

Kapitel 2

Sternaufbau und Sternentwicklung

2.1 Hydrostatisches Gleichgewicht und Polytrope Gaskugeln

- einfachster Typ von Sternmodellen [Emden (1907), Lane (1870)]
- **Polytrope**; Modell eines Sterns im hydrostatischen Gleichgewicht bei dem die Druck- und Dichteverteilung die Bedingung

$$P(r) = K \rho(r)^{1+\frac{1}{n}} \tag{2.1}$$

erfüllt. Die Größen K und n heißen **Polytropenkonstante** und **Polytropenindex**. Beziehung (2.1) gilt im ganzen Stern, d.h. K und n sind räumlich (aber nicht notwendigerweise zeitlich) konstant.

- Die Polytropenbeziehung braucht **nicht** mit der Zustandsgleichung identisch zu sein!
- Es existieren zwei Möglichkeiten für Polytrope
 - a) Die Zustandsgleichung ist polytrop
Dies gilt zum Beispiel für ein vollständig entartetes Elektronengas
 1. NR: $P \sim \rho^{5/3} \rightarrow n = 3/2$
 2. ER: $P \sim \rho^{4/3} \rightarrow n = 3$
 - b) Druck- und Temperatur-Schichtung sind gekoppelt
Das Gas im Stern genüge der Zustandsgleichung $P = P(\rho, T)$. Außerdem gelte für die Temperaturschichtung im Stern noch die Nebenbedingung $T = T(P)$.

1. **isotherme** Schichtung ($T = T_0$) eines idealen Gas ($P = \mathcal{R}/\tilde{\mu}\rho T$) mit mittlerem Molekulargewicht $\tilde{\mu} \rightarrow P \sim \rho$, $n = \infty$ und $K = \mathcal{R}T_0/\tilde{\mu}$, d.h. K hängt von T_0 und $\tilde{\mu}$ ab und ist daher frei wählbar.
2. **adiabatische** Schichtung ($T \sim P^{\nabla_{ad}}$) durch Konvektion in einem idealen Gas mit einem Temperaturgradienten $\nabla = \nabla_{ad} \equiv (d \ln T / d \ln P)_{ad}$. Wenn der Strahlungsdruck zu vernachlässigen ist, folgt für ein (1-atomiges) ideales Gas $\nabla_{ad} = 2/5$, d.h. $T \sim P^{2/5}$ im ganzen Stern. Daraus ergibt sich (für $\tilde{\mu} = const.$) die polytrope Beziehung

$$P \sim \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad \text{mit} \quad n = \frac{1 - \nabla_{ad}}{\nabla_{ad}}$$

und $n = 3/2$.

- **Wichtiger Unterschied:** Wenn Zustandsgleichung von polytropem Typ ist, ist die Polytropenkonstante K festgelegt und läßt sich aus Naturkonstanten berechnen. Wenn dagegen die Druck- und Temperatur-Schichtung gekoppelt sind, ist K ein freier Parameter, der innerhalb des Sterns konstant ist, aber von Stern zu Stern variieren kann.
- Emdensche Differentialgleichung

Die mechanische Sternaufbaugleichung lautet (siehe z.B. Kippenhahn & Weigert)

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho \quad (2.2)$$

mit

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (2.3)$$

Kombiniert man beide Gleichungen, so erhält man die Poisson-Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho \quad (2.4)$$

Für eine Polytrope (2.1) gilt

$$\frac{dP}{dr} = K \left(1 + \frac{1}{n} \right) \rho^{\frac{1}{n}} \frac{d\rho}{dr}.$$

Damit folgt für die Poisson-Gleichung

$$K \frac{n+1}{n} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho.$$

Führt man dimensionslose Größen y und x gemäß

$$\rho = \rho_c y^n$$

und

$$r = \alpha x \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1}{n}-1} \quad [\text{cm}^2]$$

ein, so erhält man die nicht-lineare **Emdensche Differentialgleichung**

$$\boxed{\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n} \quad (2.5)$$

für die **Lane–Emden–Funktion** $y(x)$ mit den Randbedingungen $y(x=0) = 1$ und $dy/dx|_{x=0} = 0$. Analytische Lösungen existieren für $n = 0, 1$ und 5

1. $n = 0 \quad y(x) = 1 - x^2/6$
2. $n = 1 \quad y(x) = \sin x/x$
3. $n = 5 \quad y(x) = \left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1/2}$

$\forall n < 5 : y = 0$ für $x = x_0 < \infty$ und $y'(x_0) < 0$, d.h. Polytrope mit $n < 5$ haben einen scharfen Rand

$\forall n : y(x) \approx 1 - \frac{x^2}{6}$ für $x \ll 1$

- Wichtige Eigenschaften von Polytropen

Der **Radius** einer Polytrope entspricht der ersten Nullstelle der entsprechenden Lane–Emden–Funktion ($y(x_0) = 0$) und ist durch

$$\boxed{R = \alpha x_0 = \left[\frac{K(n+1) \rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G} \right]^{1/2} x_0} \quad (2.6)$$

gegeben. Für die **Masse** einer Polytropen gilt

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr$$

bzw.

$$M = 4\pi\rho_c\alpha^3 \int_0^{x_0} x^2 y^n(x) dx.$$

Unter Verwendung der Emdenschen Differentialgleichung (2.5) erhält man

$$M = -4\pi\rho_c\alpha^3 \int_0^{x_0} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) dx$$

und damit schließlich

$$\boxed{M = -4\pi\rho_c\alpha^3 x_0^2 \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0}} \quad (2.7)$$

bzw.

$$\boxed{M = -4\pi \left[\frac{K(n+1)}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{(3-n)/2n} x_0^2 y'(x_0)} \quad (2.8)$$

Wichtig: Für $n = 3$ hängt die Masse nicht von ρ_c ab

$$M_3 \equiv M(n=3) = 4\pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} [-x_0^2 y'(x_0)]_{n=3}. \quad (2.9)$$

Aus den obigen Gleichungen für Masse und Radius einer Polytrope erhält man die **Masse–Radius–Beziehung** (eindeutig für festes K und n)

$$\boxed{R^{3-n} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{K(n+1)}{G} \right]^n \left[-x_0^{\frac{n+1}{n-1}} y'(x_0) \right]^{n-1} M^{1-n}} \quad (2.10)$$

1. $n = 3$: M ist unabhängig von R
2. $n = 1$: R ist unabhängig von M

Für gegebene Werte von K , n und M gibt es nur eine einzige Lösung. Die **potentielle Energie** einer Polytrope ist gegeben durch

$$\boxed{E_G = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}} \quad (2.11)$$

2.2 Virialsatz, Stabilitätskriterien

Statistische Aussage über ein System wechselwirkender Teilchen (siehe z.B. Chandrasekhar S. 49ff). Zur Ableitung des Virialsatzes geht man von der Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts aus:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\rho$$

bzw.

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \quad \text{mit} \quad dM_r = 4\pi r^2 \rho dr$$

Integration über den Stern liefert

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{dP}{dM_r} dM_r = - \int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r$$

bzw. nach partieller Integration

$$4\pi r^3 P \Big|_0^M - \int_0^M 12\pi r^2 \frac{dr}{dM_r} P dM_r = E_G$$

wobei E_G die Gravitationsbindungsenergie ist. Da der Druck an der Sternoberfläche verschwindet, ist der erste Term auf der linken Seite der obigen Gleichung gleich Null. Damit folgt der Virialsatz

$$E_G = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r \quad (2.12)$$

- Betrachtet man ein ideales Gas mit $P/\rho = \mathcal{R}T/\tilde{\mu} = 2/3c_V T$, so folgt aus dem Virialsatz

$$E_G = -3 \int_0^M \frac{2}{3} c_V T dM_r = -2E_T \quad (2.13)$$

wobei E_T die thermische Energie und c_V die spezifische Wärme (bei konstantem Volumen) des Gases sind.

Kontrahiert ein Stern, so erhöht sich der Betrag seiner (negativen) Gravitationsbindungsenergie $|E_G|$ und seine Dichte nimmt zu. Die bei der Kontraktion freigesetzte Gravitationsbindungsenergie $-\delta E_G > 0$ wird zur Hälfte abgestrahlt $E_{rad} = -\delta E_G/2$. Die andere Hälfte erhöht die thermische Energie des Sterns ($\delta E_T = -\delta E_G/2 > 0$), d.h. der Stern wird heisser.

Ein Stern kann nicht abkühlen! Solange sich die Sternmaterie durch ein ideales Gas beschreiben läßt, führt die durch die Gravitation angetriebene Entwicklung eines Sterns zu immer höheren Dichten und Temperaturen.

2.3 Überblick über die Sternentwicklung

- Ein Stern entsteht aus interstellarem Gas durch den Kollaps lokaler Verdichtungen (mit $M > M_{Jeans}$) und anschließender Fragmentation
- Treibende Kraft der Sternentwicklung ist die **Gravitation**
- Sterne verlieren Energie durch Abstrahlung ($\gamma's, \nu's$). Die abgestrahlte Energie wird
 - entweder durch Kernfusionsprozesse ersetzt (hydrostatische Brennphase)
 - oder durch Gravitationsbindungsenergie (Stern kontrahiert, verdichtet und erhitzt (!) sich).
- Coulomb-Abstoßung zwischen zwei Atomkernen der Ladungszahlen Z_1 und Z_2 ist bestimmt durch Potential $V_C = Z_1 Z_2 e^2 / r$, wobei r der Abstand der Kerne und e die Elementarladung sind.

Der **Wirkungsquerschnitt** für eine Kernreaktion zwischen den beiden Kernen ist

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} \exp\left(-\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}\right),$$

wobei E die kinetische Energie im Schwerpunktsystem und v die Relativgeschwindigkeit der beiden Kerne sind. $S(E)$ ist der sogenannte **astrophysikalische S-Faktor**, der die Information über die Kernstruktur enthält.

⇒ **Hierarchie von nuklearen Brennphasen**, geordnet nach den Z_i 's der wichtigsten Reaktionspartner. Für größere Z_i 's sind höhere Temperaturen für die Zündung nötig!

- Nukleare Brennphasen sind zeitlich und räumlich getrennt. Sie führen zu einer Zwiebschalenstruktur des Sterns in späten Entwicklungsphasen.
- Die thermonukleare „Asche“ einer Brennphase wird zum „Brennstoff“ für die sich anschließende Brennphase.

- Ob eine weitere Brennphase stattfindet, hängt von der erreichbaren Maximaltemperatur und daher von der Sternmasse ab.

Die Anzahl der thermonuklearen Brennphasen ist durch die Masse des Sterns bestimmt.

- Für $M \gtrsim 8 - 10 M_{\odot}$ werden alle kernphysikalisch möglichen thermonuklearen Brennphasen durchlaufen.

Brennphase	Brennstoff	Zündtemperatur [10^9 K]	„Asche“	Energieerzeugung [10^{18} erg/g]	Kühlung durch
D-Brennen	^2H	0.0004	^3He	~ 0.0001	γ
H-Brennen	^1H	0.003	$^4\text{He}, ^{14}\text{N}$	$5 \sim 8$	γ
He-Brennen	^4He	0.2	$^{12}\text{C}, ^{16}\text{O}, ^{22}\text{Ne}$	0.7	γ
C-Brennen	^{12}C	0.8	$^{20}\text{Ne}, ^{24}\text{Mg}, ^{16}\text{O}, ^{23}\text{Na}$	0.5	ν
Ne-Brennen	^{20}Ne	1.5	$^{16}\text{O}, ^{24}\text{Mg}, ^{28}\text{Si}, \dots$	0.1	ν
O-Brennen	^{16}O	2	$^{28}\text{Si}, ^{32}\text{S}$	0.5	ν
Si-Brennen	^{28}Si	3.5	$^{56}\text{Ni}, A \approx 56$	0.1 – 0.3	ν
Photodisintegration	^{56}Ni	$6 \sim 10$	n, ^4He , p	–8	ν

- Kontraktion (des Zentrums des Sterns) führt zur Erhöhung der Entartung und zur Erhöhung der Zentraltemperatur, solange das Gas nicht stark entartet ist. Die möglichen Endstadien der Sternentwicklung sind WD, NS oder BH.

- Aus Sternentwicklungsrechnungen ergibt sich, daß die Kontraktion in guter Näherung selbstähnlich verläuft. Für Polytrope mit festem n gilt dies exakt [siehe Kippenhahn & Weigert, S. 191ff]

Eine Entwicklung heißt selbstähnlich oder homolog, wenn

$$\boxed{\frac{\tilde{r}}{r} = \frac{\tilde{R}}{R} = f = \text{const.}} \quad (2.14)$$

gilt, wobei r und R zwei beliebige radiale Positionen im Stern vor der Kontraktion sind, und \tilde{r} und \tilde{R} die entsprechenden Koordinaten nach der Kontraktion sind.

- Folgerung für den Sternaufbau: Im Fall einer homologen Entwicklung (2.14) gilt [siehe Kippenhahn & Weigert, S. 191ff]

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3 \frac{dr}{r} \quad (2.15)$$

und

$$\frac{dP}{P} = -4 \frac{dr}{r}. \quad (2.16)$$

Parametrisiert man die Zustandsgleichung durch den Ansatz (das mittlere Molekulargewicht $\tilde{\mu}$ ist dabei konstant angenommen)

$$\rho \propto P^\alpha T^{-\delta}$$

so folgt

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T}. \quad (2.17)$$

Kombiniert man die Beziehungen (2.15), (2.16) und (2.17), so erhält man

$$\boxed{\frac{d \ln T}{d \ln \rho} = \frac{4\alpha - 3}{3\delta}} \quad (2.18)$$

Für ein ideales Gas gilt $\alpha = 1$ und $\delta = 1$, d.h. $d \ln T / d \ln \rho = 1/3$, während im Falle eines entarteten Elektronengas $\alpha \in [3/5, 3/4]$, $\delta \approx 0$ und $d \ln T / d \ln \rho < 0$ sind.

Mit Hilfe der Relation (2.18) läßt sich die Entwicklung eines Sterns in der T - ρ -Ebene anschaulich verstehen (siehe Abb. 2.1).

- Die **Zündkurven** sind durch die relevanten thermonuklearen bzw. pyknonuklearen Reaktionsraten bestimmt.

- In thermonuklearen Reaktionen ist die kinetische Energie der Reaktanten durch die Wärmebewegung der Atomkerne gegeben

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

d.h. es existiert eine Schwellentemperatur für jede Brennphase

- In pykonuklearen Reaktionen ist die kinetische Energie der Reaktanten durch die Nullpunktsenergie der Ionen gegeben

$$E_0 = \frac{3}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/2} \frac{\hbar e}{Am_u} \rho^{1/2},$$

d.h. es existiert eine Schwellendichte ρ_{pyk} für jede Reaktion

Der Übergang zwischen beiden Brennmoden (als Funktion von ρ und T) ist kontinuierlich.

Für $\rho > \rho_{pyk}$ setzen die Kernreaktionen sehr schnell ein. Typische Werte ($\tau_{pyk} \simeq 10^5$ a) sind:

$$\rho_{pyk}(^1\text{H} \rightarrow ^4\text{He}) \approx 10^6 \text{ [g/cm}^3\text{]}, \quad \rho_{pyk}(^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C}) \approx 10^9 \text{ [g/cm}^3\text{]},$$

$$\rho_{pyk}(^{12}\text{C} \rightarrow ^{24}\text{Mg}) \approx 10^{10} \text{ [g/cm}^3\text{]}$$

(siehe Salpeter & von Horn 1969, ApJ **155**, 183; Kippenhahn & Weigert, S. 370; Shapiro & Teukolsky S. 72ff).

Umfangreiche Sternentwicklungsrechnungen ergeben das folgende Bild (siehe auch Abb. 2.2):

- Kein D-Brennen, wenn $M_H \lesssim 0.013 M_\odot = 13 M_{\text{Jupiter}}$ (Abb. 2.3). Sterne oberhalb der Grenzmasse für D-Brennen sind als **Braune Zwerge** beobachtbar (siehe z.B. Stahler 1988, Astrophys. J. **332**, 804; Chabrier & Baraffe 2000, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **38**, 337).
- Kein H-Brennen, wenn $M_H \lesssim 0.08 M_\odot$. Sterne entarten bereits bei der Kontraktion zur Hauptreihe.
- Kein He-Brennen, wenn $M_{He} \lesssim 0.35 M_\odot$. Entartung tritt nach dem H-Brennen auf falls $M \lesssim 0.5 M_\odot$. Im Massenbereich $0.5 \lesssim M/M_\odot \lesssim 2.5$ durchläuft ein Stern das He-Brennen in Form eines He-Blitzes.
- Kein C-Brennen, wenn $M_C \lesssim 0.9 M_\odot$. Entartung tritt nach dem He-Brennen auf falls $M \lesssim 8 - 10 M_\odot$.

Für die mittlere Masse von Weißen Zwergen findet man $\langle M_{WD} \rangle \simeq (0.6 \pm 0.1) M_\odot$. Die nukleare Entwicklungszeit von Sternen mit einer solchen Masse ist größer als das Alter des Universums. Da man aber Weiße Zwerge auch in jungen Sternhaufen findet, müssen ihre Vorläufersterne massereicher gewesen sein, da diese eine kürzere Entwicklungszeit haben. Weiterhin müssen die massereicheren Vorläufersterne von Weißen Zwergen während ihrer Entwicklung einen beträchtlichen **Massenverlust** erfahren haben.

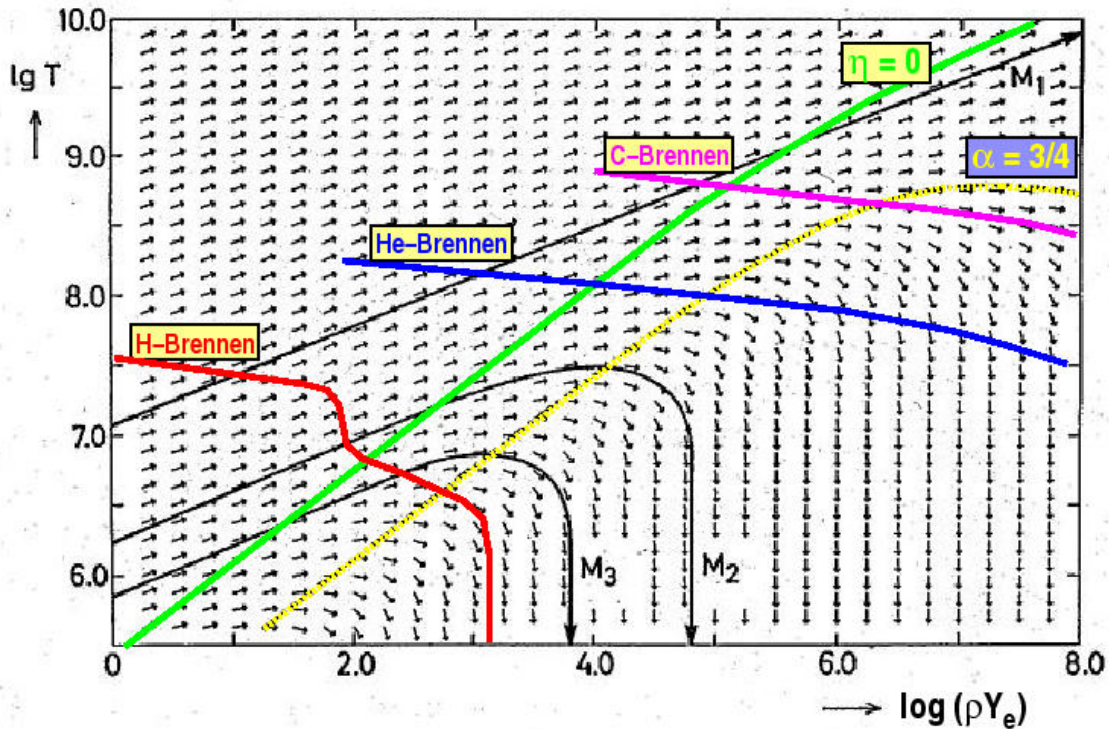


Abbildung 2.1: Entwicklungspfade der Zentren dreier Sterne (schwarze Linien) der Massen M_1 , M_2 und M_3 in der Temperatur–Dichte–Ebene. Das Vektorfeld zeigt die Richtung an, in die sich ein homolog kontrahierender Stern entwickeln würde. Im linken, oberen Teil der Figur ist die Zustandsgleichung die eines idealen Gas, d.h. die Pfeile haben den Anstieg $1/3$. Die grüne Linie ist durch $\eta = 0$ definiert. Unterhalb dieser Linie muss die Entartung der Elektronen berücksichtigt werden. Auf der gelben Linie gilt $\alpha = 3/4$ und damit $d \ln T / d \ln \rho = 0$, d.h. auf der Linie sind die Pfeile horizontal und unterhalb der Linie zeigen sie nach unten. Oberhalb der roten, blauen bzw. rosa Linie findet H–Brennen, He–Brennen, bzw. C–Brennen statt. Die Entwicklung des Sterns mit der Masse M_1 wird kaum durch Entartungseffekte beeinflusst; sein Zentrum heizt sich während der Kontraktion kontinuierlich auf. Im Zentrum des Sterns der Masse $M_2 (< M_1)$ tritt Entartung auf; die homologe Kontraktion kann die Temperatur maximal auf einige 10^7 K erhöhen. Im Falle des Sterns der Mass $M_3 (< M_2)$ ist die maximal erreichbare Zentraltemperatur noch geringer. Für M_2 und M_3 wird die Zündtemperatur für die Heliumfusion nicht erreicht.

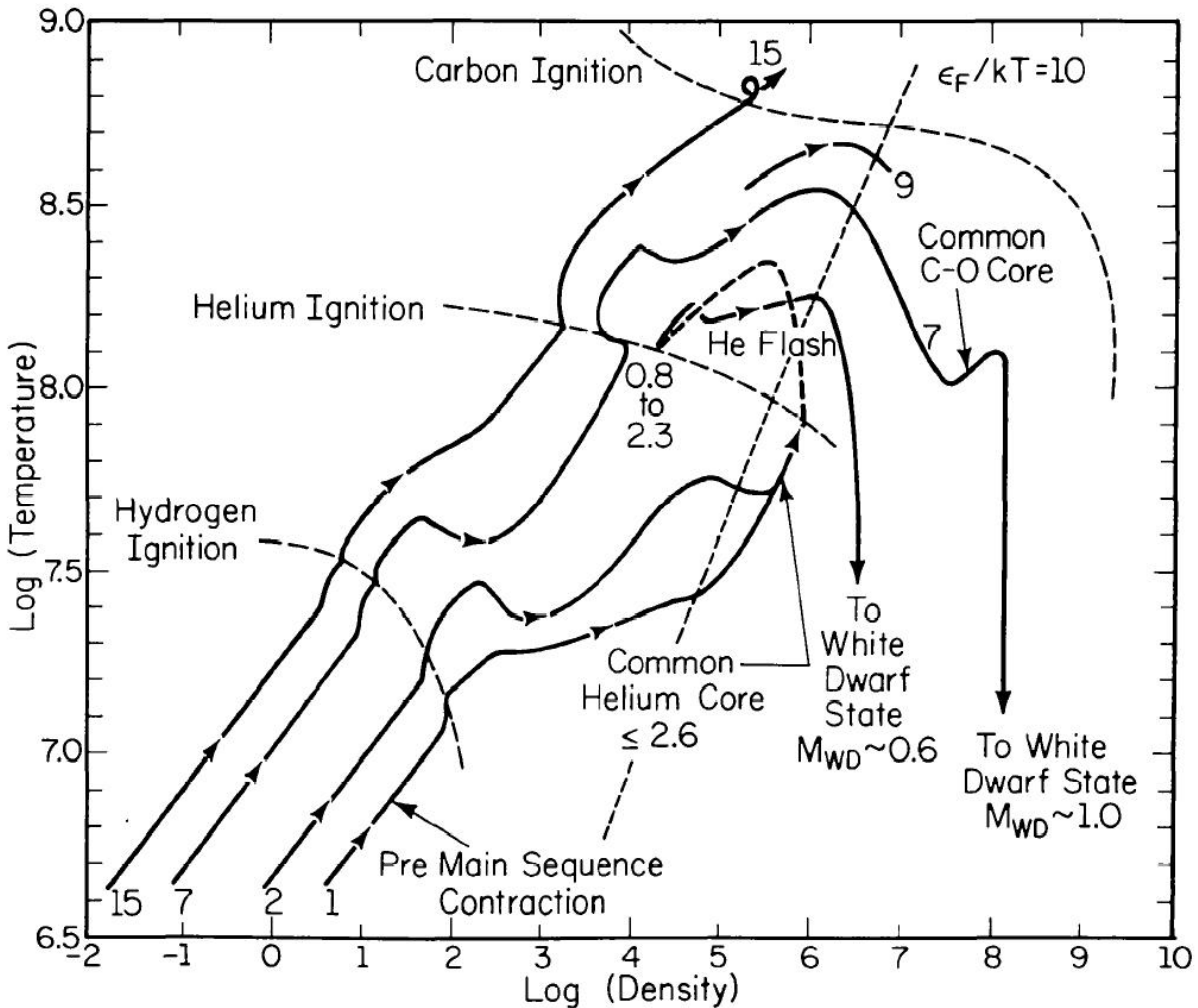


Abbildung 2.2: Entwicklung der Zentraltemperatur und Zentraldichte in der Dichte-Temperatur-Ebene von Sternen unterschiedlicher Masse (Werte in Einheiten von Sonnenmassen). Die gestrichelten Linien sind die Zündkurven für H-, He- und C-Brennen. Die gestrichelte Gerade markiert (bei nicht allzu hohen Temperaturen) die ungefähre Grenze zwischen nicht-entartetem und entartetem Elektronengas [Iben, 1991, ApJ Suppl **76**, 55].

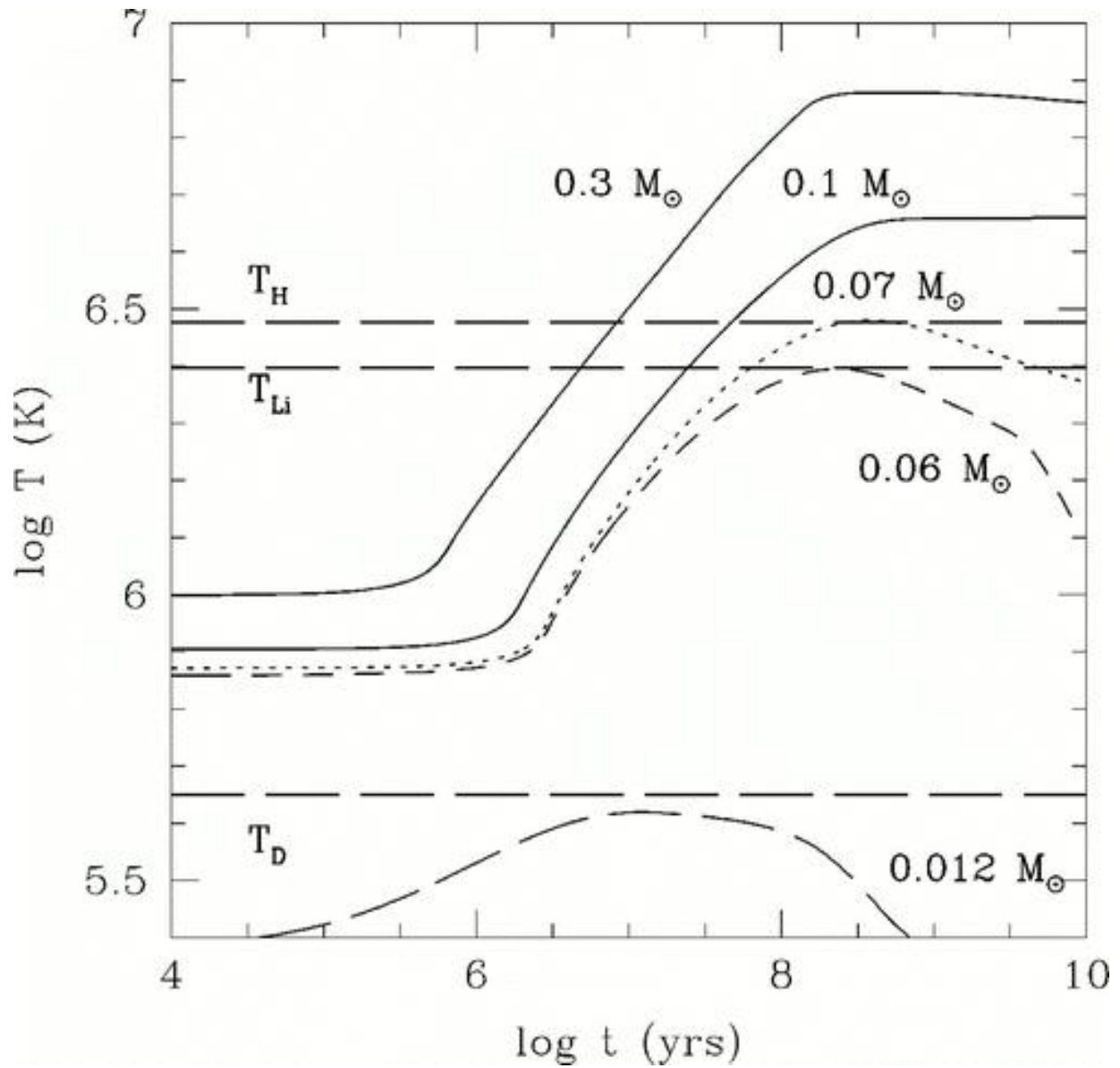


Abbildung 2.3: Zentraltemperatur als Funktion des Alters für massearme Sterne bzw. Braune Zwerge unterschiedlicher Masse. T_H , T_{Li} und T_D sind die Zündtemperaturen für Wasserstoff-, Lithium- und Deuterium-Brennen [Chabrier & Baraffe 2000, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **38**, 337].

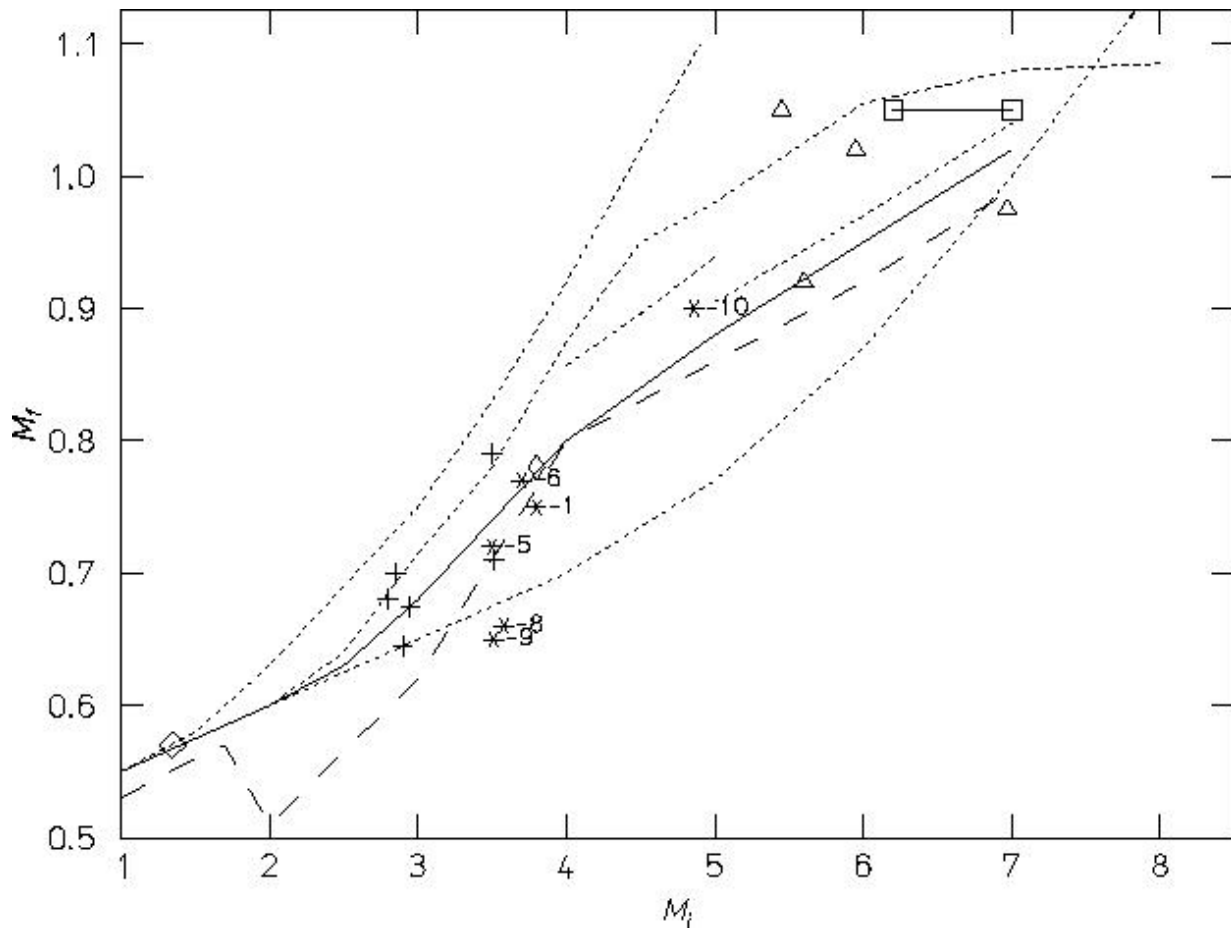


Abbildung 2.4: Anfangs-Endmasse-Relationen für Hauptreihensterne, die sich zu einem Weißen Zwerg entwickeln [Weidemann 2000, *Astron. & Astrophys.* **363**, 647].

Die Beziehung zwischen der Anfangsmasse M_i und der Endmasse $M_f(M_i)$ lässt sich aus Beobachtungen junger (offener) Sternhaufen gewinnen (Abb. 2.4). Man findet (siehe z.B. Weidemann 2000, *Astron. & Astrophys.* **363**, 647):

$$M_{crit} = \max_i M_i = M_i(M_f = M_{Ch}) = (8 \pm 2) M_{\odot}$$