Neutronen). Die BBP–EOS ist anwendbar bis $\rho \approx 5\,10^{14}\mathrm{g/cm}^3$.
  Ein wichtiges Ergebnis der BBP–EOS: $\Gamma < 4/3$ im Dichtebereich $4\,10^{11}\mathrm{g/cm}^3 \lesssim \rho \lesssim 7\,10^{12}\mathrm{g/cm}^3$.
* Probleme: Für $\rho > \rho_{nuc}$ besteht die hadronische Materie aus einem Hadronen–Gas, das kräftig miteinander wechselwirkt. Der dominierende Druckbeitrag ist die (starke) Nukleon–Nukleon Wechselwirkung. Hier gibt es verschiedene Vorschläge zur Berechnung der EOS, je nachdem wie die Wechselwirkung zwischen den Nukleonen beschrieben wird (nichtrelativistische Vielkörpertheorien oder relativistische Feldtheorien).

4) $\rho \gtrsim 5\,10^{14}\mathrm{g/cm}^3$

* Keine Kerne mehr vorhanden
* Nukleonen sind relativistisch entartet: $p_F^N > m_N c$
* Entstehung neuer Teilchen (X), u.a. Mesonen (π^-) und Hyperonen ($\Lambda, \Sigma^{0,\pm}, \Delta^{0,\pm}$), wird möglich, da $E_F^N > m_X c^2$.
* Modelle: Bethe & Johnson (**BJ–EOS**) verwenden ein Wechselwirkungs–Potential, das einer Überlagerung von Yukawa–Potentialen (mit an experimentellen Daten angepassten Parametern) besteht. Allerdings geben die Experimente keine genaue Information über die Wechselwirkung bei kleinen Abständen ($\lesssim 0.25\,\mathrm{fm}$).

5) offene Probleme bei $\rho > \rho_{nuc}$

* Unterdrückung von attraktiven Pion–Austausch–Prozessen in dichter Kernmaterie (virtuelle Zustände NN, NΔ, $\Delta\Delta$, wobei Δ die Delta–Resonanz des Nukleons bei $E = 1236\,\mathrm{MeV}$ ist) sollte EOS steifer machen.
* Erzeugung von π^-–Mesonen via $n \to p + \pi^-$ (falls $\mu_n - \mu_p > m_{\pi^-}c^2 \approx 139.6\,\mathrm{MeV}$) kann die EOS weicher machen. Es gibt Hinweise, dass dieser Effekt ab $\rho \gtrsim 2\rho_{nuc}$ auftritt.
  Auftreten eines Bose–Einstein–Kondensats aus Pionen mit Spin Null bei hinreichend kleiner Temperatur. Da das Kondensat aus einer großen Anzahl von Bosonen mit verschwindender kinetischer Energie besteht, tragen diese Bosonen nicht zum Druck bei, d.h. sie machen die EOS weicher
* Nach heutigen Vorstellung haben Nukleonen einen Radius von $\approx 0.5\,\mathrm{fm}$ und sind von einer Mesonenwolke umgeben, die etwa den doppelten Radius

aufweist. Bei Kerndichte ist der mittlere Abstand zwischen den Nukleonen etwa 2 fm, d.h. die Mesonenwolken überlappen sich nicht. Bei 6–facher Kerndichte ($\rho \simeq 1.6\,10^{15}\mathrm{g/cm}^3$) überlappen die Mesonenwolken, so dass die Wechselwirkung der einzelnen Mesonen berücksichtigt werden muss. In diesem Zustand ist hadronische Materie eine Art Flüssigkeit, bestehend aus Nukleonen, Leptonen und Mesonen. Bei noch höheren Dichten findet ein Phasenübergang von hadronischer Materie in ein **Quark–Gluon Plasma** statt. Die genaue Dichte für diesen Phasenübergang steht noch nicht fest ($\rho_Q \simeq (5-8)\rho_{nuc}$).

∗ Nukleonen sind aus 3 Valenzquarks aufgebaut und die Mesonen aus Quark–Antiquark–Paaren. Ihre innere Struktur wird bestimmt durch die **Quantenchromodynamik** (QCD). Im Zentrum von NS werden die Neutronen und Protonen so dicht gepackt, dass eventuell ein **Quarksee** entsteht (asymptotische Freiheit der starken Wechselwirkung bei hoher Dichte). Wenn einmal eine normale Quark–Komponente (nur u und d Quarks) im Zentrum gebildet wird, können sich die u und d Quarks über die schwache Wechselwirkung in seltsame Quarks (s) umwandeln, da diese eine geringere Masse besitzen. Bei diesem Prozess werden freie Neutronen absorbiert und der NS wandelt sich (bis auf seine Kruste, die keine freie Neutronen enthält) in einen **seltsamen Quarkstern** um.

Ein detaillierter Vergleich verschiedener Zustandsgleichungen für Neutronensterne wurde von Arnett & Bowers (Astrophys. J. Suppl., 1977, **33**, 415) vorgenommen (siehe Abb. 4.3 – 4.4). Die in den Abbildungen vorkommende **baryonische Masse** M_A ist dabei definiert als

$$M_A \equiv m_u \int \frac{4\pi r^2 n(r) dr}{\sqrt{1-2Gm(r)/rc^2}}$$

und die **gravitative Masse** als

$$M_G \equiv m(R)\,,$$

wobei $m(r)$ die Metrikfunktion aus der TOV–Gleichung (siehe Gl. 3.42), R der Radius des Neutronensterns und $n(r)$ die Anzahldichte der Baryonen ist. Beobachtete Neutronensternmassen von Radiopulsaren zeigt die Abb. 4.5.

- Struktur

  Neutronensterne haben eine Art Schalenstruktur (siehe Abb. 4.6)

  – Die **äußere Kruste** besteht aus einem Gitter von vollständig ionisierten Eisenatomkernen und einem entarteten Elektronengas. Sie ist einige hundert Meter

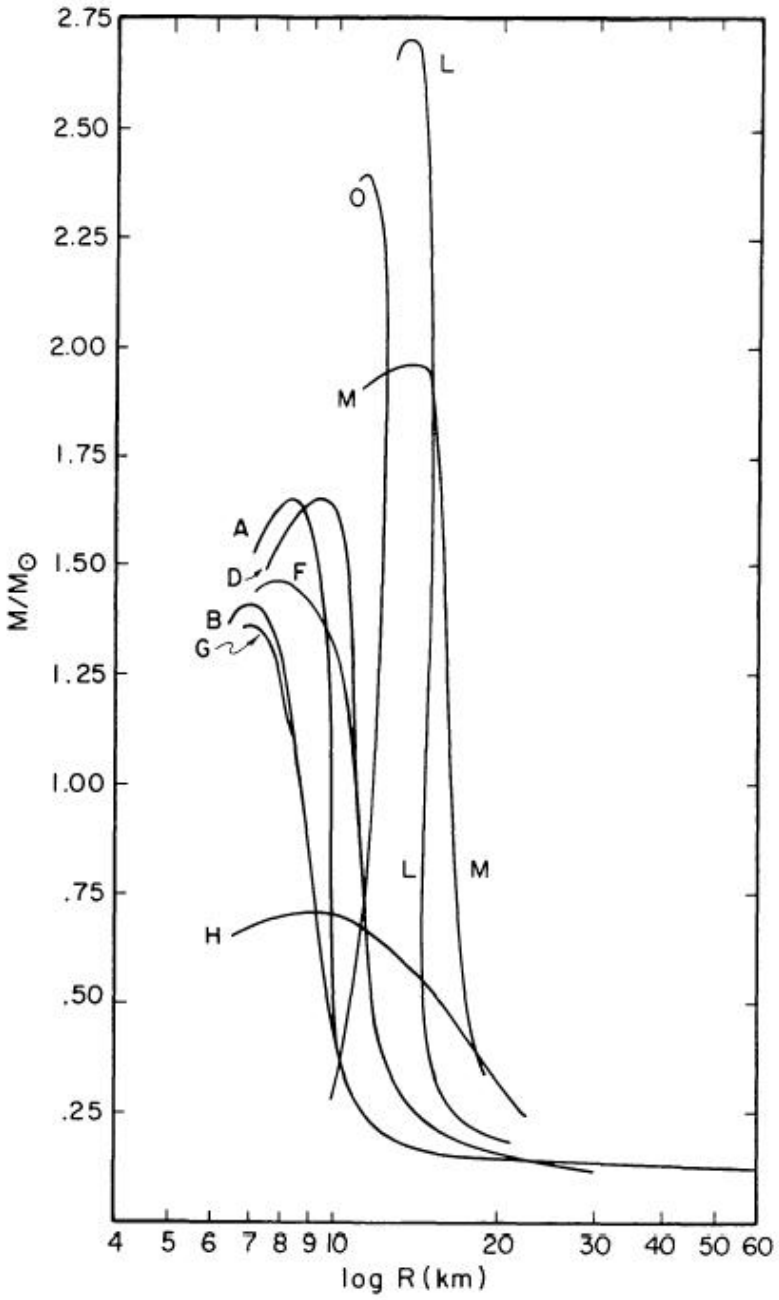


Abbildung 4.3: Beziehung zwischen gravitierender Masse und Radius für ausgewählte Neutronenstern–Zustandsgleichungen (Abb. 11 aus Arnett & Bowers, 1977).

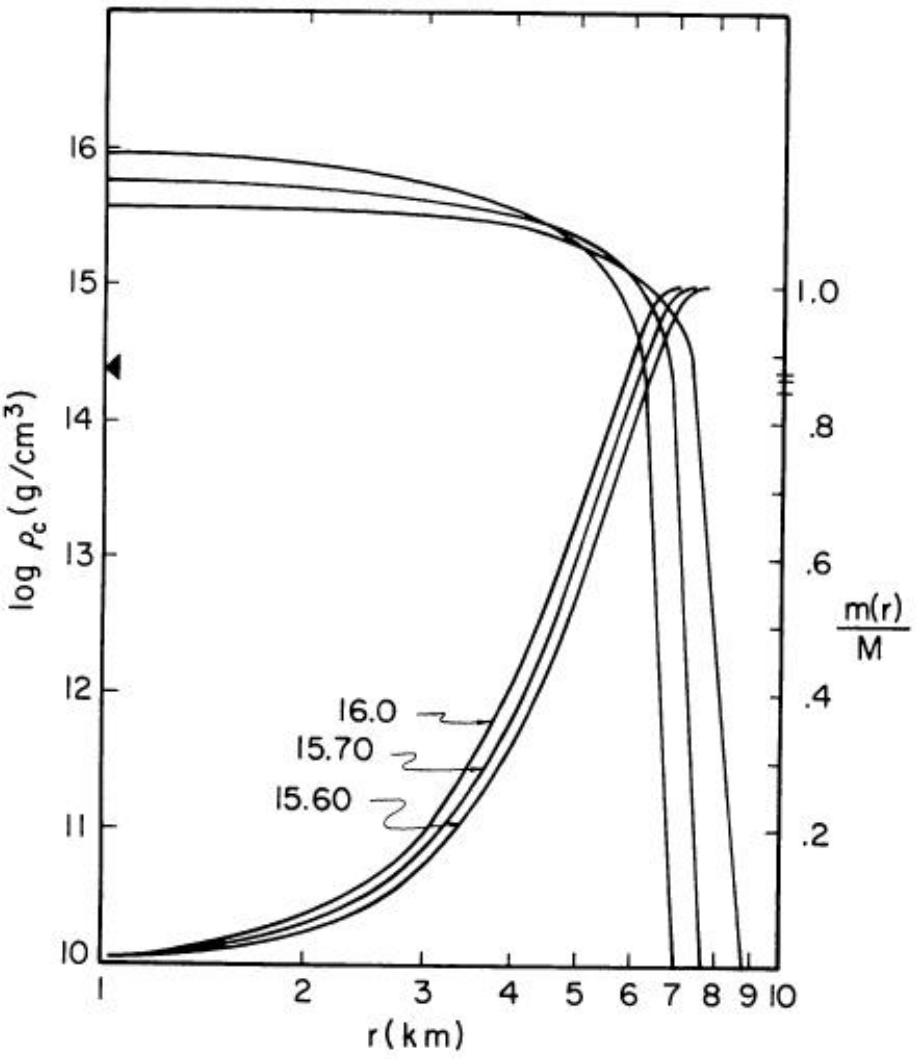


Abbildung 4.4: Dichteprofile (linke Skala) und Massenprofile (rechte Skala) eines kalten Neutronensterns als Funktion des Radius (EOS: Reid soft core mit reduzierter Hyperon-Hyperon Anziehung) für drei verschiedene Zentraldichten. Die Zahlen an den Kurven entsprechen $\log \rho_c$. Die Striche an der rechten Skala (zwischen $0.8 < m(r)/M < 0.9$) markieren für jedes der Modelle den Anteil der NS–Masse mit $\rho > 10^{15}\mathrm{g/cm}^3$. An der linken Skala ist die Kerndichte mit einem Symbol markiert. (Abb. 6 aus Arnett & Bowers, 1977).

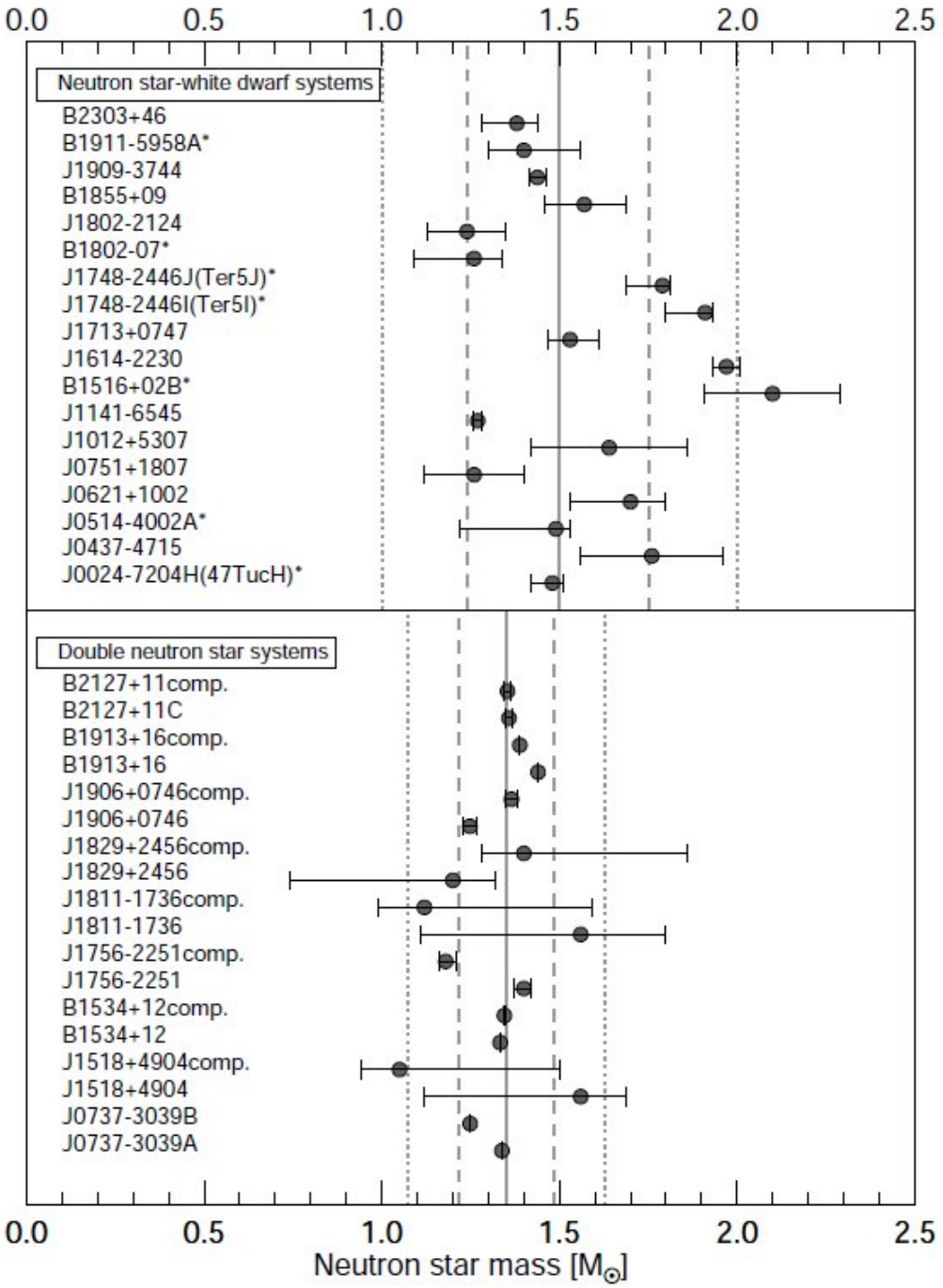


Figure 1. Measured masses of radio pulsars. All error bars indicate the central 68% confidence limits. Vertical solid lines are the peak values of the underlying mass distribution for DNS ($m = 1.35$ $M_\odot$) and NS-WD ($m = 1.50$ $M_\odot$) systems. The dashed and dotted vertical lines show the central 68% and 95% predictive probability intervals of the underlying mass distribution shown in Figure 2. "⋆" points to pulsars found in globular clusters.

Abbildung 4.5: aus Kiziltan, Kottas & Thorsett, 2010, *arXiv:1011.4291*

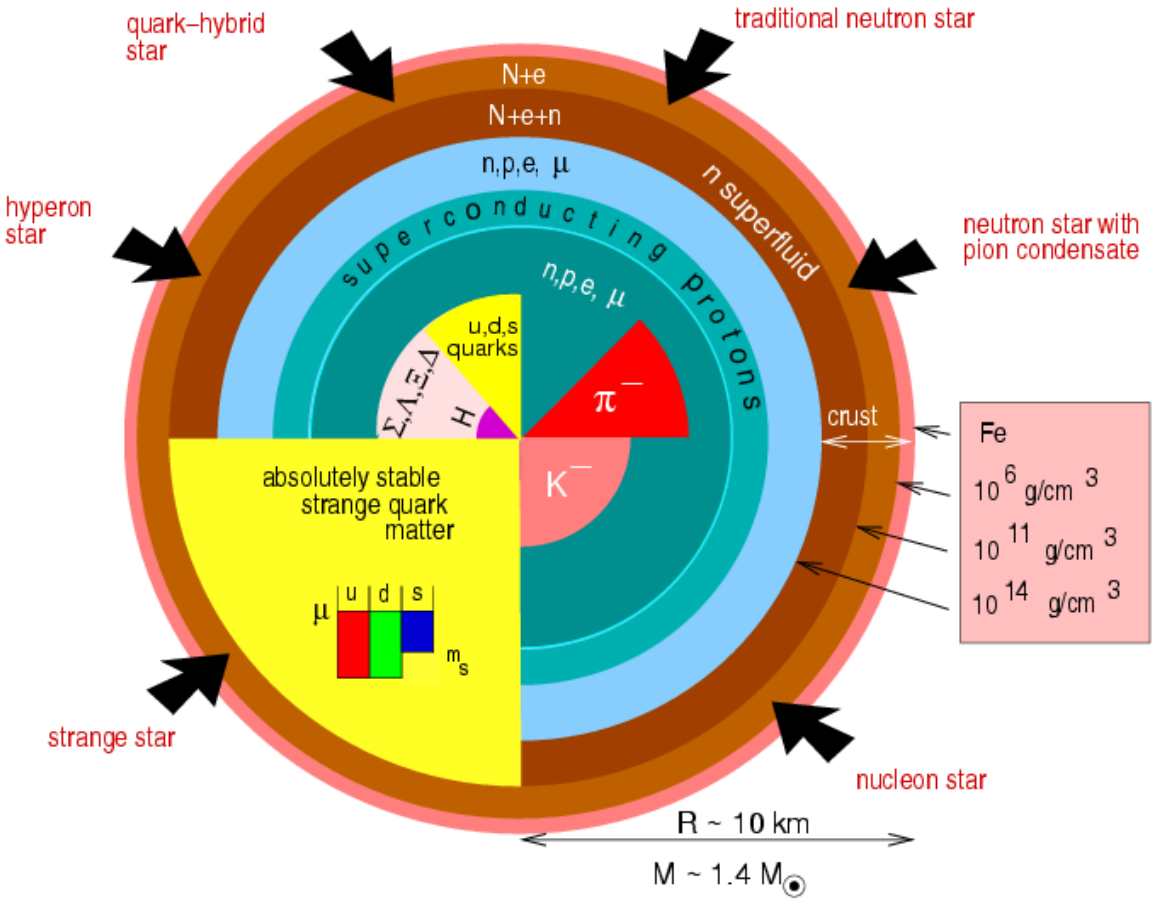


Abbildung 4.6: Schematischer Aufbau von Neutronensternen und anderen hypothetischen kompakten Sternen (mit freundlicher Genehmigung von Fridolin Weber, Univ. Notre Dame, USA).

dick. Die Dichte in der äußeren Kruste nimmt nach innen zu. Erreicht sie die den Wert von $3\,10^{11}\mathrm{g/cm}^3$, so verdampfen die Neutronen aus den Kernen (neutron drip).

- Die sich anschließende **innere Kruste** besteht aus schweren Kernen, einem entarteten Elektronengas und einem Neutronengas. Sie ist etwa 1 km dick.
- Oberhalb von Kerndichte und noch weiter innen im NS ist die Materie so dicht gepackt, dass die Neutronen nun eine Art Flüssigkeit bilden, zusammen mit einem geringen Anteil von Elektronen, supraleitenden Protonen und Myonen. Diese **superfluide Neutronen–Flüssigkeit** enthält die meiste Masse des NS.
- Im eigentlichen Zentrum massereicher NS werden die physikalischen Eigenschaften der Materie noch bizarrer. Die Dichte errecht etwa den 10–fachen Wert der Kerndichte, und die Quarks als Bausteine der Neutronen werden frei gesetzt. Das Zentrum eines NS mit $2M_\odot$ könnte aus **Quarkmaterie** bestehen.

4.3 Entstehung von Neutronensternen

Literatur: Müller, E., 1998, in: Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow, 27th Saas-Fee Advanced Course Lecture Notes, eds. O. Steiner and A. Gautschy, Springer-Verlag, Berlin

- **Core-Kollaps** (Abb. 4.7)
  - Stern hat am Ende seiner thermonuklearen Entwicklung Zwiebelschalenstruktur bzgl. Komposition
  - typische Bedingungen im zentralen Fe-Ni-Core: $\rho_\mathrm{c} \approx 10^{10}\,\mathrm{g/cm}^3$, $T_\mathrm{c} \approx 10^{10}\,\mathrm{K}$, $M_\mathrm{c} \approx M_\mathrm{Ch}$, $\tau_\mathrm{coll} \approx \tau_\mathrm{dyn} \sim \bar{\rho}^{-1/2} \approx 1\,\mathrm{msec}$
  - solange $\rho \lesssim 3 \times 10^{12}\,\mathrm{g/cm}^3$: starke und elektromagnetische WW im Gleichgewicht; schwache WW nicht im Gleichgewicht und ν_e's können praktisch ungehindert entweichen!
  - e^-–Einfänge auf freie Protonen: $\mathrm{e}^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}$
    (Schaleneffekte unterdrücken Elektroneneinfang auf die gebundenen Protonen in den neutronenreichen Atomkernen) $\Longrightarrow$ $Y_\mathrm{e} \downarrow$!
  - wenn $\rho \gtrsim 3\,10^{12}\mathrm{g/cm}^3 \longrightarrow \tau_\mathrm{diff} > \tau_\mathrm{coll}$
    - Neutrino trapping: ν_e's sind während des Kollaps im Core "gefangen"
    - $\mathrm{n}_{\nu_\mathrm{e}} \uparrow \rightarrow$ ν_e's entarten

* Materie gelangt ins β-Gleichgewicht, in dem die chemischen Potentiale die Bedingung $\mu_e + \mu_p = \mu_n + \mu_{\nu_e}$ erfüllen.

– Hydrodynamik: Fe-Core separiert in
  * inneren Core (IC), der homolog ($v \propto r$) kollabiert, in dem die Materie in sonischem Kontakt steht ($|v| \lesssim c_s$) und dessen Masse $M_{IC} \approx M_{Ch}(Y_e)$ (siehe Gl. 2.59).
  * äußeren Core der mit Überschallgeschwindigkeit ($|v| > c_s$) kollabiert.

– für $\rho \lesssim 2\,10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$ gilt $\gamma \equiv d\ln p/d\ln\rho|_S < 4/3$, d.h. die relativistischen Leptonen (e^-, ν_e) dominieren den Druck bis zum Erreichen von Kernmateriedichte

– für $\rho \gtrsim \rho_{nuc} \approx 2.8\,10^{14}\,\mathrm{g/cm^3}$ gilt $\gamma \gtrsim 2.5$, da Kernmaterie extrem inkompressibel
  * Kollaps kommt zum Stillstand, wenn $\rho \gtrsim \rho_{nuc}$ ("core bounce" oder Rückprall)
  * Entstehung einer nach außen laufenden Stoßwelle am Rande des inneren Cores bei

$$M_{Stoß} \approx M_{IC}(Y_e)|_{bounce} \approx 0.6 - 0.8\,M_\odot$$

– Energetik: freiwerdende Bindungsenergie bei der Bildung eines NS in einer Supernova-Explosion:

$$E_b \approx \frac{GM_{NS}^2}{R_{NS}} \approx 3\,10^{53}\,\mathrm{erg}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2\left(\frac{R}{10\,\mathrm{km}}\right)^{-1} \approx 100 - 200\,\mathrm{MeV/Nukleon}$$

davon $\sim 99\%$ in Neutrinos
$\sim 10^{-2} \longleftrightarrow \sim 10^{51}\,\mathrm{erg}$ in kin. Energie der ausgeschleuderten Materie
$\sim 10^{-4} \longleftrightarrow \sim 10^{49}\,\mathrm{erg}$ in elektromagnetischer Strahlung

- **Prompte Explosion und Ausbreitung der Stoßwelle** (Abb. 4.8)

– Anfangsenergie der Stoßwelle ≈ kinetische Energie des homolog kollabierenden inneren Cores kurz vor dem Rückprall; aus hydrodynam. Simulationen:

$$E_{Stoßwelle} \approx (4 - 10) \times 10^{51}\,\mathrm{erg}$$

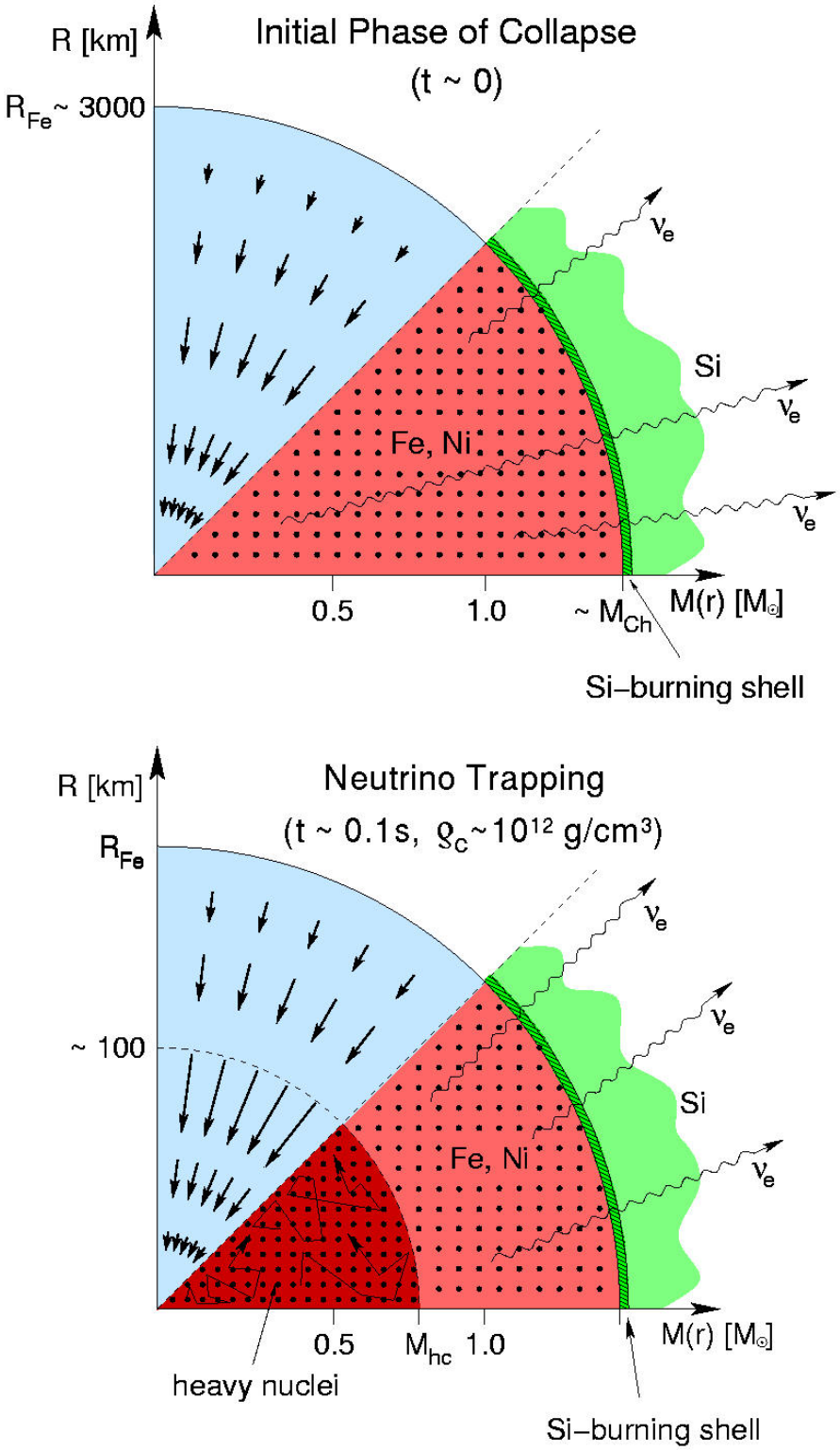


Abbildung 4.7: Gravitationskollaps–Supernova: Core vor dem Kollaps (oben) und zum Zeitpunkt des „neutrino trapping“ (unten).

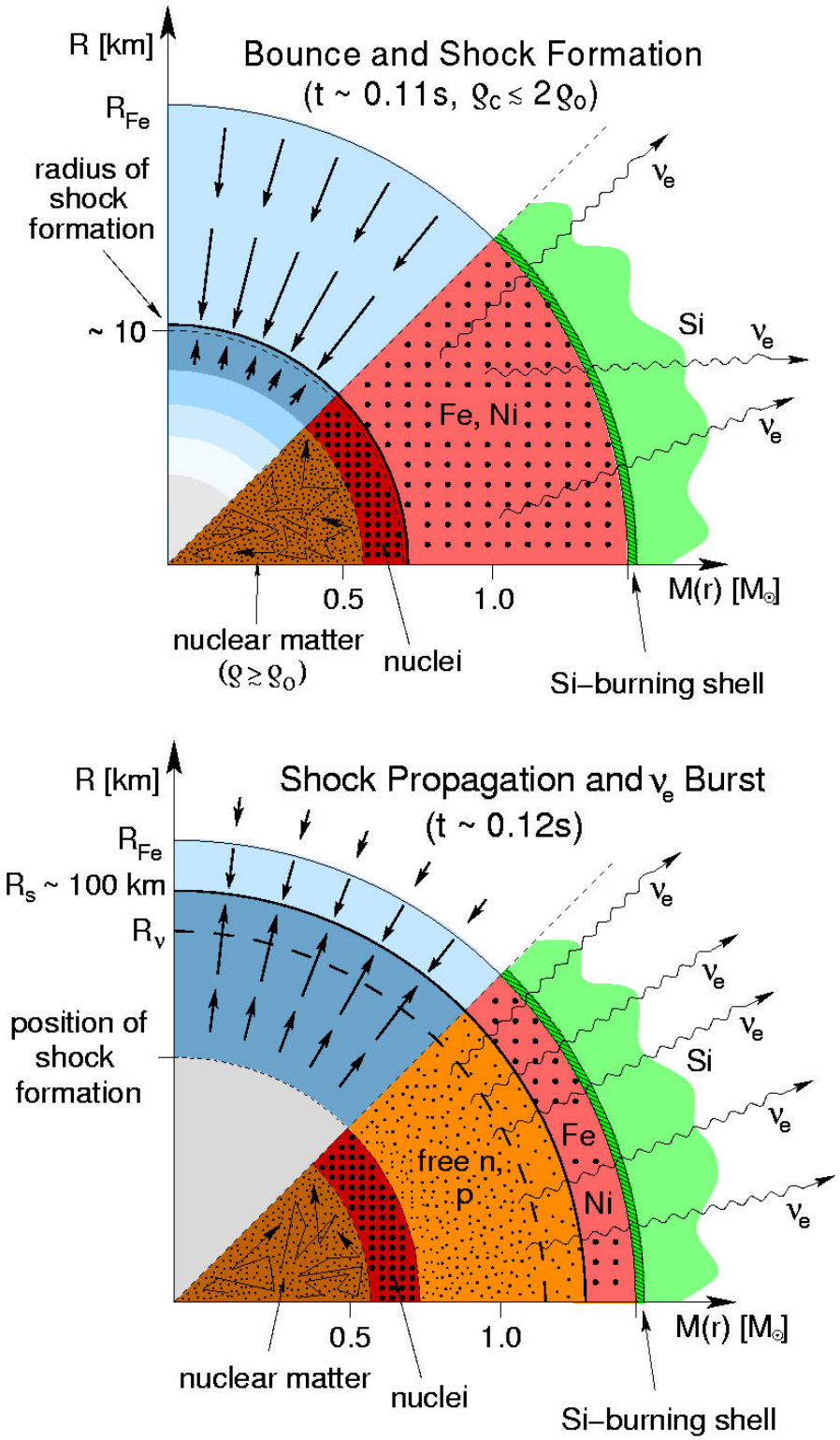


Abbildung 4.8: Gravitationskollaps–Supernova: Rückprall mit Stoßentstehung (oben) und Stoßausbreitung mit Neutrinoblitz (unten).

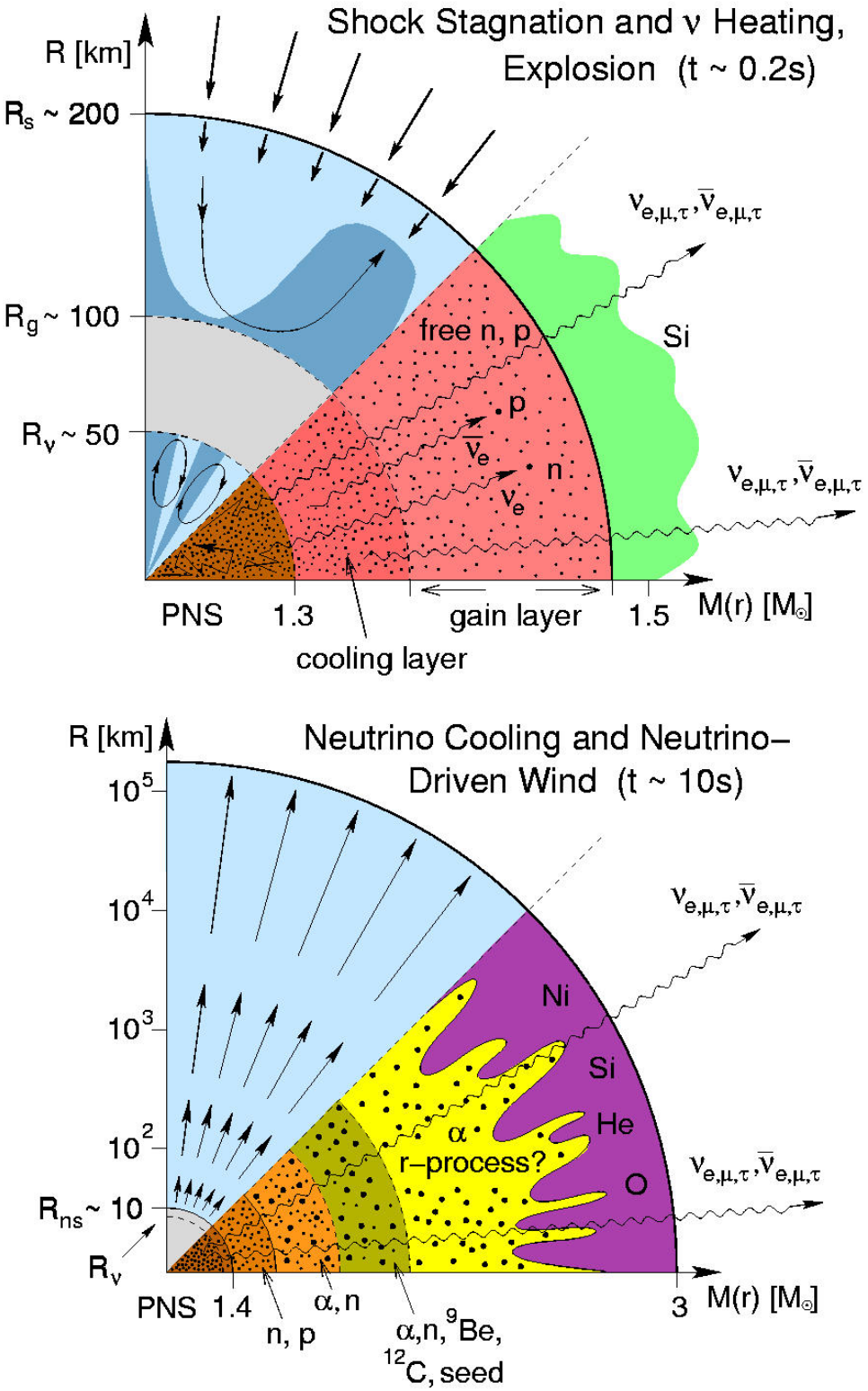


Abbildung 4.9: Gravitationskollaps–Supernova: Stoßstagnation mit Neutrinoheizen (oben) und Neutrinokühlphase mit neutrino–getriebenem Wind (unten).

– Stoßwelle verliert Energie durch Photodisintegration von Fe-Kernen in freie Nukleonen und α-Teilchen:

$$\Delta E_{\rm loss} \approx 8\,{\rm MeV/Nukleon} \quad \Leftrightarrow \quad 1.6 \times 10^{51}\,{\rm erg}/0.1\,M_\odot$$

– Stoßwelle läuft sich nach Durchlaufen von

$$\Delta M_{\rm loss} \approx \frac{E_{\rm Stoßwelle}}{\Delta E_{\rm loss}} \approx 0.25 - 0.7\,M_\odot$$

tot! (und wird zum Akkretionsstoß)

– prompte Explosion funktioniert, nur wenn

$$\Delta M_{\rm loss} > M_{\rm Fe-Core} - M_{\rm Stoß}$$

d.h. wenn die anfängliche Masse des Fe-Cores hinreichend klein und der Stoß möglichst weit aussen entsteht.

– Mangel der („alten erfolgreichen“) prompten Explosionsmodelle: Wechselwirkung der aus dem Core (durch Diffusion und/oder Konvektion) entweichenden Neutrinos mit der Hülle nicht ausreichend berücksichtigt!

- **Verzögerte Explosion** (Abb. 4.9 und 4.10)

– Neutrinos entweichen auf Zeitskalen $\tau \approx 1\,{\rm s}$ durch Diffusion und/oder Konvektion aus dem optisch dicken Core und deponieren während einiger 100 ms einige Prozent ihrer Energie in den Schichten zwischen Neutrinosphäre (Analogon zur Photosphäre) und der Stoßwelle
$\Longrightarrow$ Erhöhung des Druckes $\Longrightarrow$ Expansion dieser Schichten
$\Longrightarrow$ Entstehung einer Zone geringer Dichte und höhere Temperatur (heiße Blase oder “hot bubble”)

– Gas in dieser Zone kühlt durch ν-Verluste über

$$\mathrm{e}^- + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}$$

$$\mathrm{e}^+ + \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \bar{\nu}_\mathrm{e}$$

und wird durch energiereichere ν's aus dem Core über die Umkehrprozesse

$$\nu_\mathrm{e} + \mathrm{n} \rightarrow \mathrm{e}^- + \mathrm{p}$$

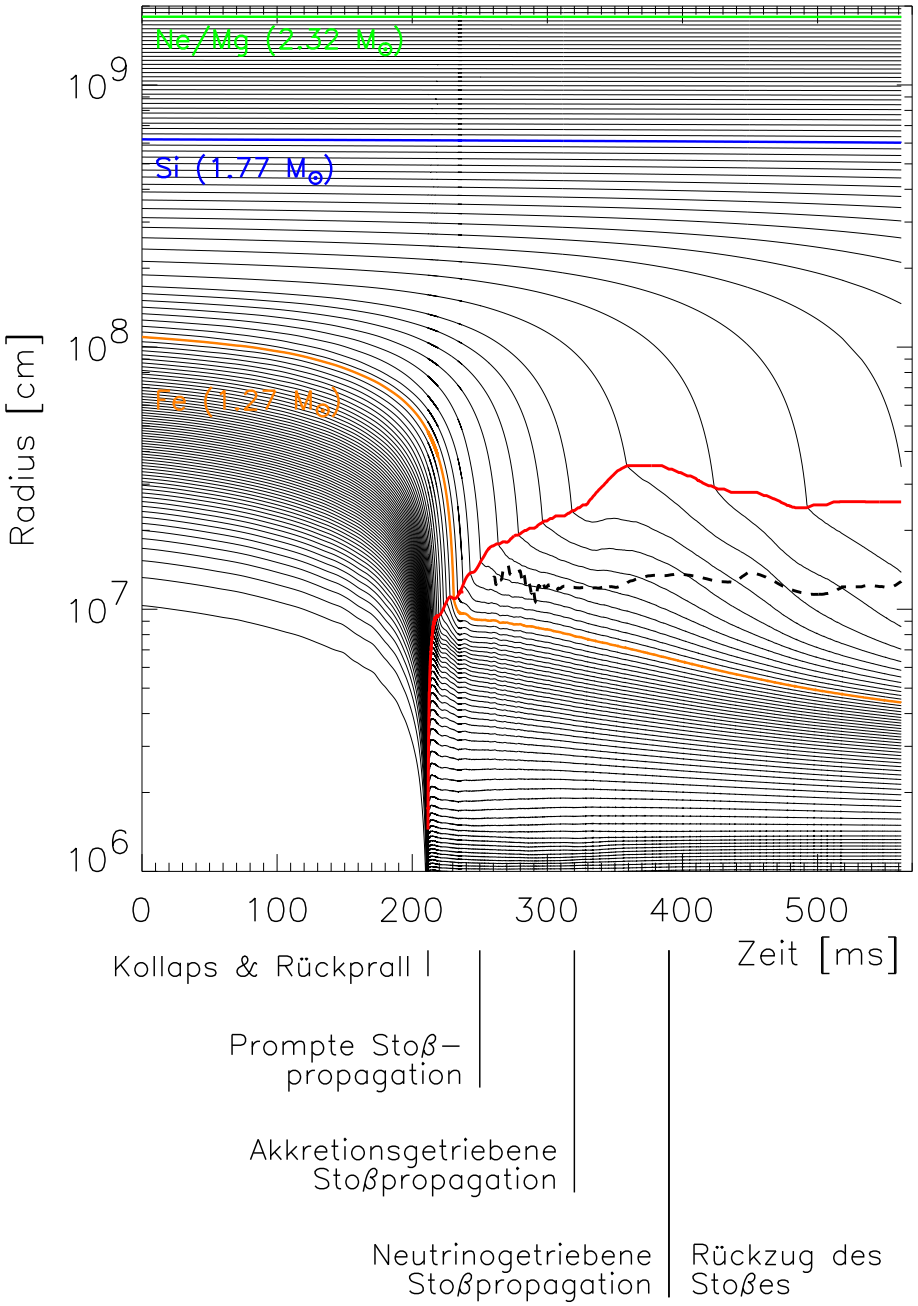


Abbildung 4.10: Sphärisch–symmetrische hydrodynamische Simulation des Kollaps eines Sterns mit $M = 15M_{\odot}$. Das Bild zeigt die zeitliche Entwicklung der Radien ausgewählter Massenschalen vom Beginn des Kollaps bis etwa 0.5 sec nach dem Rückprall. Die Position der Stoßwelle ist durch die rote Linie und die der Neutrinosphäre durch die gestrichelte Kurve gekennzeichnet. Die orange, blaue und grüne Massenschale markieren den äußeren Rand des Eisenkerns, der Si–Schale, bzw. der Ne–Schale zu Beginn des Kollaps (Rampp & Janka, Astrophys. J. Lett. 2000, 539, L33).

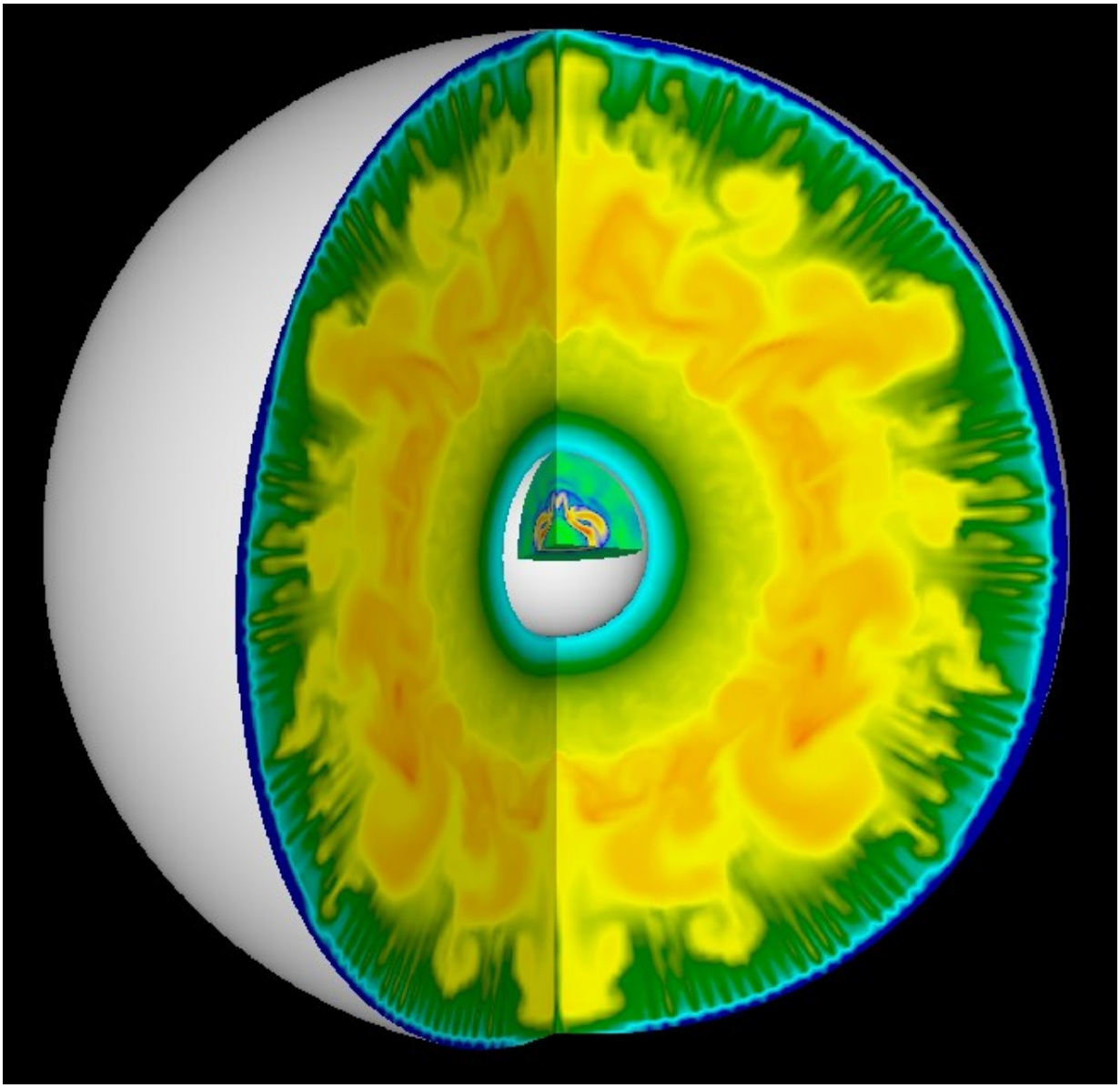


Abbildung 4.11: Farbcodierte Entropie in der Konvektionszone im Zentrum einer Supernova etwa 0.1 sec nach der Stoßentstehung. Der Neutronenstern in der Mitte hat einen Radius von etwa 50 km, die Stoßfront am äußeren Rand befindet sich bei knapp 300 km.

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$$

geheizt.

- Probleme:
  - Neutrino-Opazitäten in dichten, korrelierten Plasmen
  - numerische Behandlung des Neutrino-Transports: Fermionen ("blocking"), verschiedene Neutrinosorten ("multi-flavor transport"), stark energie- und winkel-abhängige Wirkungsquerschnitte ("multi-group, multi-angle transport")
    $\Longrightarrow$ extrem aufwendiger Boltzmannlöser notwendig!
  - Proto–Neutronenstern und neutrino–geheizte Blase sind konvektiv instabil; Supernova–Beobachtungen implizieren großskalige Mischprozesse und Entstehung von Inhomogenitäten während der Explosion
    $\Longrightarrow$ mehrdimensionale Simulationen erforderlich!
- **Verzögerter Explosionsmechamismus funktioniert im Prinzip, aber ob und wie eine konkreter Stern explodiert ist immer noch unklar!**

- falls Explosion erfolgreich: ca 5-50 s nach Kollaps ist der Proto-Neutronenstern bereits auf $\sim 10^{10}$ K (≈ 1 MeV) durch Neutrinoemission abgekühlt und wird für ν's durchsichtig.
  Mit $k_B T \approx 1$ MeV ist der Proto–Neutronenstern bereits so kalt (Fermi-Energie der Neutronen ≈ 100 MeV), dass die Neutronen superfluid werden (Gap-Energie ~ 1 MeV)
  $\Longrightarrow$ ein Neutronenstern ist entstanden

4.4 Rotierende Neutronensterne und Pulsare

Die beobachteten Perioden von rotierenden Neutronensternen bzw. Pulsaren (siehe Abb 4.12) liegen zwischen mehreren Sekunden und 1.56 msec (PSR 1937+21).

- Beschreibung

  Die (allgemein–relativistische) Beschreibung rotierender Neutronensterne ist wesentlich aufwendiger als im Falle von nicht–rotierenden Neutronensternen. Die drei Hauptgründe dafür sind:

  - **Rotationsbedingte Deformationen** treten auf (am Pol abgeflacht und am Äquator aufgebläht).
    $\rightarrow$ Metrikfunktionen hängen von der Winkelkoordinate θ ab.

- **Rotation stabilisiert**, d.h. die maximale Masse eines rotierenden NS ist größer als die eines entsprechenden nicht–rotierenden NS (siehe Abb 4.13) . Die zusätzliche Masse bedingt eine entsprechende Änderung der Raumzeit.

  $\Longrightarrow$ Linienelement hängt von Rotationsfrequenz des NS ab.

- Rotierende NS „ziehen“ die Raumzeit mit sich: **dragging of local inertial frames**.

  $\Longrightarrow$ Linienelement enthält zusätzlichen nicht–diagonal Term $g^{t,\varphi}$.

  $\Longrightarrow$ Impliziert eine Konsistenzbedingung für die Sternstrukturgleichungen: Ein NS, der mit der Frequenz Ω rotiert, wird rotationsbedingt deformiert und versetzt seinerseits die lokalen Inertialsystem gemäß einer ortsabhängigen Winkelgeschwindigkeit $\omega(r, \theta, \varphi)$ in Rotation.

In sphärischen Koordinaten lautet das Linienelement einer stationären, axialsymmetrischen Konfiguration

$$ds^2 = -e^{2\nu}(dt)^2 + e^{2\psi}(d\varphi - \omega dt)^2 + e^{2\mu}(d\theta)^2 + e^{2\lambda}(dr)^2 \,,$$

wobei jede der vier Metrikfunktion ν, ψ, μ und λ explizit von der Radialkoordinate r und vom Polwinkel θ, sowie implizit von der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit Ω der Konfiguration abhängt. Die zusätzliche Größe ω beschreibt die Winkelgeschwindigkeit der lokalen Inertialsysteme und hängt ebenfalls explizit von r und θ und implizit von Ω ab.

Die **relative Winkelgeschwindigkeit** $\bar{\omega}(r, \theta, \Omega) \equiv \Omega - \omega(r, \theta, \Omega)$ bestimmt die Größe der Zentrifugalkraft, die sowohl in der Newtonschen als auch in der Einsteinschen Theorie durch die Rotationsrate eines Flüssigkeitselements relativ zum lokalen Inertialsystem gegeben ist.

Relativistische Modelle für **langsam rotierende NS** mit $\Omega \ll \Omega_K(R_\star)$ (Keplergeschwindigkeit) wurden von Hartle & Thorne bereits 1968 konstruiert (Astrophys. J. **153**, 807). In dieser analytischen Approximation kann die Metrik als Störung der Schwarzschild–Metrik geschrieben werden. Sie enthält 3 Parameter: Die totale Masse M, den Drehimpuls $J_\star = k^2 M R_\star^2 \Omega_\star$, $k^2 \simeq 0.4$ und das Quadrupolmoment $Q_\star$ des Modells.

Für **schnell rotierende NS** müssen die Einsteinschen Gleichungen für die metrischen Koeffizienten numerisch berechnet werden.

Eine detaillierte Beschreibung relativistischer Modelle rotierender NS findet man z.B. in dem Buch von F. Weber (*Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*, Inst. of Physics, 1999).

- Bedingungen an rotierende Neutronensterne

  - Innerer Aufbau (analog zu nicht–rotierenden NS):

* AR ist die richtige Gravitationstheorie
* $0 < dP/d\rho < c^2$, d.h. Stabilität und Kausalität
* EOS für hohe Dichten geht glatt über in bekannte EOS für kleine Dichten, z.B. in die BPS–EOS

$\Longrightarrow$ Je nach Masse des NS sind minimale Rotationsperioden von $P_{min} \approx 0.5\,\mathrm{msec}$ möglich

– Stabilität gegen Fliehkraft:

Für das Verhältnis von Fliehkraft zu Schwerkraft muss gelten:

$$\frac{\Omega^2 R^3}{GM} = 0.3 \left(\frac{P}{\mathrm{msec}}\right)^{-2} \left(\frac{R}{10\,\mathrm{km}}\right)^{3} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1} < 1$$

– NS soll dynamisch und säkular stabil sein gegenüber triaxialen (d.h. nicht–axialsymmetrischen) Deformationen, denn diese führen zur Emission von Gravitationswellen (Amplitude $h \propto \ddot{Q}$), die die Rotationsenergie und den Drehimpuls des NS wegtragen.

Die entsprechenden Kriterien sind im Rahmen der AR nicht genau bekannt. Für eine Polytrope vom Index n gelten in der Newtonschen Mechanik für den **Rotationsparameter** $\beta \equiv |\text{Rotationsenergie/Gravitationsbindungsenergie}|$ die Stabilitätskriterien

$$\beta \approx \frac{1}{2} I \Omega^2 \left(\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{R}\right)^{-1} \lesssim \begin{cases} 0.26 & \text{für dynamische Stabilität} \\ 0.14 & \text{für säkulare Stabilität} \end{cases}$$

wobei I das Trägheitsmoment des NS ist.

Abschätzung: In einem Neutronenstern mit harter EOS ist ρ ungefähr konstant (d.h. $n \approx 0$). Daraus folgt

$$\frac{\Omega^2 R^3}{GM} \lesssim \begin{cases} 0.8 & \text{für dynamische Stabilität} \\ 0.4 & \text{für säkulare Stabilität} \end{cases},$$

d.h. wenn man (strengstes Kriterium) säkulare Stabilität gegen triaxiale Deformation fordert muss die Rotationsperiode der Bedingung

$$P > P_{\min} \approx 0.8\,\mathrm{msec} \left(\frac{R}{10\,\mathrm{km}}\right)^{3/2} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1/2}$$

genügen. Für einen NS mit $M \approx 1.4 M_\odot$ und harter EOS gilt $R \approx 15\,\mathrm{km}$, d.h. $P_{\min} \approx 1.3\,\mathrm{msec}$.

Anwendung auf den bisher schnellsten Pulsar PSR 1937+21 mit $P = 1.558\,\mathrm{msec}$ $\Longrightarrow$ Dieser NS ist (gerade noch) säkular und dynamisch stabil.

- Weitere allgemeine Ergebnisse

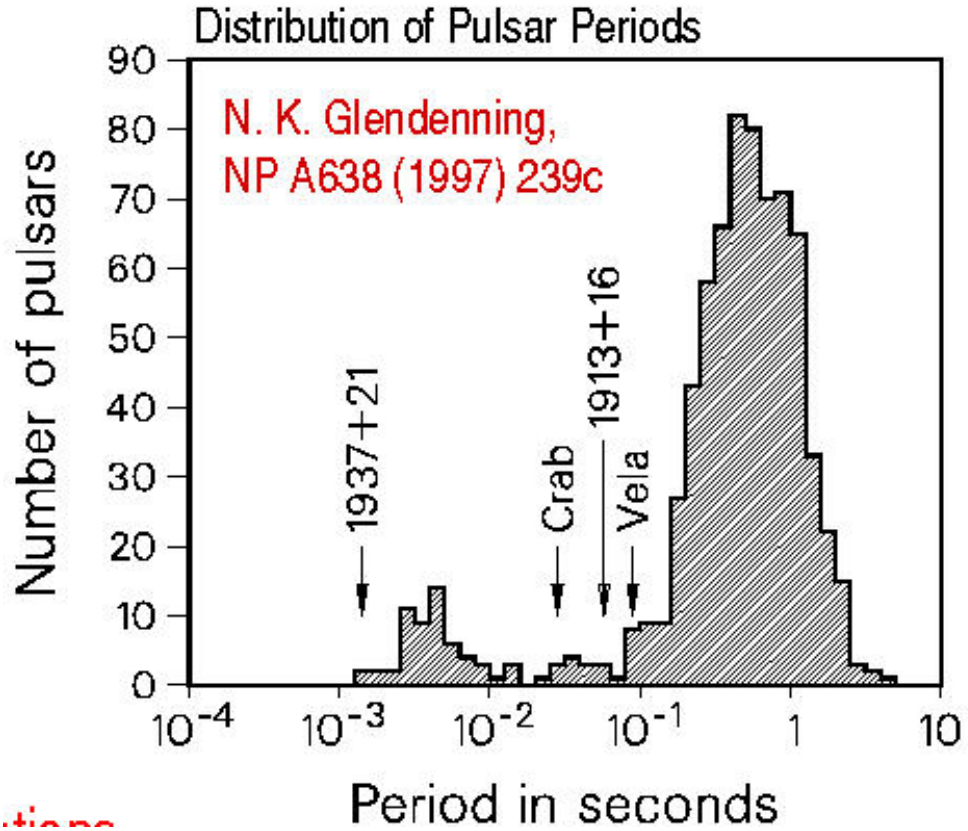


Abbildung 4.12: Beobachtete Pulsarperiodenverteilung.

- Schnelle **starre** Rotation erhöht die Grenzmasse nur relativ geringfügig um $\lesssim 20\%$ („supramassive“ NS; Abb. 4.13).
- Schnelle **differentielle** Rotation erhöht die Grenzmasse um einem Faktor 2 und mehr („hypermassive“ NS), wobei die extremsten, sehr schnell rotierenden NS dynamisch instabil gegen Fragmentation sind. Für dynamisch stabile, differentiell rotierende NS ist die Grenzmasse um bis zu 60% erhöht (Lyford, Baumgarte & Shapiro, ApJ, 583 (2003), 410).
- NS mit kritischer Masse, d.h. minimalem Radius, kann am schnellsten rotieren.
- Bei triaxialer Deformation verliert ein NS schnell Rotationsenergie bzw. Drehimpuls durch Gravitationswellen; damit nimmt seine Rotationsperiode zu, d.h. er rotiert langsamer.
- Die minimale Rotationsperiode eines NS mit harter EOS liegt bei $\approx 1\,\mathrm{msec}$. Mit einer weichen EOS können NS noch etwas schneller rotieren, ohne zu zerreißen.

- Pulsare und ihre Entwicklung

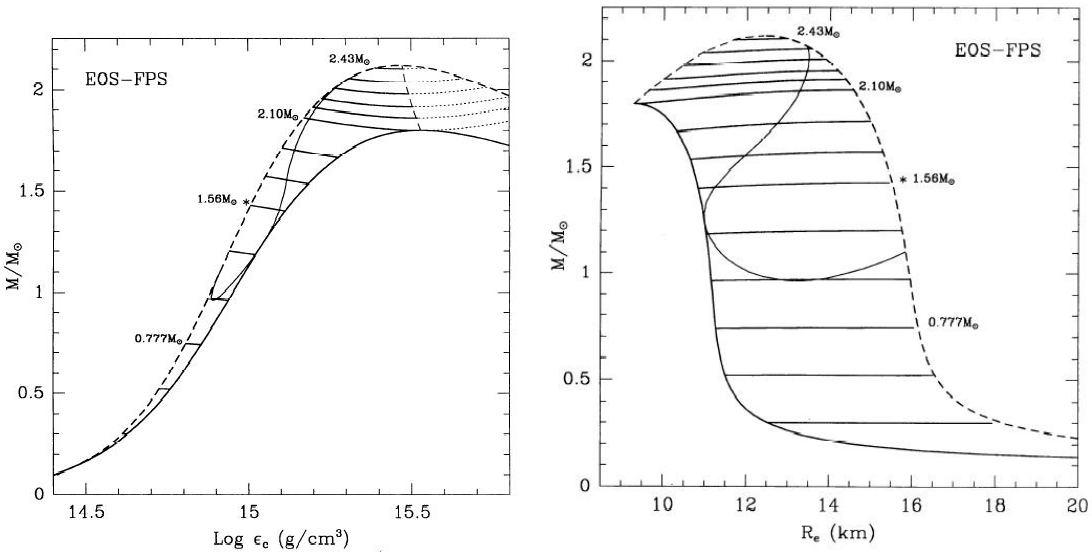


Abbildung 4.13: Gravitierende Masse als Funktion der zentralen Gesamtenergiedichte (links), bzw. des äquatorialen Radius (rechts) für Sequenzen von NS–Modellen mit konstanter Ruhemasse (Baryonenmasse) für eine gegebene, moderat steife Zustandsgleichung. Ausgewählte Sequenzen sind durch die zugehörige Ruhemasse gekennzeichnet. Die gestrichelte Linie markiert die Grenze, wo fliehkraftbedingter Massenverlust einsetzt. Die dazu annähernd parallele, durchgezogene Linie kennzeichnet den statischen (d.h. nicht–rotierenden) Grenzfall (aus Cook, Shapiro & Teukolsky, 1994, *Astrophys. J.* **424**, 823).

Die beobachteten Pulsare lassen sich in zwei Klassen einteilen (siehe Abb. 4.12): **„normale“ Pulsare** (≈ 800) mit Rotationsperioden $0.03\,[\text{sec}] \lesssim P \lesssim 8\,[\text{sec}]$ und **Millisekundenpulsare** (≈ 50) mit Rotationsperioden $1.5\,[\text{msec}] \lesssim P \lesssim 30\,[\text{msec}]$. Man nimmt an, dass Pulsare als „normale“ Pulsare geboren werden und sich auf sehr langen Zeitskalen zu Millisekundenpulsaren entwickeln.

- Der rotierende Core eines massereichen Sterns kollabiert zu einem Neutronenstern. Infolge **Drehimpulserhaltung** rotiert der neugeborene NS schneller und besitzt wegen der sehr hohen elektrischen Leitfähigkeit des Plasmas im Core infolge von **Magnetflusserhaltung** ein sehr starkes Magnetfeld ($B \simeq 10^{12}$ Gauss; sogenannte Magnetare können sogar Magnetfelder bis einige 10^{14} Gauss besitzen).

  $\Longrightarrow$ Ein junger NS ist ein rotierender, magnetischer Dipol, der elektromagnetische Strahlung emittiert.
- Der rotierende, magnetische NS ist als Pulsar beobachtbar, wenn seine gerichtete, elektromagnetische Strahlung die Erde einmal pro Rotationsperiode überstreicht.
- Durch die Abstrahlung verliert der Neutronenstern Energie, die er aus seiner Rotationsenergie deckt. Dadurch wird er mit der Zeit langsamer, d.h. die Rotationsperiode nimmt zu ($\dot{P} \simeq +10^{-15}\,\text{sec/sec}$). Die Rotationsenergie ist ausreichend, damit der NS für etwa 10^7 Jahre als („normaler“) Pulsar aktiv sein kann.
- In einem **Magnetfeld–Perioden–Diagramm** bewegt sich der NS infolge des Drehimpulsverlusts durch seine Abstrahlung von links oben nach rechts (Abb. 4.14). Er „stirbt“ als aktiver Pulsar, wenn eine bestimmte Kombination von Rotationsperiode und Magnetfeldstärke einen Grenzwert unterschreitet.
- Durch Massen- und Drehimpuls–Akkretion von einem Begleitstern (entweder ursprünglich vorhanden oder später eingefangen) beginnt der Pulsars wieder schneller zu rotieren (spin–up). Während der langen Akkretionsphase reduziert sich das Magnetfeld des Pulsars durch Ohmsche Dissipation. Der Pulsar bewegt sich im Magnetfeld–Perioden–Diagramm von rechts oben nach links unten (Abb. 4.14).
- Der NS wird als **Millisekundenpulsar** wiedergeboren: Er kann wieder strahlen, da sein schwächeres Magnetfeld durch seine schnellere Rotation kompensiert wird. Da das Magnetfeld nun schwächer ist ($B \simeq 10^8$ Gauss), ist auch die Abbremsung sehr gering ($\dot{P} \simeq +10^{-19}\,\text{sec/sec}$). Das charakteristische Abbremsalter $\tau_c \equiv P/(2\dot{P})$ beträgt etwa 10^9 Jahre.

  $\Longrightarrow$ Millisekundenpulsare sind extrem genaue Uhren.

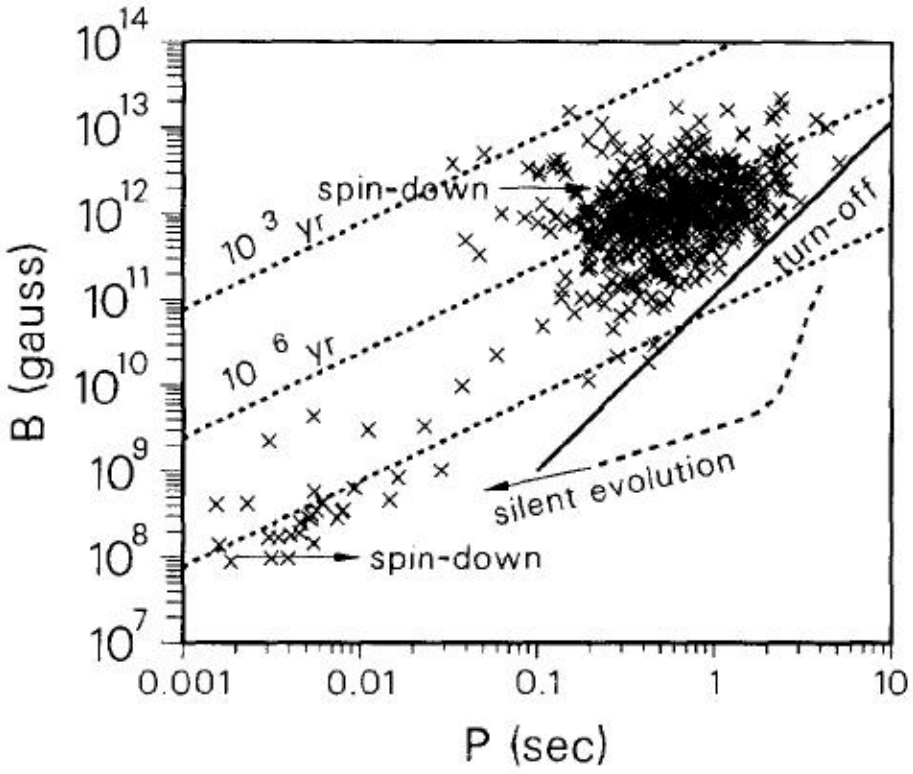


Abbildung 4.14: Magnetfeld–Perioden–Diagramm für Pulsare (aus Glendenning, 1998, *Nuclear Physics* **A638**, 239).

Kapitel 5

Schwarze Löcher

In den vorangegangen Kapiteln haben wir gesehen, dass sowohl Weiße Zwerge als auch Neutronensterne eine maximale Grenzmasse besitzen. Was geschieht mit einem kollabierenden Sternencore, dessen Masse größer als die Grenzmasse für Neutronensterne ist? Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ist in diesem Fall der Kollaps unaufhaltbar und ein **Schwarzes Loch** entsteht. Ein Schwarzes Loch ist ein begrenztes Gebiet der Raumzeit, das kausal von der „Aussenwelt“ abgetrennt ist. Die Grenze des Gebiets nennt man die Oberfläche des Schwarzen Lochs oder den **Ereignishorizont**.

Man könnte vermuten, dass die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen, die Schwarze Löcher (im Gleichgewicht) beschreiben, sehr kompliziert sind, da Schwarze Löcher aus Sternen mit z.B. sehr unterschiedlichen Dichteverteilungen, Formen (Multipolmomenten), Magnetfeldern und Drehimpulsverteilungen entstehen können. Daher ist es eine bemerkenswerte Tatsache, dass die allgemeinste Lösung für stationäre Schwarze Löcher analytisch angegeben werden kann.

Die allgemeinste stationäre Schwarz–Loch–Metrik, die sogenannte **Kerr–Newman–Metrik** hängt nur von drei Parametern ab: Der Masse M, dem Drehimpuls J und der Ladung Q des Schwarzen Lochs. Spezialfälle sind die **Kerr–Metrik** ($Q = 0$), die **Reissner–Nordstrom–Metrik** ($J = 0$) und die **Schwarzschild–Metrik** ($J = 0, Q = 0$).

Da geladene astrophysikalische Objekte im allgemeinen sehr schnell durch das sie umgebende Plasma neutralisiert werden, sind geladene Schwarze Löcher astrophysikalisch irrelevant. Daher wird im weiteren Verlauf immer $Q = 0$ angenommen.

Achtung: In diesem Kapitel werden **geometrische Einheiten** $G = c = 1$ verwendet. Demnach werden Zeiten und Massen in $[cm]$ gemessen: $1\,\mathrm{sec} = 3\,10^{10}\,\mathrm{cm}$ (Faktor c in cgs–Einheiten), bzw. $1\,\mathrm{g} = 0.7425\,10^{-28}\,\mathrm{cm}$ (Faktor G/c^2 in cgs–Einheiten) oder astrophysikalisch relevanter $1\,M_\odot = 1.4766\,\mathrm{km}$.

5.1 Nichtrotierende Schwarze Löcher

- Die (kovariante) Schwarzschild–Metrik für ein nichtrotierendes, statisches, sphärisch–symmetrisches Schwarzes Loch lautet (siehe auch Gl. (3.41) und den anschließenden

Text für die physikalische Interpretation der hier gewählten speziellen Schwarzschild-Koordinaten) [1]

$$\boxed{ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2} \tag{5.1}$$

mit $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi$. Der Ereignishorizont der Metrik ist durch $r = 2M$ gegeben. Er heißt auch statischer Limit, da kein statischer Beobachter mit $r < 2M$ existiert (siehe auch weiter unten).

- Ein statischer Beobachter, d.h. ein Beobachter bei festen Koordinaten (r, θ, ϕ), misst in diesem Gravitationsfeld das (physikalische) **Eigenzeitintervall**

  $$d\tau = \sqrt{-g_{00}}\, dt$$

  bzw.

  $$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}\, dt \tag{5.2}$$

  wobei dt das **Koordinatenzeitintervall** ist. Dies ist die bereits in Kapitel 3.4 diskutierte Zeitdilation oder **Gravitationsrotverschiebung** einer Uhr im Gravitationsfeld relativ zu einer Uhr im Unendlichen ($d\tau < dt$).

- Besitzt die Schwarzschild–Metrik eine Singularität bei $r = 2M$?

  Für $r \to 2M$ (von $r > 2M$) strebt $d\tau \to 0$, d.h Uhren scheinen am Ereignishorizont stehen zu bleiben.

  Ein radiales Photon ($ds^2 = d\theta^2 = d\varphi^2 = 0$) bewegt sich mit der **Koordinatengeschwindigkeit** (in Einheiten von c)

  $$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

[1] **Bedeutung eines speziellen Koordinatensystems**: Betrachten wir dazu zum Beispiel die Schwarzschild-Lösung. Wir wenden auf sie eine komplizierte Koordinatentransformation an und bezeichnen die neuen Koordinaten mit x'^a. Nehmen wir nun an diese Lösung sei gegeben und es würde gefragt werden, wie sie zu interpretieren sei und wie die Koordinaten x'^a zu identifizieren seien. Natürlich wird die Lösung immer noch die Vakuumfeldgleichungen erfüllen, aber den Koordinaten x'^a wird nur noch eine geringe oder überhaupt keine geometrische Bedeutung mehr zukommen. Man kann dann beispielsweise nicht etwa $x'^0 = t$ setzen und t als „Zeitparameter“ interpretieren. Man kann aber weiterhin nachweisen, ob die Koordinatenhyperfläche $x^{(a)} = konstant$ (die den Index a einschließenden Klammer bedeutet, dass er als fest zu betrachten ist) an einem Punkt zeitartig, null oder raumartig ist.

Für $r \to 2M$ gilt $dr/dt \to 0$, d.h. Photonen scheinen zu „stehen“. Allerdings beträgt die **physikalische Geschwindigkeit** der Photonen überall, d.h. auch bei $r = 2M$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\sqrt{g_{11}}\, dr}{\sqrt{-g_{00}}\, dt} = \pm 1$$

Dies und die Tatsache, dass die Determinante der Metrik $\det(g_{ab}) = -r^4 \sin^2\theta$ bei $r = 2M$ regulär ist, lässt vermuten, dass das singuläre Verhalten der Metrikfunktion g_{rr} bei $r = 2M$ nur auf einer „ungeschickten“ Koordinatenwahl beruht, d.h. es sich nur um eine **Koordinatensingularität** handelt.

- Der Ereignishorizont der Schwarzschild–Metrik ist eine **Nullhyperfläche**, [2] die die Raumzeit (Mannigfaltigkeit) in zwei nichtzusammenhängende Gebiete unterteilt:

  I. $2M < r < \infty$

  II. $0 < r < 2M$

  Innerhalb des Gebietes I ist die Koordinate $t \equiv x^0$ zeitartig ($g^{00} < 0$) und die Koordinate $r \equiv x^1$ raumartig ($g^{11} > 0$).

  Innerhalb des Gebietes II kehren die Koordinaten t und r ihren Charakter um, d.h. t ist nun raumartig und r zeitartig. Daraus folgt, dass die **Topologie der Schwarzschild-Metrik nicht euklidisch** ist.

- Eine wichtige Technik zur Interpretation von Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen im allgemeinen und der Schwarzschild–Metrik im besonderen ist die **Untersuchung der Struktur des lokalen Zukunftslichtkegels**.

  Definition: Ein lokaler Zukunftslichtkegel ist der Ort aller Punkte $x^a + dx^a$ in der Umgebung eines Punktes x^a mit

  $$g_{ab} dx^a dx^b = 0\,.$$

  Die Lichtkegelstruktur schränkt mögliche zukünftige Bewegungen eines Beobachters ein: Nur zeitartige Bewegungen des Beobachters sind möglich, d.h. die Richtungen seiner möglichen Bewegungen müssen innerhalb des lokalen Zukunftslichtkegel liegen.

  Die Lichtkegelstruktur einer Metrik lässt sich gut in Form von **Raumzeit-Diagrammen** darstellen. Dabei unterdrückt man in der Darstellung (insbesondere beim Vorhandensein von Symmetrien) eine oder zwei Raumdimensionen (Fig. 5.1). Die Zeitachse in den Raumzeit-Diagrammen ist üblicherweise die vertikale Achse.

  In einer **gekrümmten Raumzeit** manifestiert sich die Krümmung in Raumzeit-Diagrammen dadurch, dass die Lichtkegel verengt und gekippt sind.

[2] Bei $r = 2M$ ist $g_{tt} = g^{rr} = 0$, d.h. auf der Hyperfläche $r = 2M$ gilt die Beziehung $X^2 = g_{ab}(x) X^a X^b = 0$ für einen beliebigen Vektor X.

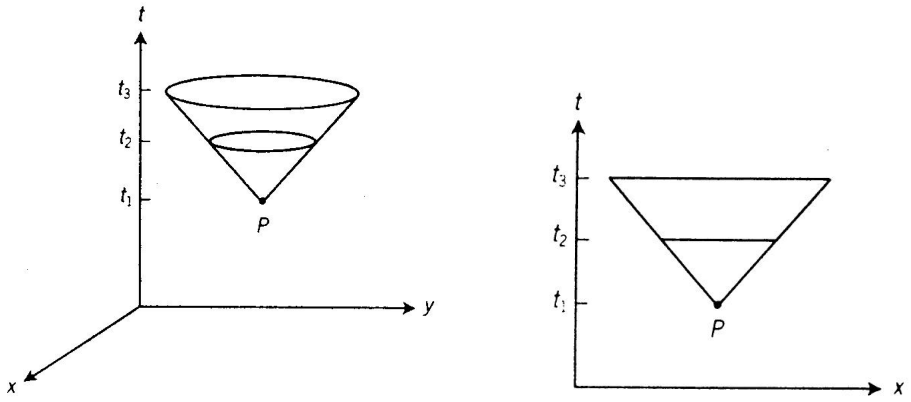


Abbildung 5.1: Raumzeit–Diagramme eines am Punkte P emittierten Lichblitzes, wobei eine (linkes Bild) bzw. zwei (rechtes Bild) räumliche Dimensionen unterdrückt sind (aus d'Inverno, Abb. 16.5 und 16.6).

- Zur **Interpretation der Schwarzschild–Metrik** betrachten wir die Klasse der **radialen Nullgeodäten** (ein Punkt über einer Größe bedeutet die Ableitung der Größe nach dem affinen Parameter λ; siehe Gl. 3.31)

  $$ds^2 = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0\,. \tag{5.3}$$

  Daraus folgt die Differentialgleichung (siehe z.B. d'Inverno, Kap. 16.4)

  $$\frac{dt}{dr} = \pm\frac{r}{r-2M}\,.$$

  Integration ergibt dann

  $$t = \pm\left(r + 2M\ln|r-2M| + \text{kons.}\right)\,. \tag{5.4}$$

  wobei das $+$ $(-)$ Zeichen **auslaufenden** (**einlaufenden**) radialen Nullgeodäten zugeordnet ist. Durch die Transformation $t \to -t$ werden einlaufende zu auslaufenden Geodäten und umgekehrt.

- **Raumzeit–Diagramm der Schwarzschild–Lösung in Schwarzschild–Koordinaten** (Abb. 5.2)

  Dem Diagramm kann man folgendene Eigenschaften der Lösung entnehmen:

  - Nullgeodäten bei $r \to \infty$ schließen mit den Koordinatenachsen einen Winkel von 45 Grad ein (asymptotische Flachheit der Metrik).

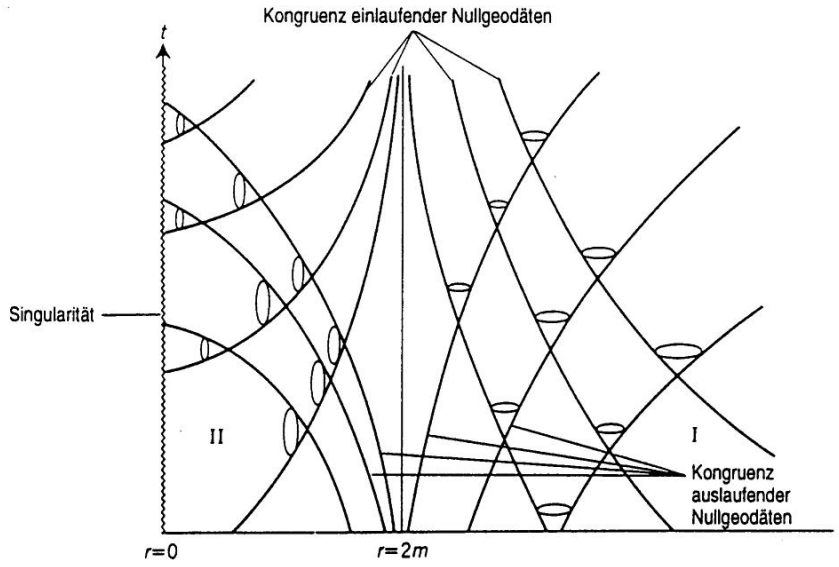


Abbildung 5.2: Raumzeit-Diagramm der Schwarzschild-Lösung in Schwarzschild-Koordinaten, wobei zwei Raumdimensionen unterdrückt sind, d.h. θ und ϕ sind fest und jeder Punkt des Diagramms entspricht einer 2-Sphäre mit einer Fläche $4\pi r^2$ (aus d'Inverno, Abb. 16.7).

  - Ein Beobachter innerhalb des Gebietes II kann nicht in Ruhe bleiben. Er muss sich in Richtung der **intrinsischen Singularität** (Ricci–Skalar (3.22) $R = 48M^2/r^6$ divergiert!) bei $r = 0$ bewegen. (Da die Eigenzeit entlang einer Geodäten maximal ist, sollte ein sich der Singularität nähernder Beobachter nicht zappeln, da sonst sein Leben noch kürzer ist. :-))
  - Das Diagramm scheint zu suggerieren, dass ein Beobachter innerhalb des Gebietes I, der sich in Richtung des Ursprungs bewegt, eine unendlich lange Zeit braucht, um $r = 2M$ zu erreichen. Das Gleiche scheint auch für Lichtstrahlen zu gelten. Wie im nächsten Unterkapitel gezeigt wird, ist dies aber falsch!

- **Raumzeit–Diagramm der Schwarzschild–Lösung in Eddington–Finkelstein–Koordinaten** (Abb. 5.3)

  Man geht zu einer neuen Zeitkoordinaten über, in der die einlaufenden (oder alternativ die auslaufenden) radialen Nullgeodäten zu Geraden werden.

  Für **einlaufende radiale Geodäten** verwendet man die Transformation (für $r > 2M$)

$$t \longrightarrow \bar{t} \equiv t + 2M \ln(r - 2M) \tag{5.5}$$

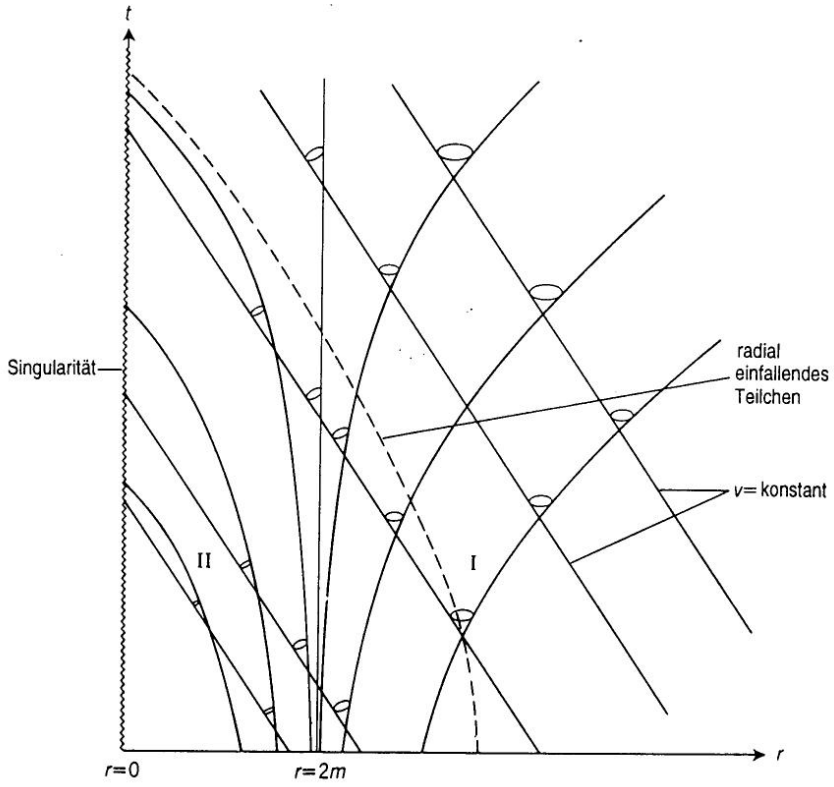


Abbildung 5.3: Wie Fig.5.2, aber in anvancierten Eddington–Finkelstein–Koordinaten (aus d'Inverno, Abb. 16.10). Man beachte, dass radial auslaufende Photonen bei $r = 2M$ bleiben wo sie sind und dass der linke Rand der lokalen Lichtkegel und die r-Achse immer einen Winkel von 45° einschließen, während der Öffnungswinkel der Lichtkegel für $r \to 0$ immer kleiner wird (der rechte Rand kippt nach links).

und erhält damit als Geodätengleichung

$$\bar{t} = -r + \text{konstant} \tag{5.6}$$

oder mit einer neuen Nullkoordinate (**avancierter Zeitparameter**)

$$v \equiv \bar{t} + r = \text{konstant}\,. \tag{5.7}$$

Das ist eine Gerade, die mit der x–Achse einen Winkel von 45 Grad einschließt.

Durch Differenzieren von (5.5) erhält man

$$d\bar{t} = dt + \frac{2M}{r - 2M} dr$$

und durch ersetzen von dt in dem Schwarzschildschen Linienelement (5.1) das **Eddington–Finkelstein–Linienelement**

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\bar{t}^2 + \frac{4M}{r} d\bar{t} dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2\,. \tag{5.8}$$

Das Linienelement ist regulär bei $r = 2M$. Damit erweitert die Transformation (5.5), in einem gewissen Sinn, den Koordinatenbereich von $2M < r < \infty$ auf $0 < r < \infty$. Dies ist der analytischen Fortsetzung einer Funktion in der komplexen Analysis sehr verwandt und so wird (5.8) eine **analytische Erweiterung** von (5.1) genannt.

Man kann (5.8) durch Verwenden des avancierten Zeitparameters v auch in einer einfacheren Form schreiben:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2\,. \tag{5.9}$$

Einlaufende radiale Nullgeodäten sind dann durch $v = \text{konstant}$ gegeben (Abb. 5.3).

- **Ereignishorizont**

  Aus Abb. 5.3 entnimmt man, dass die Hyperfläche $r = 2M$ wie eine **halbdurchlässige Membran** wirkt, die zukunftsgerichtete zeitartige und Nullkurven nur von aussen (Gebiet I) ins Innere (Gebiet II) durchläßt. Andererseits kann keine zukunftsgerichtete zeitartige und Nullkurve aus dem Gebiet II ins Gebiet I entweichen.

  Daher wird die Hyperfläche $r = 2M$ Ereignishorizont genannt, da sie die Grenze aller Ereignisse darstellt, die prinzipiell von einem äußeren Beobachter beobachtet werden können. Die Ereignishorizont stellt eine **absolute Grenze** dar, da er alle inneren Ereignisse vor **jedem** äußeren Beobachter verbirgt.

- **Kugelsymmetrischer Kollaps zum Schwarzen Loch**

  Die Schwarzschild–Metrik ist im Vakuum außerhalb einer kugelsymmetrischen Materieverteilung gültig. Innerhalb eines kugelsymmetrischen Sterns, dessen Radius R_* größer als sein Schwarzschildradius R_S ist, gilt die **innere nicht–singuläre Schwarzschild–Lösung**

  $$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) dt^2 + \ldots ,$$

  wobei $m(r)$ eine Funktion von r ist, die schneller als r gegen Null strebt (mit $m(R_*) = M$). Daher besitzt auch die komplette Lösung (innere + äußere Schwarzschild–Lösung) eines kugelsymmetrischen Sterns keine Singularität, solange $R_* > R_S$.

  Die Allgemeine Relativitätstheorie sagt allerdings voraus, ein (ausreichend massereicher) kugelsymmetrischer Stern wird sich solange zusammenziehen, bis $R_* \leq R_S$, so dass schließlich der Stern zum Schwarzen Loch wird und alle Materie des Sterns in einer Singularität im Zentrum der Symmetrie endet (Abb. 5.4).

  - Ein Beobachter auf der Sternoberfläche kann verfolgen, wie der Radius des Sterns den Schwarzschildradius unterschreitet.
  - Ein entfernter Beobachter registriert in regelmäßigen Abständen ausgesandte Signale in immer größeren Zeitabständen. Ein bei $r = 2M$ ausgesandtes Signal erreicht ihn nie, egal wie lange er wartet (Singularität nie sichtbar!).
  - Nach einer endlichen Zeit $\tau \sim R_S/c \approx 10^{-5} M/M_\odot$ [sec] ist der Stern aufgrund der extremen Rotverschiebung nicht mehr beobachtbar.

- **Ein asphärischer Kollaps zum Schwarzen Loch** führt zur Bildung eines nicht–stationären Ereignishorizonts. Aber die Emission von Gravitationswellen ($\ddot{Q} \neq 0$) führt schnell ($\sim 10^{-3}\, M/M_\odot$ [sec]) zum stationären Endzustand (Abb. 5.5).

  Das **No Hair Theorem** [3] besagt, dass ein entstehendes Schwarzes Loch vollständig durch seine Masse, seinen Drehimpuls und seine Ladung bestimmt ist (Beweis ist eine bemerkenswerte Leistung der mathematischen Physik).

  Schwarze Löcher sind die einfachsten makroskopischen Objekte, die man kennt.

  Wenn ein Stern hinter seinem Ereignishorizont verschwindet, ist fast nichts mehr von seinen vielen Eigenschaften beobachtbar (nur M, J und Q). Man kann z.B. nicht mehr feststellen wieviele Baryonen das Schwarze Loch gebildet haben. Die Bildung eines Schwarzen Lochs bedeutet daher einen **riesigen Informationsverlust**.

[3] R.Ruffini & J.A.Wheeler, Phys. Today **24** (1), 30 (1971)

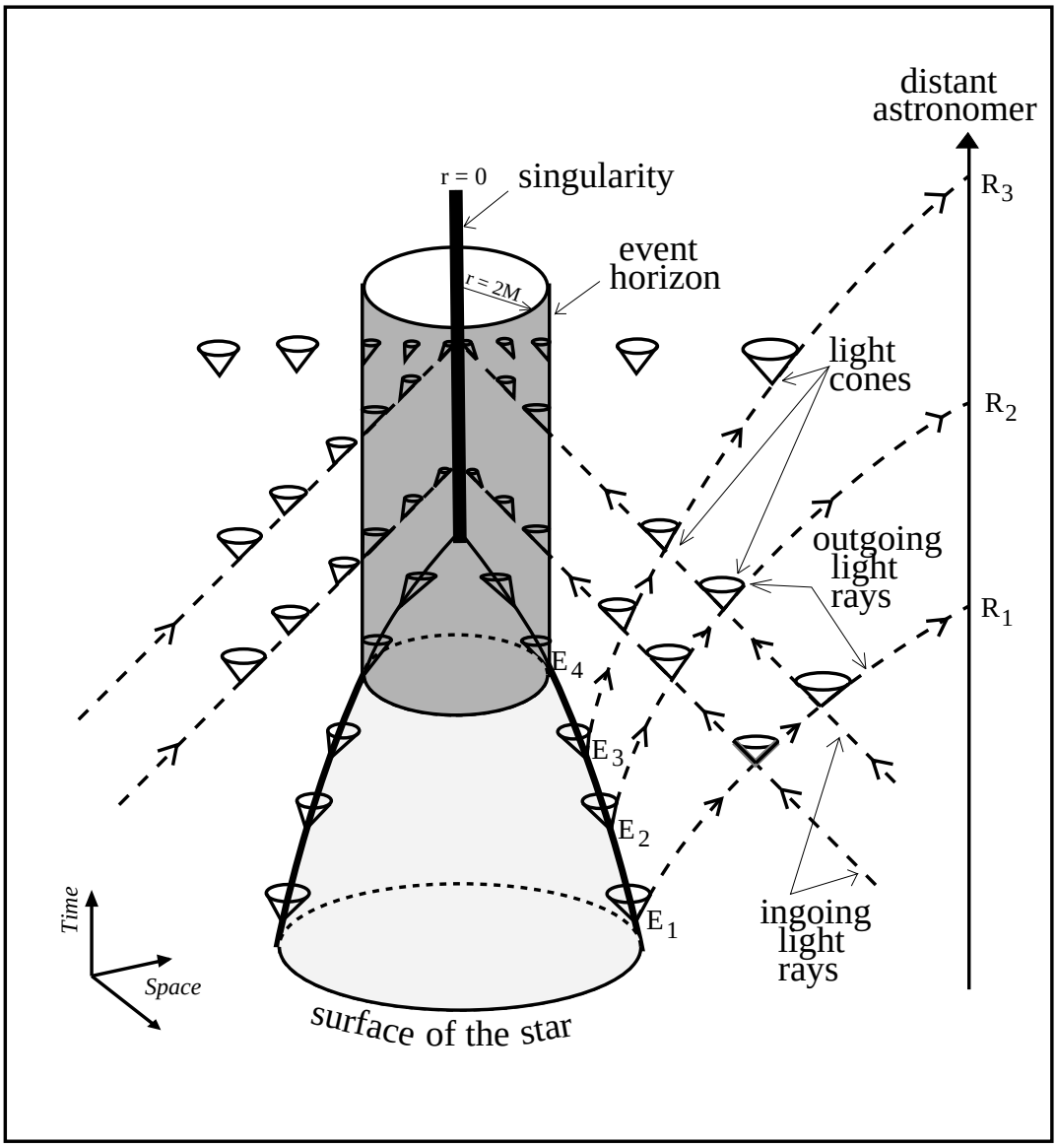


Abbildung 5.4: Sphärischer Kollaps in Eddington–Finkelstein–Koordinaten zu einem Schwarzen Loch (Fig. 4 aus Luminet, astro-ph/980152).

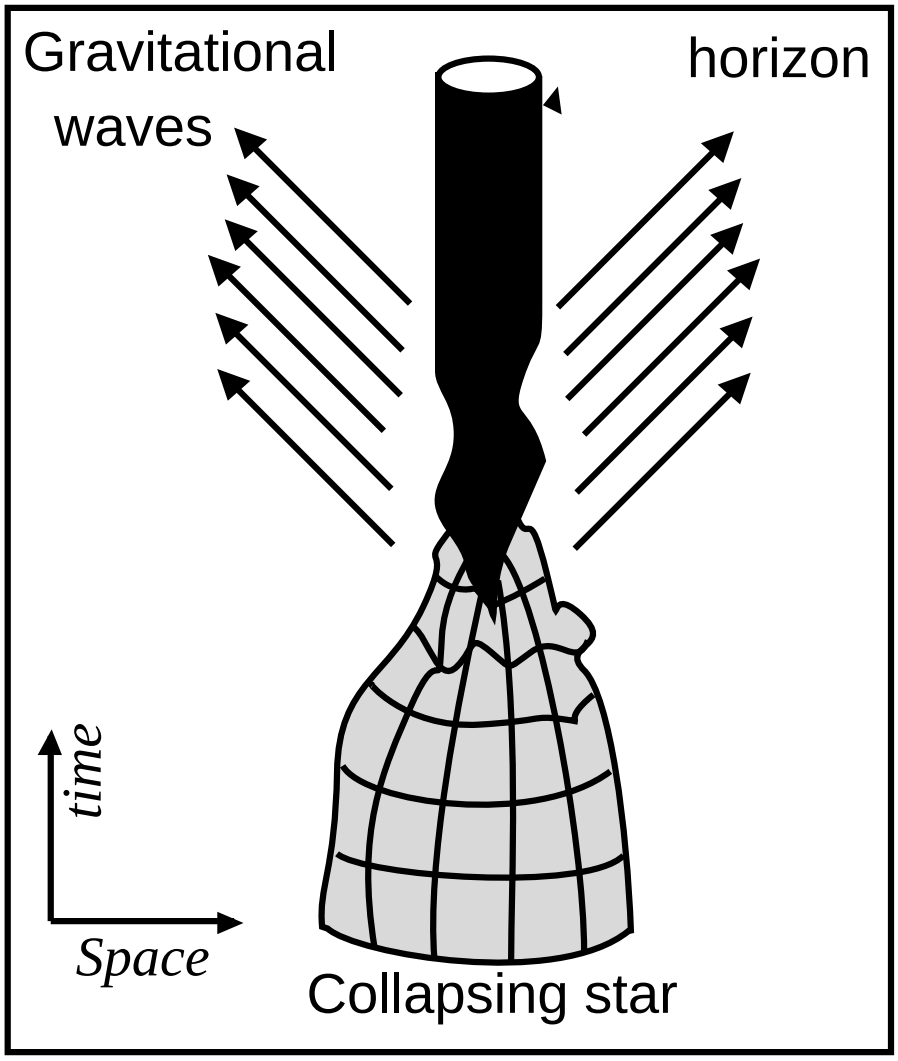


Figure 7

Abbildung 5.5: Schematische Darstellung des Verlaufs eines asphärischen Kollaps zu einem Schwarzen Loch (Fig. 7 aus Luminet, astro-ph/980152).

5.2 Bewegung von Testteilchen in der Schwarzschild–Metrik

- Zur Untersuchung der Bewegung von Testteilchen in der Schwarzschild-Metrik gehen wir von den allgemeinen Überlegungen in Kap. 3.3 aus (Variationsprinzip: Abstand bzw. Intervall längs Weltlinie extremal). Aber anstatt der Lagrange-Funktion

  $$L = \sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}$$

  verwenden wir die (falls λ ein affiner Parameter ist, d.h. falls L konstant entlang der Geodäte ist) äquivalente Lagrange-Funktion

  $$L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

  mit $\dot{x}^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda = \dot{p}^\alpha$ (4-Impuls). Mit der Schwarzschild-Metrik (5.1) folgt dann

  $$2L = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$$

  mit $\dot{t} \equiv dx^0/d\lambda = dt/d\lambda = p^t$ (t–Komponente des 4-Impuls), und so weiter. Der affine Parameter λ (Lagrange-Funktion konstant!) wurde dabei so gewählt, dass $\lambda = \tau/m$ für ein Teilchen der Ruhemasse m ist.

- Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen (3.33) folgt dann

  $$\frac{d}{d\lambda}\left(r^2\dot{\theta}\right) = r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 \tag{5.10}$$

  $$\frac{d}{d\lambda}\left(r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right) = 0 \tag{5.11}$$

  $$\frac{d}{d\lambda}\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}\right] = 0 \tag{5.12}$$

  Anstatt direkt die r-Gleichung zu verwenden, ist es einfacher, die Beziehung

  $$g_{\alpha\beta}p^\alpha p^\beta = -m^2 \tag{5.13}$$

  auszunutzen [4] , d.h. $L = -m^2/2$.

[4] In der Minkowski-Raumzeit gilt: $-{p^0}^2 + {p^1}^2 + {p^2}^2 + {p^3}^2 = -m^2 \longrightarrow p = \sqrt{E^2 - m^2}$, wobei p der Betrag des 3-Impuls und $E \equiv p^0$ die Energie des Teilchens sind.

- Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man das Koordinatensystem so wählen, dass sich das Teilchen anfänglich in der Äquatorebene befindet ($\theta = \pi/2$). Dann folgt aus (5.10) $\dot{\theta} = 0$, d.h. das Teilchen bleibt in der Äquatorebene.

  Für $\theta = \pi/2$ ergibt sich aus (5.11) und (5.12) für die kanonisch konjungierten Impulse $p_\alpha = \partial L/\partial \dot{x}^\alpha$

$$p_\varphi \equiv r^2\dot{\varphi} = \text{konstant} \equiv l \tag{5.14}$$

$$-p_t \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} = \text{konstant} \equiv E \tag{5.15}$$

  wobei l und E **Konstanten der Bewegung** sind.

- Um die **physikalische Bedeutung** dieser Konstanten der Bewegung zu verstehen, betrachtet man einen statischen Beobachter (d.h. einen Beobachter bei festen Koordinaten r, θ und ϕ), der sich in der Äquatorebene befindet. Er führt Messungen in seinem lokalen (Minkowski) Inertialsystem mit Hilfe seines lokalen **Vierbeins**, d.h. seiner **lokalen Orthonormalbasis** aus. Bezeichnet man die in dieser Basis gemessenen Größen mit dem Zeichen $\wedge$, so gilt für die **orthonormalen Einheitsvektoren**

$$\vec{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\,. \tag{5.16}$$

  In einer Raumzeit mit einer Metrik $g_{\alpha\beta}$ gilt (wegen $ds^2 = d\vec{x}\cdot d\vec{x} = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ und $d\vec{x} = dx^\alpha\,\vec{e}_\alpha$) für die **orthogonalen Basisvektoren**

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = g_{\alpha\beta}\,. \tag{5.17}$$

  Aus (5.1), (5.16) und (5.17) folgt damit für die **orthonormalen Einheitsvektoren der Schwarzschild-Metrik** [5]

$$\vec{e}_{\hat{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}\vec{e}_t \tag{5.18}$$

$$\vec{e}_{\hat{r}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}\vec{e}_r \tag{5.19}$$

$$\vec{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r}\vec{e}_\theta \tag{5.20}$$

$$\vec{e}_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{r\sin\theta}\vec{e}_\varphi \tag{5.21}$$

  - Die **Teilchenenergie** ist die t-Komponente des 4-Impuls gemessen im lokalen Orthonormalsystem des Beobachters, d.h. die Projektion des 4-Impuls in Richtung von $\vec{e}_{\hat{t}}$

$$E_{\text{lokal}} \equiv p^{\hat{t}} = -p_{\hat{t}} = -\vec{p}\cdot\vec{e}_{\hat{t}}\,.$$

[5] z.B.: $\vec{e}_{\hat{t}}\cdot\vec{e}_{\hat{t}} = (1-2M/r)^{-1}\,\vec{e}_t\cdot\vec{e}_t = (1-2M/r)^{-1}\,g_{tt} = -1$.

Mit (5.18) folgt dann

$$E_{\text{lokal}} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} p_t$$

und daraus mit (5.15)

$$E_{\text{lokal}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} E\,,$$

d.h.

$$\boxed{E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} E_{\text{lokal}}} \tag{5.22}$$

Für $r \to \infty$ gilt $E_{\text{lokal}} \to E$, d.h. die Erhaltungsgröße E ist die „Energie–im–Unendlichen“, die durch den Rotverschiebungsfaktor mit E_{lokal} verknüpft ist.

– Die physikalische Bedeutung der Erhaltungsgröße l ergibt sich, wenn man die lokal gemessene Tangentialgeschwindigkeit

$$v^{\hat{\varphi}} = \frac{p^{\hat{\varphi}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{p_{\hat{\varphi}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_{\hat{\varphi}}}{E_{\text{lokal}}} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_{\varphi}/r}{E_{\text{lokal}}} = \frac{p_\varphi/r}{E_{\text{lokal}}}$$

betrachtet. Mit (5.14) folgt

$$\boxed{l = E_{\text{lokal}} r v^{\hat{\varphi}}} \tag{5.23}$$

d.h. die Erhaltungsgröße l ist der Drehimpuls des Teilchens (Newtonsch: $mrv^{\hat{\varphi}}$).

Für die folgende Diskussion müssen wir zwischen massebehafteten und masselosen Teilchen (z.B. Photonen) unterscheiden.

- Massebehaftete Teilchen

  In diesem Fall ist es sinnvoll die Erhaltungsgrößen E und l auf die Teilchenmasse zu normieren, d.h. man definiert die **spezifische Energie**

  $$\tilde{E} = E/m$$

  und den **spezifischen Drehimpuls**

  $$\tilde{l} = l/m\,.$$

  Dann folgt aus (5.14)

  $$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{l}}{r^2}\,, \tag{5.24}$$

aus (5.15)

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E}}{1-2M/r} \tag{5.25}$$

und aus (5.13)

$$-m^2 = -\frac{E^2}{1-2M/r} + \frac{1}{1-2M/r}\left(m\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + 0 + \frac{l^2}{r^2}\,,$$

bzw.

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right)\,. \tag{5.26}$$

Gleichung (5.26) kann nach $r = r(\tau)$ gelöst werden (ergibt im allgemeinen ein elliptisches Integral). Dann folgt aus (5.24) $\varphi(\tau)$ und aus (5.25) $t(\tau)$.

- Die **radiale Geschwindigkeit** (gemessen vom lokalen Beobachter) ist gegeben durch

  $$v^{\hat{r}} = \frac{p^{\hat{r}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{p_{\hat{r}}}{p^{\hat{t}}} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_{\hat{r}}}{E_{\text{lokal}}} = \frac{p_r(1-2M/r)^{1/2}}{E_{\text{lokal}}} = \frac{p^r}{E}$$

  bzw.

  $$v^{\hat{r}} = \frac{1}{E}\,m\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{\tilde{E}}\frac{dr}{d\tau} = \left[1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right)\,\frac{1}{\tilde{E}^2}\right]^{1/2}\,. \tag{5.27}$$

  Für $r \to 2M$ strebt $v^{\hat{r}} \to 1$, d.h. für einen lokalen statischen Beobachter bei r nähert sich das Teilchen dem Ereignishorizont entlang einer radialen Geodäten mit Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Drehimpuls des Teilchen. **Achtung:** Für $r \leq 2M$ existiert kein statischer Beobachter!

- Die einfachsten Geodäten sind solche mit $\tilde{l} = 0$, d.h. das Teilchen fällt radial (φ=konstant). In diesem Fall gilt

  $$\frac{dr}{d\tau} = -\left(\tilde{E}^2 - 1 + \frac{2M}{r}\right)^{1/2}\,. \tag{5.28}$$

  Betrachtet man den Grenzfall $r \to \infty$, so ergeben sich drei Möglichkeiten:

  1. $\tilde{E} < 1$, d.h. das Teilchen fällt aus Ruhe bei $r = R$
  2. $\tilde{E} = 1$, d.h. das Teilchen fällt aus Ruhe im Unendlichen
  3. $\tilde{E} > 1$, d.h. das Teilchen fällt mit endlicher Einfall–Geschwindigkeit aus dem Unendlichen

Integration von (5.28) für den Fall $\tilde{E} < 1$, so dass $1 - \tilde{E}^2 = 2M/R$, liefert ($\tau = 0$ bei $r = R$)

$$\tau = \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} \left[2\left(\frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} + \cos^{-1}\left(\frac{2r}{R} - 1\right)\right] \tag{5.29}$$

Definiert man den so genannten **Zykloidparameter** η gemäß

$$r \equiv \frac{R}{2}\left(1 + \cos\eta\right) ,$$

so folgt

$$\tau = \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} \left(\eta + \sin\eta\right) , \tag{5.30}$$

d.h. die **Eigenzeit** für einen Fall von $r = R > 2M$ bis $r = 2M$ ist endlich, genauso wie die Eigenzeit für einen Fall von $r = R > 2M$ bis $r = 0$. Letztere beträgt

$$\tau = \pi \left(\frac{R^3}{8M}\right)^{1/2} .$$

Die entsprechende **Koordinatenzeit** erhält man durch Integration von (5.25) mit $t = 0$ bei $r = R > 2M$:

$$\frac{t}{2M} = \ln\left|\frac{\sqrt{R/2M - 1} + \tan(\eta/2)}{\sqrt{R/2M - 1} - \tan(\eta/2)}\right| + \sqrt{\frac{R}{2M} - 1}\,\left[\eta + \frac{R}{4M}(\eta + \sin\eta)\right] .$$

Demnach ist die Koordinatenzeit (d.h. die Eigenzeit eines Beobachters im Unendlichen) unendlich für einen Fall von $r = R > 2M$ bis $r = 2M$, da $\tan(\eta/2) = \sqrt{R/2M - 1}$ für $r = 2M$.

– Im Falle **nichtradialer Bahnen** sind die aus (5.12), (5.24) und (5.26) folgenden elliptischen Integrale nicht besonders instruktiv. Einen Überblick über die möglichen Bahnen kann man aber durch die Betrachtung des **„effektiven" Potentials** (Abb. 5.6)

$$V(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right) \tag{5.31}$$

gewinnen. Damit läßt sich (5.26) in der Form

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - V(r) \tag{5.32}$$

schreiben.

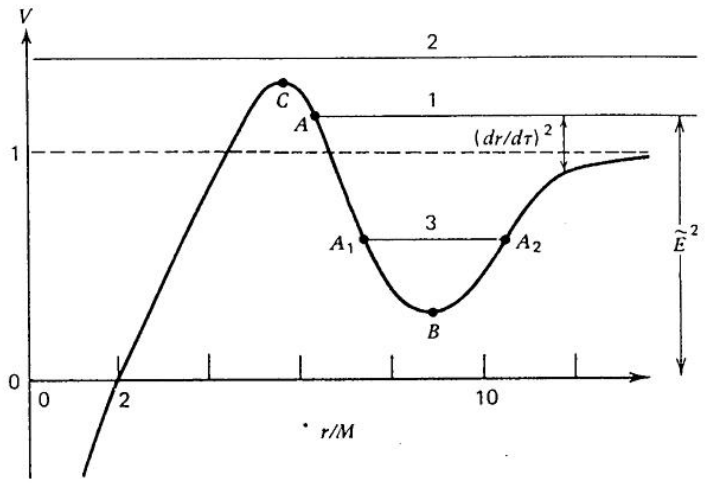


Abbildung 5.6: Schematische Darstellung des effektiven Potentials für ein massebehaftetes Teilchen, das ein nicht–rotierendes Schwarzes Loch der Masse M umkreist (Fig. 12.2 aus Shapiro & Teukolsky).

Für Kreisbahnen muss $\partial V/\partial r = 0$ (keine radiale Beschleunigung) und $dr/d\tau = 0$ (keine Radialgeschwindigkeit) gelten. Die erste Bedingung liefert

$$Mr^2 - \tilde{l}^2 r + 3M\tilde{l}^2 = 0\,, \tag{5.33}$$

d.h. das effektive Potential $V(r)$ besitzt kein Extremum für $\tilde{l} < 2\sqrt{3}M \approx 3.464M$ (es existiert keine stabile Kreisbahn; Abb. 5.7).

Aus Gleichungen (5.32) und (5.33) folgt

$$\tilde{l}^2 = \frac{Mr^2}{r - 3M}$$

und

$$\tilde{E}^2 = \frac{(r-2M)^2}{r(r-3M)}\,,$$

d.h. **Kreisbahnen existieren nur für** $r \geq 3M$, wobei der Grenzfall $r = 3M$ einem **Photonenorbit** ($\tilde{E} = E/m \to \infty$) entspricht.

Die Kreisbahnen sind stabil, falls

$$\partial^2 V/\partial r^2 = \frac{2M(r-6M)}{r^3(r-3M)} > 0$$

(Potentialminimum). Demnach existieren **stabile Kreisbahnen nur für** $r > 6M$.

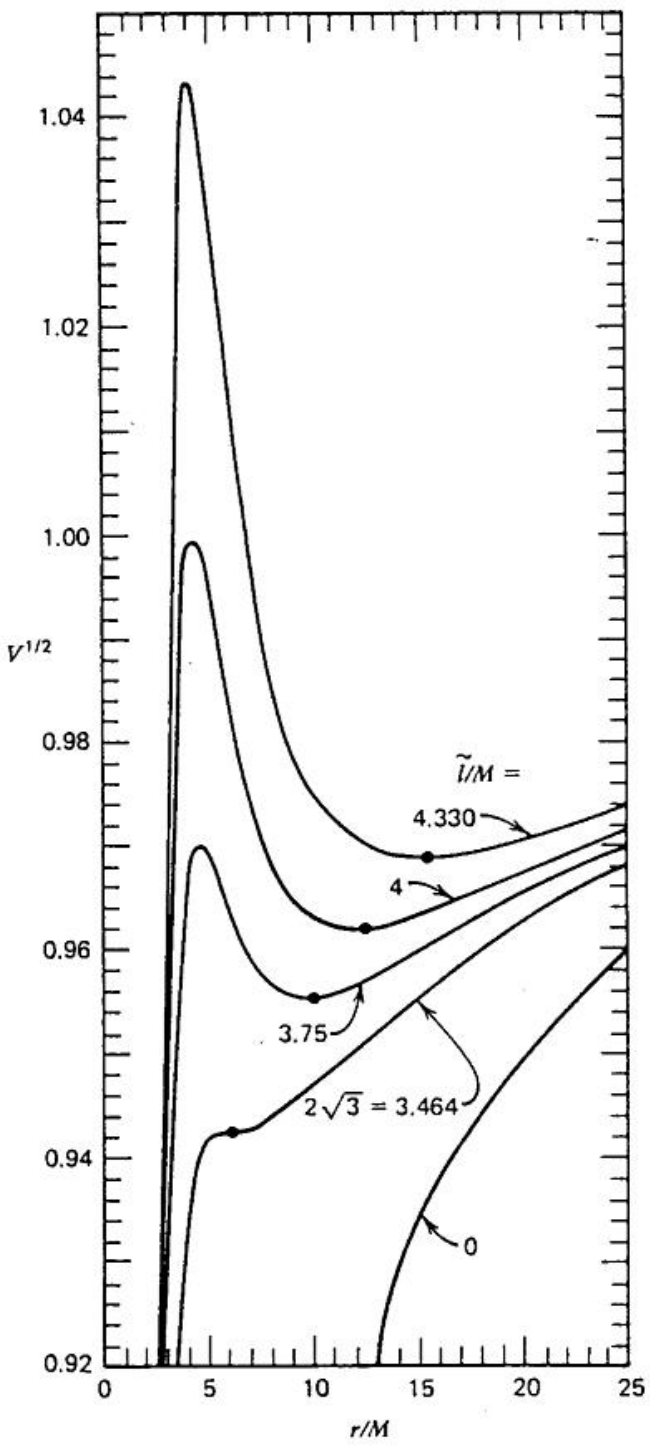


Abbildung 5.7: Effektives Potentials für massebehaftete Teilchen mit unterschiedlichem Drehimpuls, die ein nicht–rotierendes Schwarzes Loch der Masse M umkreisen (Fig. 12.3 aus Shapiro & Teukolsky).

Die **Bindungsenergie** (pro Masse) eines Teilchens in der letzten stabilen Kreisbahn bei $r = 6M$ beträgt

$$\tilde{E}_{\rm b} = \frac{m - E_{6M}}{m} = 1 - \tilde{E}_{6M} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^{1/2} = 5.72\,\% \,.$$

Dieser Anteil der Ruhemassenenergie wird frei, falls ein Teilchen aus dem Unendlichen bis zum letzten stabilen Kreisorbit hineinspiraliert und ins Schwarze Loch fällt. Er ist wesentlich größer als der Anteil, der maximal durch thermonukleare Prozesse freigesetzt werden kann ($\lesssim 0.9\,\%$). Daher stellt Akkretion auf ein Schwarzes Loch eine bedeutende potentielle Energiequelle dar.

- Masselose Teilchen (z.B. Photonen)

  Für masselose Teilchen hängt die Weltlinie des Teilchens nur von einem einzigen Parameter $b \equiv l/E$, dem **Stoßparameter** des Teilchens und nicht separat von E und l ab (siehe Shapiro & Teukolsky, Kap. 12.5).

  Das effektive Potential hat die Form

  $$V_{\rm phot} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

  mit $V_{\rm phot}^{(\rm max)} = 1/27M^2$ bei $r = 3M$.

  Der kritische Stoßparameter für „Einfang“ des masselosen Teilchens durch das Schwarze Loch beträgt

  $$b_c = 3\sqrt{3}M$$

  und der zugehörige **Einfangwirkungsquerschnitt** für aus dem Unendlichen einfallenden masselosen Teilchen ist

  $$\sigma_{\rm phot} = \pi b_c^2 = 27\pi M^2 \,,$$

  d.h. der effektive Radius des Schwarzen Lochs beträgt $r_{\rm eff} = 5.2M = 2.6R_s$.

  Ein unter dem Winkel Ψ gegenüber der radialen Richtung einfallendes masseloses Teilchen entkommt dem Schwarzen Loch, falls

  $$\sin\Psi > \frac{3\sqrt{3}M}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}$$

  Daraus ersieht man, dass 50% der Strahlung eines isotropen Emitters bei $r = 3M$ vom Schwarzen Loch eingefangen wird und dass bei $r = 2M$ nur ein radiales Photon ins Unendliche gelangen kann (Abb. 5.8).

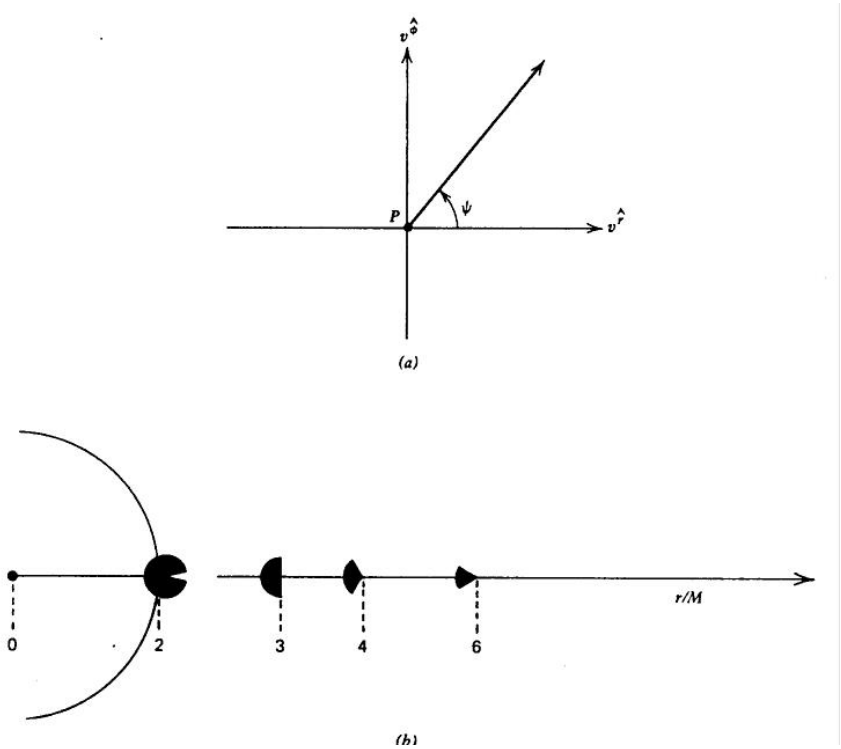


Abbildung 5.8: (a) Winkel Ψ zwischen der Ausbreitungsrichtung eines Photons und der radialen Richtung an einem gegebenen Punkt P. (b) Strahlung, die an den markierten Radien in Richtung der schwarzgefärbten Sektoren emittiert wird, wird vom Schwarzen Loch verschluckt (Fig. 12.6 aus Shapiro & Teukolsky). Die gezeigten Einfangsbereiche gelten für einen lokalen statischen Beobachter.

5.3 Rotierende Schwarze Löcher und die Kerr–Lösung

Achtung: In diesem Unterkapitel ist die Signatur der Metrik $(+1,-1,-1,-1)$.

Die **avancierte Eddington–Finkelstein–Form** der Kerr–Metrik lautet (Herleitung siehe z.B. d'Inverno, Kap. 19.1/2)

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1-\frac{2mr}{\varrho^2}\right)dv^2 - 2dvdr + \frac{2mr}{\varrho^2}2a\sin^2\theta dvd\bar{\varphi} + 2a\sin^2\theta drd\bar{\varphi} - \varrho^2 d\theta^2 \\ &\quad - \left[\left(r^2+a^2\right)\sin^2\theta + \frac{2mr}{\varrho^2}a^2\sin^4\theta\right]d\bar{\varphi}^2 \end{aligned} \tag{5.34}$$

wobei $\varrho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta$ gilt.

Das Analogon der Schwarzschild–Lösung erhält man durch die Koordinatentransformation $(v,r,\theta,\bar{\varphi}) \longrightarrow (t,r,\theta,\varphi)$ mit

$$\begin{aligned} dv &\equiv d\bar{t} + dr = dt + \frac{2mr+\Delta}{\Delta}dr \\ d\bar{\varphi} &\equiv d\varphi + \frac{a}{\Delta}dr \end{aligned}$$

wobei $\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2$. Diese **Boyer–Lindquist–Form** der Kerr–Lösung lautet:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}\left(dt - a\sin^2\theta d\varphi\right)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[\left(r^2+a^2\right)d\varphi - adt\right]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \tag{5.35}$$

Für $a=0$ gilt $\Delta/\rho^2 = 1-2m/r$. Kerr, der diese Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen im Jahre 1963 entdeckte (*Phys. Rev. Lett.* **11**, 237), verwendete Koordinaten vom kartesischen Typ $(\bar{t},x,y,z)$, die gemäß

$$\begin{aligned} \bar{t} &\equiv v - r \\ x &\equiv r\sin\theta\cos\varphi + a\sin\theta\sin\varphi \\ y &\equiv r\sin\theta\sin\varphi - a\sin\theta\cos\varphi \\ z &\equiv r\cos\theta \end{aligned} \tag{5.36}$$

definiert sind. Die entsprechende **Kerr–Form** der Kerr–Lösung lautet

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\bar{t}^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &\quad - \frac{2mr^3}{r^4+a^2z^2}\left[d\bar{t} + \frac{r}{a^2+r^2}(xdx+ydy) + \frac{a}{a^2+r^2}(ydx-xdy) + \frac{z}{r}dz\right]^2 \end{aligned} \tag{5.37}$$

- Grundlegende Eigenschaften der Kerr–Lösung

  - Die Lösung hängt von 2 Parametern m und a ab. Setzt man in der Boyer–Lindquist–Form der Kerr–Lösung (5.35) $a = 0$, so erhält man die Schwarzschild–Lösung in Schwarzschild–Koordinaten und kann den Parameter m als die Masse des Schwarzen Lochs identifizieren.
  - Die metrischen Koeffizienten sind von t und φ unabhängig. Daher ist die **Lösung stationär und axialsymmetrisch**. Sie besitzt außerdem **diskrete Symmetrien** unter folgenden Transformationen:

    $$t \to -t \quad \wedge \quad \varphi \to -\varphi$$
    $$t \to -t \quad \wedge \quad a \to -a$$

    Die erste diskrete Symmetrie legt nahe, dass das Kerr–Feld von einer sich drehenden Quelle herstammt. Die zweite diskrete Symmetrie deutet darauf hin, dass der Parameter a eine Drehrichtung spezifiziert.
  - Die Koordinate r ist **nicht** die übliche Radialkoordinate der Kugelkoordinaten (außer im asymptotischen Grenzfall $r \to \infty$). Betrachtet man die Kerr–Form der Kerr–Lösung (5.37) mit den üblichen kartesischen Koordinaten (x, y, z), so läßt sich die übliche Radialkoordinate durch

    $$R^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 \tag{5.38}$$

    definieren. Damit folgt mit (5.36)

    $$R^2 = r^2 + a^2 \sin^2\theta\,. \tag{5.39}$$

    Für $r \gg a$ gilt dann

    $$R = r + \frac{a^2 \sin^2\theta}{2r} + \dots\,,$$

    d.h. R stimmt asymptotisch und im Schwarzschild-Limes $a \to 0$ mit r überein.
  - Für $R \to \infty$ strebt die Kerr–Metrik (5.37) gegen die Minkowski–Metrik η_{ab}, d.h. die **Kerr–Lösung ist asymptotisch flach**.
  - Die **Kerr–Lösung beschreibt das Vakuumfeld im Außenraum einer rotierenden Quelle**, wobei a zur Winkelgeschwindigkeit und ma zum Drehimpuls (gemessen im Unendlichen) in Beziehung stehen. Sie beschreibt jedoch **nicht** die äußere Metrik eines kollabierenden rotierenden axialsymmetrischen Sterns. Sie ist nur asymptotisch korrekt, d.h. wenn alle Dynamik beendet ist.

- Singularitäten und Horizonte

  - Aus einer Untersuchung der Riemannschen Invarianten $R = R^{abcd}R_{abcd}$ folgt, dass die Kerr–Metrik nur bei $\varrho = 0$ eine **intrinsische Singularität** besitzt. Aus

    $$\varrho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta = 0$$

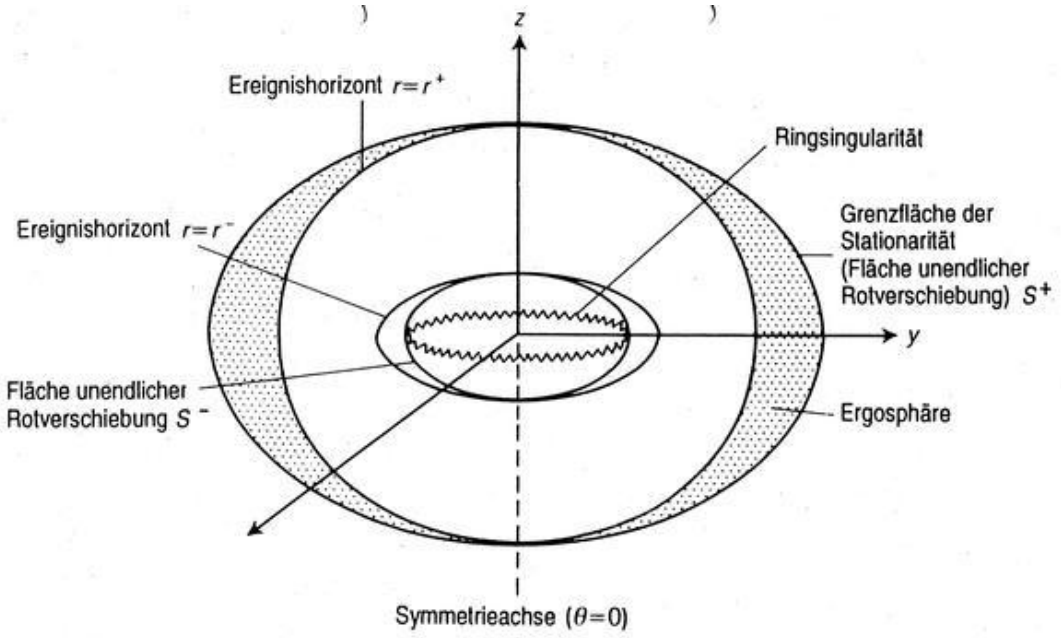


Abbildung 5.9: Die Ereignishorizonte, die Grenzfläche der Stationarität und die Ring–Singularität der Kerr–Lösung (Fig. 19.3 aus d'Inverno).

folgt

$$r = 0 \quad \text{und} \quad \cos\theta = 0$$

d.h.

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{und} \quad z = 0\,.$$

Es handelt sich bei der Singularität also um einen Ring vom Radius a, der in der Äquatorebene $z = 0$ liegt (Abb.5.9).

– **Flächen unendlicher Rotverschiebung** sind in der Kerr–Metrik (genauso wie im statischen Fall der Schwarzschild–Metrik) durch die Bedingung

$$g_{00} = \frac{r^2 - 2mr + a^2\cos^2\theta}{\varrho^2} = 0$$

gegeben, d.h. durch

$$r = r_{S\pm} \equiv m \pm \left(m^2 - a^2\cos^2\theta\right)^{1/2}\,. \tag{5.40}$$

Die Flächen unendlicher Rotverschiebung besitzen folgende Eigenschaften:

* Im Schwarzschild–Limes $a \to 0$ ist die Fläche S_+ durch $r = 2m$ und die Fläche S_- durch $r = 0$ gegeben.
* Die Flächen unendlicher Rotverschiebung sind axialsymmetrisch.

  - S_+ hat am Äquator den Radius $2m$ und an den Polen (falls $a^2 < m^2$) den Radius $m + (m^2 - a^2)^{1/2}$.
  - Die Fläche S_- ist vollständig in S_+ enthalten.

- Die Existenz von Flächen unendlicher Rotverschiebung impliziert die Existenz eines **Ereignishorizonts** (Hyperfläche $r = konstant$, die lichtartig ist, d.h. $g^{11} = 0$). Aus der Boyer–Lindquist–Form der Kerr–Metrik (5.35) folgt

$$g^{11} = -\frac{\Delta}{\varrho^2} = -\frac{r^2 - 2mr + a^2}{r^2 + a^2 \cos^2\theta} \,.$$

  Demnach ist $g^{11} = 0$, wenn $\Delta = r^2 - 2mr + a^2$ Null ist, d.h. (falls $a^2 < m^2$) es existieren zwei Ereignishorizonte:

$$r = r_\pm \equiv m \pm (m^2 - a^2)^{1/2} \,. \tag{5.41}$$

  Im Schwarzschild–Limes ($a \to 0$) gilt $r_+ = 2m$ und $r_- = 0$, d.h. die Flächen unendlicher Rotverschiebung und die Ereignishorizonte stimmen überein.

  Der Ereignishorizont $r = r_+$ liegt vollständig innerhalb von S_+, d.h. es existiert ein Zwischengebiet, die so genannte **Ergosphäre** (Abb.5.9).

  Falls $a^2 > m^2$ existieren keine Ereignishorizonte und es liegt eine so genannte **nackte Singularität** vor (kann Lichtsignale von $r \to \infty$ empfangen und **auch** dorthin senden!). Der britische Mathematiker und Relativist Roger Penrose hat die Hypothese aufgestellt, dass solche nackte Singularitäten verboten sind (**cosmic censorship**).

- Die Kerr–Lösung ist in 3 Gebieten regulär:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && r_+ < r < \infty \quad , && \Delta > 0 \\ &\text{(II)} && r_- < r < r_+ \quad , && \Delta < 0 \\ &\text{(III)} && 0 \quad < r < r_- \quad , && \Delta > 0 \end{aligned}$$

- <u>Null–Geodäten</u>

  - Da die Kerr–Lösung nicht kugelsymmetrisch ist, existieren keine radialen Nullgeodäten.
  - Die rotierende Quelle „schleppt“ den sie umgebenden Raum und damit die Geodäten mit sich. Dieser relativistische Effekt wird **frame dragging** genannt.

    Während es in der Newton'schen Theorie möglich ist, in ein rotierendes Bezugssystem zu wechseln, in dem die Quelle in Ruhe ist, trifft dies für die AR nicht zu, da kein Koordinatensystem existiert, in dem die Kerr–Lösung in die Schwarzschild–Lösung übergeht.
  - Die Gleichungen für die Nullgeodäten $ds^2 = 0$ in der Hyperfläche $\theta = konstant$ (wegen Axialsymmetrie) lauten (d'Inverno, Kap. 19.6)

$$\dot{t} = (r^2 + a^2)\frac{\ell}{\Delta}$$

$$\dot{r} = \pm\ell$$

$$\dot{\varphi} = a\frac{\ell}{\Delta}\,,$$

wobei ℓ eine Integrationskonstante ist. Der Punkt bezeichnet wiederum die Ableitung bezüglich eines affinen Parameters. Wählt man $\dot{r} = +\ell$, so folgt

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = \frac{r^2 + a^2}{\Delta}$$

und

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} = \frac{a}{\Delta}\,.$$

Im Gebiet (I) ist $\Delta > 0$ (siehe oben) und daher $dr/dt > 0$, d.h. $\dot{r} = +\ell$ beschreibt eine **auslaufende Nullgeodäte**. Entsprechend handelt es sich bei $\dot{r} = -\ell$ um eine einlaufende Nullgeodäte.

– Die Menge (genauer Kongruenz; siehe d'Inverno, Kap. 19.6) von ein- bzw. auslaufenden Nullgeodäten spielt in der Kerr–Metrik die gleiche Rolle wie die radialen Nullgeodäten in der Schwarzschild–Metrik. Sie enthält die Information über die radiale Veränderung der Lichtkegelstruktur.

– Auf dem Ereignishorizont $r = r_+$ werden t und φ singulär. Dies ist aber, ähnlich wie im Falle der Schwarzschild–Metrik, wieder nur die Konsequenz einer Koordinatensingularität, die sich durch den Übergang zu Eddington–Finkelstein–Koordinaten beheben lässt (siehe z.B. d'Inverno, Kap. 19.6).

• Stationärer Grenzfall

– Für Nullkurven $dr = d\theta = ds^2 = 0$ im Gebiet (I) (d.h. für Photonen, die das Schwarze Loch bei festem r und θ umkreisen) reduziert sich das Boyer–Lindquist–Linienelement (5.35) zu

$$\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\varphi - adt]^2 = 0\,.$$

Auflösen nach $d\varphi/dt$ ergibt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a\sin\theta \pm \Delta^{1/2}}{(r^2 + a^2)\sin\theta \pm a\Delta^{1/2}\sin^2\theta}\,. \tag{5.42}$$

Man beachte, dass diese Kurven keine Geodäten sind. Sie berühren aber die Weltlinien von Photonen, welche anfangs gezwungen waren, die Quelle mit festen r und θ zu umlaufen

– Das positive Vorzeichen in (5.42) führt zu $d\varphi/dt > 0$, d.h. das Photon umläuft die Quelle in Rotationsrichtung des Schwarzen Lochs.

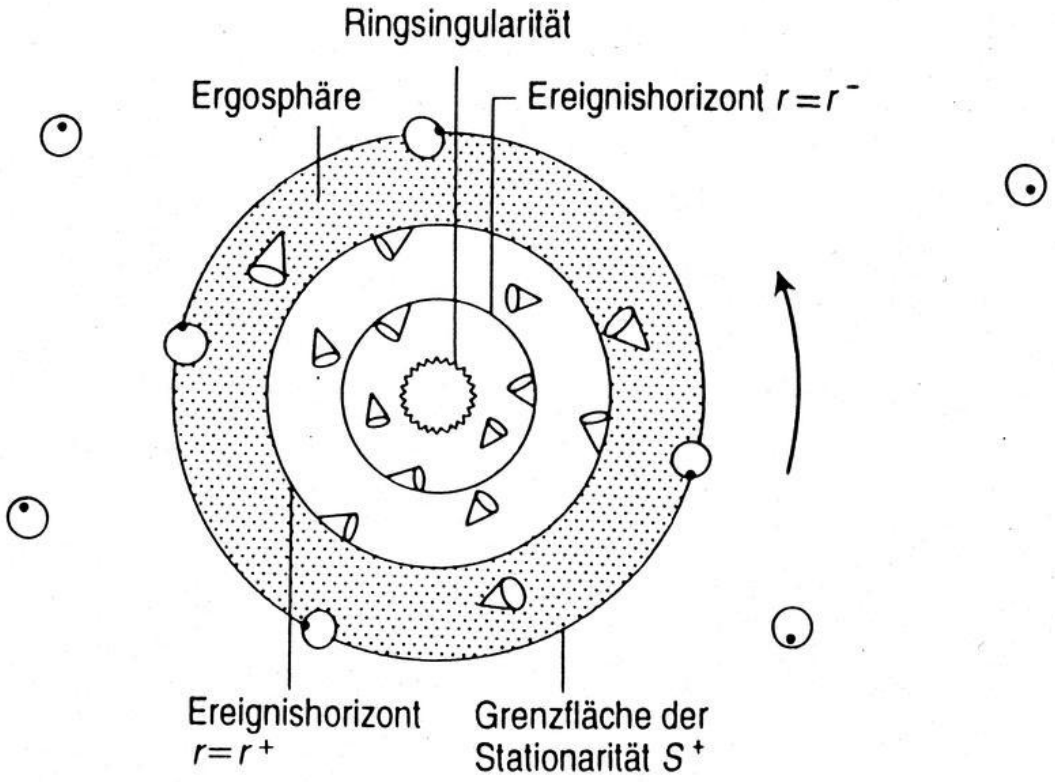


Abbildung 5.10: Das räumliche Diagramm der Kerr–Lösung ($a^2 < m^2$) in der Äquatorebene (Fig. 19.5 aus d'Inverno).

– Wann kann $d\varphi/dt \leq 0$ sein? Dazu muss man (5.42) mit dem negativen Vorzeichen untersuchen. Im Gebiet (I) ist

$$r > r_+ \;\Leftrightarrow\; (r^2 + a^2)\sin^2\theta - a\Delta^{1/2}\sin^2\theta > 0$$

Daher ist der Nenner von (5.42) positiv. Somit gilt

$$\frac{d\varphi}{dt} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; a\sin\theta - \Delta^{1/2} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; r \geq r_{S_+}\,.$$

Damit ist auf S_+ die Ableitung $d\varphi/dt = 0$, und jedes Teilchen auf dieser Hyperfläche, das versucht, die Quelle entgegen ihrer Drehrichtung zu umlaufen, müsste sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, um stationär zu bleiben (stationär relativ zu einem im Uendlichen stationären Beobachter).

– In der Ergosphäre kippen die Lichtkegel in Richtung von φ soweit über, bis Photonen und Teilchen gezwungen werden, die Quelle in Drehrichtung zu umrunden (Abb. 5.10).

Daher wird die Fläche unendlicher Rotverschiebung S_+ auch als **Grenzfläche der Stationarität** bezeichnet. Die Fläche ist zeitartig, ausgenommen an zwei

Punkten auf der Achse, wo sie nullartig ist und mit dem Ereignishorizont $r = r_+$ zusammenfällt. Dort, wo die Fläche zeitartig ist, kann sie von Teilchen sowohl in einlaufender als auch auslaufender Richtungen gekreuzt werden (Abb. 5.10).

- Teilchenbewegung in der Äquatorebene eines rotierenden Schwarzen Lochs

  – Wie bei der Schwarzschild–Metrik leitet man die Bewegungsgleichungen aus der Lagrangefunktion ab (siehe z.B Shapiro & Teukolsky, Kap. 12.7). Die Gleichung für $\dot{r}$, d.h. für radiale Bewegungen in der Äquatorialebene, lautet

  $$r^3 \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = V(E,\ell,r) \equiv E^2(r^3+a^2r+2ma^2)-4amE\ell-(r-2m)\ell^2-\mu r\Delta\,, \quad (5.43)$$

  wobei μ die Ruhemasse des Teilchens und E sowie ℓ Integrationskonstanten sind.

  – Für **Kreisbahnen** muss das **effektive Potential** V die Bedingungen $V = 0$ und $\partial V/\partial r = 0$ erfüllen. Diese beiden Gleichung kann man nach E und ℓ auflösen. Nach sehr aufwändiger Algebra erhält man dann für die spezifische Energie und den spezifischen Drehimpuls ($a > 0$):

  $$\tilde{E} = \frac{r^2 - 2mr \pm a\sqrt{mr}}{r(r^2 - 3mr \pm 2a\sqrt{mr})^{1/2}} \quad (5.44)$$

  und

  $$\tilde{\ell} = \pm\frac{\sqrt{mr}(r^2 \mp 2a\sqrt{mr} + a^2)}{r(r^2 - 3mr \pm 2a\sqrt{mr})^{1/2}} \quad (5.45)$$

  Im Grenzfall $a \to 0$ folgen die entsprechenden Beziehungen der Schwarzschild–Metrik. Das positive Vorzeichen entspricht korotierenden (direkten) Orbits, während das Minuszeichen retorograden Orbits zugeordnet ist.

  Kreisbahnen existieren von $r \to \infty$ bis zum **minimalen Kreisorbit** r_{ph}, wo der Nenner in (5.44) und (5.45) null wird, d.h.

  $$r_{ph}^2 - 3mr_{ph} \pm 2a\sqrt{mr_{ph}} = 0\,.$$

  Daraus folgt

  $$r_{ph} = 2m\left\{1 + \cos\left[\frac{2}{3}\arccos\left(\mp\frac{a}{m}\right)\right]\right\}\,.$$

  Der minimale Kreisorbit r_{ph} entspricht dabei einem Photonenorbit ($v_\varphi = c$).

  – Nicht alle Kreisorbits mit $r > r_{ph}$ sind gebunden. Durch eine kleine nach aussen gerichtete Störung entweicht ein Teilchen auf einem ungebunden Orbit ($\tilde{E} > 1$) ins Unendliche. Gebundene Kreisorbits ($\tilde{E} \leq 1$) existieren nur für $r > r_{mg}$, wobei r_{mg} der **marginal gebundenen Kreisbahn** mit $\tilde{E} = 1$ entspricht:

  $$r_{mg} = 2m \mp a + 2m^{1/2}(m \mp a)^{1/2}$$

Man beachte, dass r_{mg} auch der **minimale Periastron** für alle parabolischen Orbits ist. Da in der Astrophysik einfallende Teilchen sich auf nahezu parabolischen Bahnen bewegen (da $v_\infty \ll 1$) endet jede parabolische Bahn, die $r < r_{mg}$ erreicht, im Schwarzen Loch.

– Auch die gebundenen Kreisorbits sind nicht alle stabil, denn Stabilität erfordert $\partial^2 V/\partial r^2 \leq 0$ oder

$$1 - \tilde{E}^2 \geq \frac{2}{3}\frac{m}{r}\,.$$

Daraus folgt für die Radialkoordinate des **marginal stabilen Kreisorbits**:

$$r_{ms} = m\left\{3 + Z_2 \mp [(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)]^{1/2}\right\} \tag{5.46}$$

mit

$$Z_1 = 1 + \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^{1/3}\left[\left(1 + \frac{a}{m}\right)^{1/3} + \left(1 - \frac{a}{m}\right)^{1/3}\right]$$

und

$$Z_2 = \left(3\frac{a^2}{m^2} + Z_1^2\right)^{1/2}\,.$$

– Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die verschiedenen kritischen Radialkoordinaten der Kreisorbits:

	$a = 0$	$a = m$, $\ell > 0$ (direkt)	$a = m$, $\ell < 0$ (retrograd)
r_{ph}	3 m	1 m	4 m
r_{mg}	4 m	1 m	5.83 m
r_{ms}	6 m	1 m	9 m

– Die Tatsache, dass in Boyer–Lindquist–Koordinaten r_+, r_{ph}, r_{mg} und r_{ms} für $a \to m$ alle gegen m streben, ist ein Koordinateneffekt, denn die Radien entsprechen verschiedenen Raumzeitregionen (Bardeen et al., *Astrophys. J.* **178** (1972), 347).

– Die spezifische Energie $\tilde{E}$ und die spezifische Bindungsenergie $1 - \tilde{E}$ für ein Testteilchen in der letzten stabilen Kreisbahn kann man der folgenden Tabelle entnehmen:

	$a = 0$	$a = m$, $\ell > 0$ (direkt)	$a = m$, $\ell < 0$ (retrograd)
$\tilde{E}$	$\sqrt{8/9}$	$\sqrt{1/3}$	$\sqrt{25/27}$
$1 - \tilde{E}$	0.057	0.423	0.038

– Eine sehr interessante Eigenschaft rotierender Schwarzer Löcher ist die Existenz von Orbits mit **negativer Energie**. Löst man die Bewegungsgleichung (5.43) nach E auf, so erhält man (Vorzeichen aus asymptotischen Verhalten):

$$E = \frac{2am\ell + (\ell^2 r^2 \Delta + \mu^2 r\Delta + r^3 \dot{r}^2)^{1/2}}{r^3 + a^2 r + 2ma^2} \,.$$

Demnach ist $E < 0$, falls $\ell < 0$ (retrograder Orbit) und

$$\ell^2 r^2 \Delta + \mu^2 r\Delta + r^3 \dot{r}^2 < 4a^2 m^2 \ell^2 \,.$$

Die Grenze des Gebiets der Orbits mit negativer Energie erhält man, indem man die linke Seite möglichst klein macht. Dies ist der Fall, wenn die Ruhemasse $\mu \to 0$ (d.h. für ein ultra–relativistisches Teilchen) und wenn $\dot{r} \to 0$ (d.h. für eine azimuthale Bewegung). Man kann dann zeigen, dass $E < 0$ ist, falls $r < r_{S_+}$ d.h. die **Ergosphäre** (griechisch: ergos = Arbeit) ist das **Gebiet der Orbits mit negativer Energie**.

Ein Teilchen kann nur innerhalb der Grenzfläche der Stationarität auf einen Orbit mit negativer Energie gelangen; es stürzt anschließend in das Schwarze Loch.

- Energieextraktion aus einem rotierenden Schwarzen Loch [Penrose 1969] [6]

Man bringt ein Teilchen der Energie E_{in} in die Ergosphäre, wo es sich in zwei Teilchen spaltet. Eines der beiden neu entstandenen Teilchen fällt auf einer Trajektorie mit negativer Energie ins Schwarze Loch ($E_{down} < 0$), während das zweite Teilchen auf einer Trajektorie positiver Energie ($E_{out} > 0$) ins Unendliche entweicht (Abb. 5.11).

Aus der Energieerhaltung

$$E_{in} = E_{down} + E_{out} \;\Rightarrow\; E_{out} > E_{in} \,,$$

da $E_{down} < 0$. Die bei dem Penrose–Prozess gewonnene Teilchenenergie stammt aus der Rotationsenergie des Schwarzen Lochs.

Der Penrose–Prozess ist astrophysikalisch vermutlich nicht wichtig, denn die Teilchenspaltung muss mit $v > c/2$ erfolgen (Bardeen et al. 1972).

– Die maximal extrahierbare Energie (Masse) durch den Penrose–Prozess beträgt (siehe z.B. Frolov & Novikov):

$$\Delta M = M_0 - M_{\rm ir}(M_0, a_0)$$

wobei M_0 die Anfangsmasse und a_0 der Anfangsdrehimpuls des Schwarzen Lochs sind. Die Größe $M_{\rm ir}$ heißt **irreduzible Masse** und ist durch

$$M_{\rm ir} = \frac{1}{2}\sqrt{r_+^2 + a_0^2} = M_0 \left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - (a_0/M_0)^2}\right]^{1/2}$$

[6] *Riv. Nuovo Cim.* **1** (1969), 252

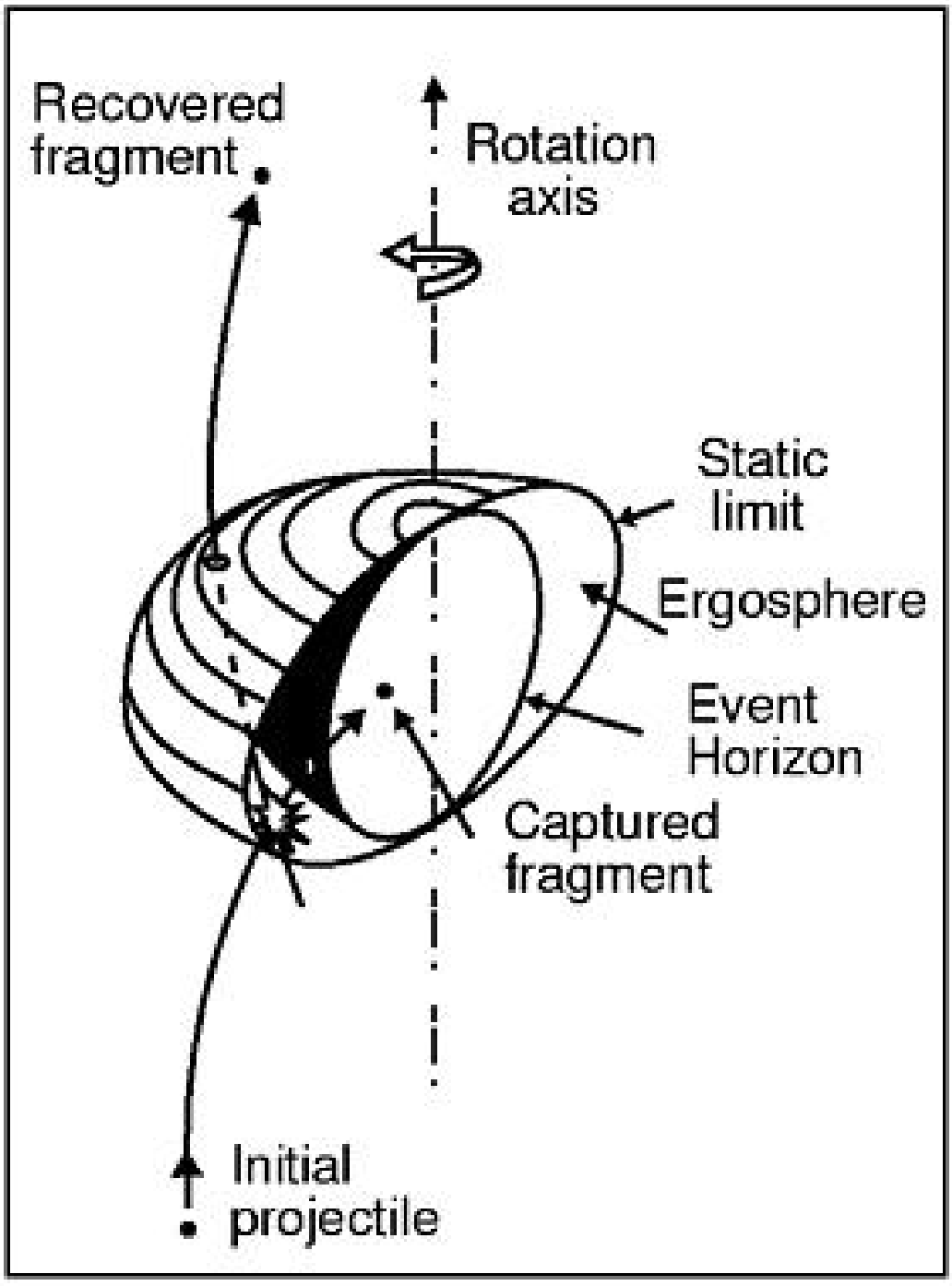


Abbildung 5.11: Querschnitt durch ein rotierendes Schwarzes Loch (Fig. 10 aus J.P. Luminet, astro-ph/9801252).

gegeben. Für $a_0^2 = M_0^2$ gilt

$$\Delta M_{\max} = (1 - 1/\sqrt{2}) M_0 \simeq 0.29 M_0$$

– Eine andere Schreibweise für die irreduzible Masse lautet:

$$M_{ir} = \sqrt{\tilde{A}/2}\,,$$

wobei

$$\tilde{A} \equiv M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}\,,\ J \equiv a\,M$$

Die Größe $\tilde{A}$ ist bis auf einen numerischen Faktor gleich der Fläche des Schwarzen Lochs:

$$A \equiv \int\int \sqrt{g^{(2)}}\, d\theta d\varphi\,.$$

Hierbei ist $g^{(2)}$ die Determinante der 2-Metrik ($t = konstant$, $r = r_+ = konstant$) [7] , d.h. $g^{(2)} = g_{\theta\theta}\, g_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta\,(r_+^2 + a^2)^2$. Unter Beachtung von $r_+^2 + a^2 = 2Mr_+$ (wg. $\Delta = 0$) folgt $g^{(2)} = (2Mr_+ \sin\theta)^2$ und daher gilt

$$A = \int\int 2Mr_+ \sin\theta d\theta d\varphi$$

bzw. mit (5.41)

$$A = 8\pi M \left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right) = 8\pi\,\tilde{A}\,.$$

Im Schwarzschild–Limes $a \to 0$ folgt $A = 4\pi(2M)^2$.

– **Hawking Flächen–Theorem:** Die Fläche eines Schwarzen Lochs kann (bei beliebiger klassischer Wechselwirkung) niemals abnehmen:

$$\delta A \geq 0\,.$$

Bei mehreren Schwarzen Löcher gilt dies für die Summe der Flächen.
Mit

$$\delta A = 8\pi\delta M \left(M + \sqrt{M^2 - a^2}\right) + 8\pi M \left(\delta M + \frac{M\delta M}{\sqrt{M^2 - a^2}} - \frac{a\delta a}{\sqrt{M - a^2}}\right)$$

folgt aus dem Flächentheorem

$$\left[2M\sqrt{M^2 - a^2} + M^2 - a^2 + M^2\right] \delta M \geq Ma\delta a$$

und daher im Grenzfall $a \to M$

$$M\delta M \geq a\delta a \qquad \text{bzw.} \quad \delta(M^2) > \delta(a^2)\,,$$

[7] Dann gilt $dt = dr = 0$ und $\Delta = 0$, womit sich das Linienelement in Boyer-Lindquist Koordinaten (5.35) auf die Form $ds^2 = -\sin^2\theta/\rho^2(r_+^2 + a^2)^2 d\varphi^2 - \rho^2 d\theta^2$ reduziert.

d.h. M^2 bleibt immer größer als a^2. Es ist also nicht möglich, eine nackte Singularität zu erzeugen, indem man den Drehimpuls eines rotierenden Schwarzen Lochs durch geeigneten Teilchenbeschuss maximal ($a = M$) zu machen versucht. Der Einfangsquerschnitt von Teilchen, die a/M erhöhen, geht mit $a \to M$ gegen Null.

5.4 Thermodynamik Schwarzer Löcher

(siehe auch Frolov & Novikov, Kap. 10.1 und 12.6)

- Das Flächentheorem erinnert an den 2. Hauptsatz der Thermodynamik. Daher hat sich Bekenstein (1973, Phys.Rev.D 7, 2333) die Frage gestellt, ob so etwas wie eine Thermodynamik Schwarzer Löcher existiert.
- Dabei tritt allerdings das Problem auf, dass in der (klassischen) AR kein Gleichgewichtszustand möglich ist, da ein Schwarzes Loch Strahlung bzw. Wärme **nur** absorbiert.
- Wenn ein heißer Körper in ein Schwarzes Loch fällt, nimmt die Entropie im Universum ab. Da dies ein Widerspruch zum 2. Hauptsatz der Thermodynamik ist, müssen Schwarze Löcher eine Entropie besitzen.
- Körper, die in ein Schwarzes Loch fallen, erhöhen dessen Masse M, Drehimpuls L und Entropie S.
- Ist die Entropie eines Schwarzen Loch mit der Fläche des Horizonts verknüpft?
- **Hawking Strahlung:** Paarerzeugung am Horizont (Quantenfeldtheorie in gegebenen Gravitationsfeld)
- **Idee:** Vakuum hat komplexe Struktur, die die Erzeugung, Wechselwirkung und Vernichtung **virtueller** (kurzlebiger) **Teilchen** gestattet. Ein „normales“ Vakuum ist stabil, d.h. es findet keine Erzeugung reeller (langlebiger) Teilchen statt. Beim Vorhandensein äußerer Felder (z.B. $\vec{E}, \vec{B}$ oder $\vec{G}$) können virtuelle Teilchen aus dem Feld genügend Energie erhalten, um zu materialisieren. d.h. um reell (langlebig) zu werden.
- S. Hawking (*Nature* **248** (1974), 30; *Commun. Math. Phys.* **43** (1975), 199): Vakuum ist instabil im Gravitationsfeld in der Nähe eines Schwarzen Lochs. [8]

[8] Die Energie eines Teilchens oder Feldes, das sich in einem stationären Gravitationsfeld bewegt, ist erhalten. Daher können in einem stationären Gravitationsfeld nicht beide Teilchen ausserhalb des Horizonts erzeugt werden. Ein Teilchen, das innerhalb des Horizonts erzeugt wird hat dagegen eine negative Energie, denn es gilt $E \equiv mc^2(-g_{00})u^0 > 0$ ausserhalb (wo $-g_{00} > 0$) und $E < 0$ innerhalb ($-g_{00} < 0$) des Horizonts.

Ein Schwarzes Loch emittiert Teilchen ähnlich (Vernachlässigung der Streuung der Teilchen) einem Schwarzen Körper mit der **Hawking–Temperatur**

$$T_H = \frac{\hbar\kappa}{2\pi c k_B}\,, \tag{5.47}$$

wobei die **Oberflächengravitation** κ die Stärke des Gravitationsfeldes in der Nähe des Horizonts charakterisiert.

Es gilt

$$\kappa \equiv \frac{4\pi}{A}\sqrt{M^2 - (J/M)^2}\,, \tag{5.48}$$

bzw.

$$\kappa = \frac{r_+ - M}{r_+ + a^2}\,,$$

d.h. die Oberflächengravitation eines (auch rotierenden) Schwarzen Lochs und damit seine Hawking–Temperatur sind konstant auf dem Horizont und sind durch die Masse und den Drehimpuls des Schwarzen Lochs bestimmt.

Für $a = M$ folgt $\kappa = 0$ aus (5.48) und damit $T_H = 0$ aus (5.47), d.h. für ein maximal rotierendes Kerr Schwarzes Loch verschwindet die Oberflächengravitation und seine Hawking–Temperatur ist Null.

Im Schwarzschild–Limes $J = 0$ gilt

$$\kappa = \frac{1}{4M}\left[\frac{c^4}{G}\right]\,,$$

d.h. die **Hawking Temperatur eines Schwarzschild Schwarzen Lochs** beträgt

$$T_H = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}\,. \tag{5.49}$$

Sie ist umgekehrt proportional zur Masse des Schwarzen Lochs und ihr Wert ist durch eine Kombination aller fundamentalen physikalischen Konstanten gegeben.

- Unter Verwendung der **Planck–Masse**

$$m_{\rm pl} \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \simeq 2.177\,10^{-5}[g]$$

folgt aus (5.47)

$$k_B T_H = \frac{m_{\rm pl}c^2}{8\pi}\,\left(\frac{m_{\rm pl}}{M}\right)$$

und damit

$$T_H \simeq 10^{-7}[K] \left(\frac{M_\odot}{M}\right) . \tag{5.50}$$

Für Schwarze Löcher mit einer Masse $M \gg m_{\rm pl}$ sind Quantenkorrekturen semi–klassisch beschreibbar. Ist dagegen $M \leq m_{\rm pl}$ wird eine Theorie der **Quantengravitation** benötigt.

- Die Hawking–Strahlung bewirkt einen Energie (Massen)–Verlust des Schwarzen Lochs und führt letztendlich zu seiner **Verdampfung**. Dadurch ist das Flächentheorem verletzt, da mit der Masse auch die Fläche des Schwarzen Lochs abnimmt:

$$\dot{M} \sim \sigma T_H^4 A\,, \qquad \text{mit} \quad \sigma \equiv \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^2}$$

Für die zeitliche Abnahme der Masse des Schwarzen Lochs gilt demnach nach Einsetzen der entsprechenden Größen

$$-\frac{dM}{dt} \sim b \left(\frac{m_{\rm pl}}{M}\right)^2 \left(\frac{m_{\rm pl}}{\tau_{\rm pl}}\right) N\,,$$

wobei $b = (30\pi\, 8^3)^{-1} \simeq 2.6\, 10^{-6}$, $\tau_{\rm pl} \equiv \sqrt{\hbar G/c^5} = 5.6\, 10^{-44}\,[\text{sec}]$ und N die Anzahl der Zustände und Teilchenarten ist, die abgestrahlt werden.

- Die **„Lebenszeit“** eines Schwarzen Lochs beträgt demnach

$$t_H \equiv \left(\frac{E}{\dot{E}}\right) \sim \left(\frac{M}{M^{-2}}\right) \sim \frac{1}{36} t_{\rm pl} \left(\frac{M}{m_{\rm pl}}\right)^3 \sim 10^{10}\,\text{Jahre} \left(\frac{M}{10^{15}\,\text{g}}\right)^3 N^{-1}$$

Für ein Schwarzes Loch von einer Sonnenmasse gilt $t_H \simeq 10^{65}\,[\text{Jahre}]$.

Wenn die Masse des Schwarzen Lochs abnimmt, steigt seine Hawking–Temperatur und N nimmt zu. Dies führt letztendlich zu einer **explosionsähnlichen Schlussphase** der Entwicklung, bei der die Energie der Hawking–Strahlung Werte von $\hbar\omega_H \sim 100\,\text{MeV}\,(10^{15}\,\text{g}/M)$ erreicht.

Das Verdampfen Schwarzer Löcher trägt also zum Gammastrahlen–Hintergrund bei. Aus Beobachtungen findet man, dass die obere Grenze für den Beitrag verdampfender Schwarzer Löcher zur kosmischen Dichte sehr klein sein muss ($\Omega_{BH}^{(10^{15}g)} < 10^{-8}$).

Offene Frage: Verdampft das Schwarze Loch komplett oder bleibt eine Restmasse $M_{\rm rest} \simeq m_{\rm pl}$ übrig? Die Beantwortung dieser Frage erfordert eine Theorie der Quantengravitation.

- Die **Hauptsätze der Thermodynamik Schwarzer Löcher**:

  Wenn man die Beziehung für die Fläche eines Schwarzen Lochs $A(M, J)$ invertiert, erhält man eine Beziehung für die innere Energie (Masse) des Schwarzen Lochs:

$$M = M(A, J) = \left[\frac{\pi(\frac{A}{4\pi})^2 + 4J^2}{A}\right]^{1/2} .$$

  Daraus folgt, dass sich die inneren Energien zweier stationärer Schwarzer Löcher mit geringfügig unterschiedlichen Flächen dA und Drehimpulsen dJ um den Betrag

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ$$

  unterscheiden, wobei $\Omega_H \equiv 4\pi J/(MA)$ die Winkelgeschwindigkeit und $\Omega_H dJ$ die Differenz der Rotationsenergien der Schwarzen Löcher sind. Diese Beziehung ist ganz ähnlich dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik.

  Zusammenfassend ergibt sich also folgende Analogie:

Gesetz	Thermodynamik	Schwarzes Loch
0.	$T =$ konst im gesamten Körper im thermischen Gleichgewicht	$\kappa =$ konst auf dem gesamten Horizont eines stationären Schwarzen Lochs
1.	$dE = TdS +$ reversible Arbeit	$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ$ $= T_H dS_H + \Omega_H dJ$
2.	$\Delta S \geq 0$ für jeden Prozess	$\Delta A \geq$ für jeden klass. Prozess; für beliebige Prozesse gilt: $\Delta\tilde{S} \equiv \Delta S_H + \Delta S_m \geq 0$
3.	Durch keinen Prozess, kann der Zustand $T = 0$ erreicht werden	Durch keinen Prozess, kann ein Zustand $\kappa = 0$ erreicht werden $(a^2 < M^2)$

  $S_H \equiv A/(4l_{\rm pl}^2)$ ist die **Bekenstein–Hawking Entropie** eines Schwarzen Lochs und S_m ist die Entropie der Strahlung und Materie außerhalb des Schwarzen Lochs.

  Die Entropie der Sonne beträgt $S_{\rm Sonne} \simeq 10^{58} k_B$, während für ein Schwarzes Loch mit der gleichen Masse $S_{BH(1M_\odot)} \simeq 10^{77} k_B$ gilt, d.h. **die Entstehung eines Schwarzen Lochs ist mit einem riesigen Informationsverlust verbunden**. Die ist eine Konsequenz des „no hair“ Theorems.