

22. Die Entwicklung des Zentralgebiets

Betrachten hier die Entwicklung eines Sterns während und nach dem zentralen Wasserstoffbrennen, aber noch vor Beginn des Heliumbrennens.

Entwicklung und innerer Aufbau in dieser Phase bereits so kompliziert, dass für eine allgemeine Diskussion Resultate numerischer Rechnungen erforderlich sind. Interpretation numerischer Rechnungen ist jedoch nicht problemlos.

Hier : Diskussion des Zentralgebiets (Das Zentralgebiet ist für das Verständnis der späten Entwicklungsphasen am wichtigsten)

22.1. Zentrales Wasserstoffbrennen, Entstehung einer Schalenquelle

Im Zentrum während des zentralen Wasserstoffbrennens:

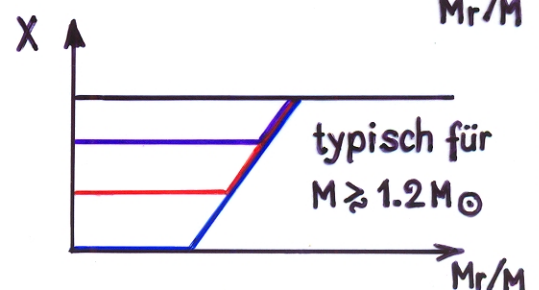
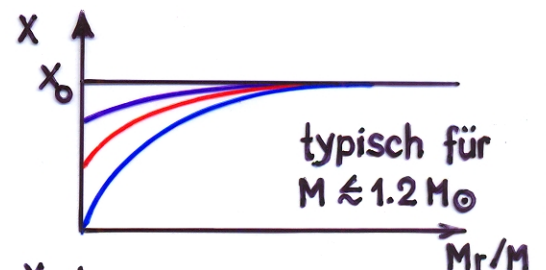
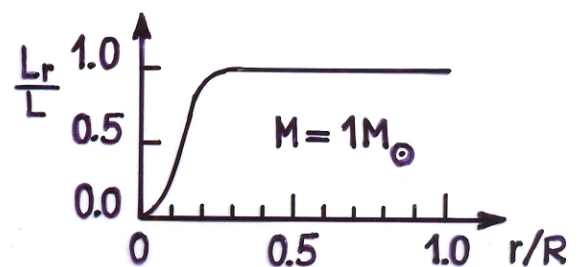
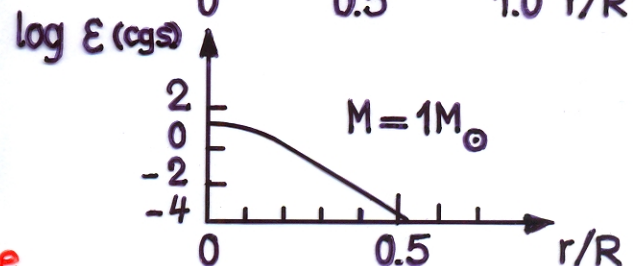
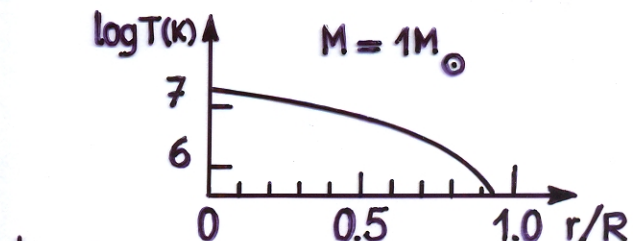
- Temperatur maximal
- Kernreaktionen (Energieerzeugung) maximal
- Verbrauch von Brennstoff (Wasserstoff) maximal

► Zum Zentrum konzentrierte Energiequelle
(→ Verlauf von $\epsilon(r/R)$, L_r/L)

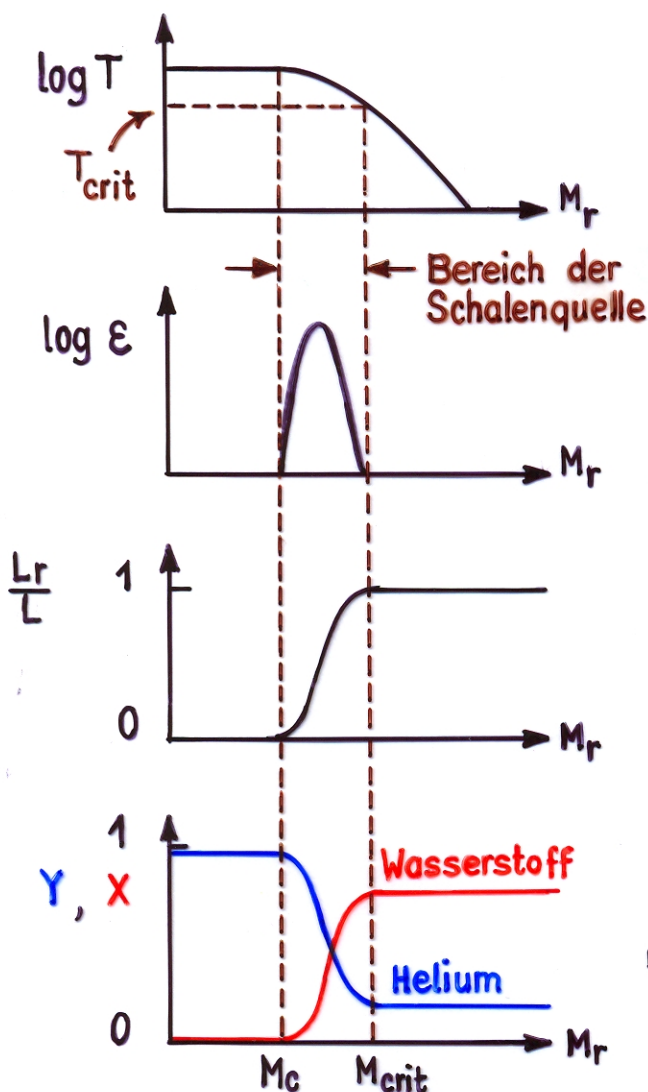


Der Wasserstoff erschöpft sich im Zentrum am schnellsten

- Sterne mit radiativem Zentralgebiet, d.h. $M \lesssim 1.2 M_{\odot}$ brennen inhomogen aus $\rightarrow$
- bei Sternen mit konvektivem Zentrum, d.h. mit $M \gtrsim 1.2 M_{\odot}$ brennt das Zentralgebiet homogen aus. $\rightarrow$ Es entsteht ein Heliumkern



- Bei Erschöpfung des Brennstoffs im Zentrum: Das Brennen verlagert sich nach aussen, dorthin wo noch Brennstoff vorhanden, d.h. in eine Kugelschale um den ausgebrannten Kern $\rightarrow$ es entsteht eine sog. Schalenquelle, die sich nach aussen frisst.

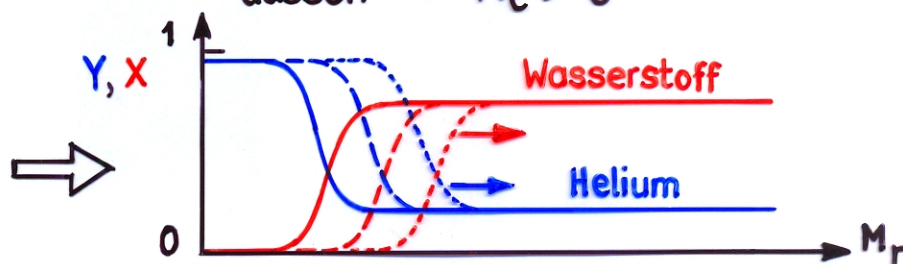


Schalenquelle im Bereich $M_c < M_r < M_{crit}$,

da im Bereich $M_r < M_c$ $X=0 \rightarrow \epsilon=0$
bei $M_r > M_{crit}$ $T < T_{crit} \rightarrow \epsilon \ll \epsilon_{max}$

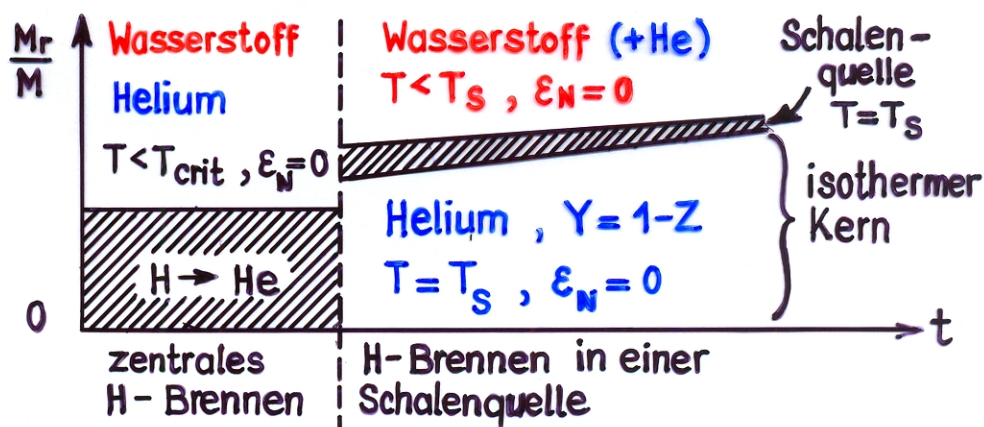
► $M_r < M_c$: $T(M_r) = const.$, da
 $\epsilon=0 \rightarrow L_r(M_r)=0$
 $\rightarrow \frac{\partial T}{\partial M_r} = 0$

- Der Brennstoff erschöpft sich dauernd am Innenrand der Schalenquelle
 $\rightarrow$ die Schalenquelle "frisst" sich nach aussen $\rightarrow \dot{M}_c > 0$



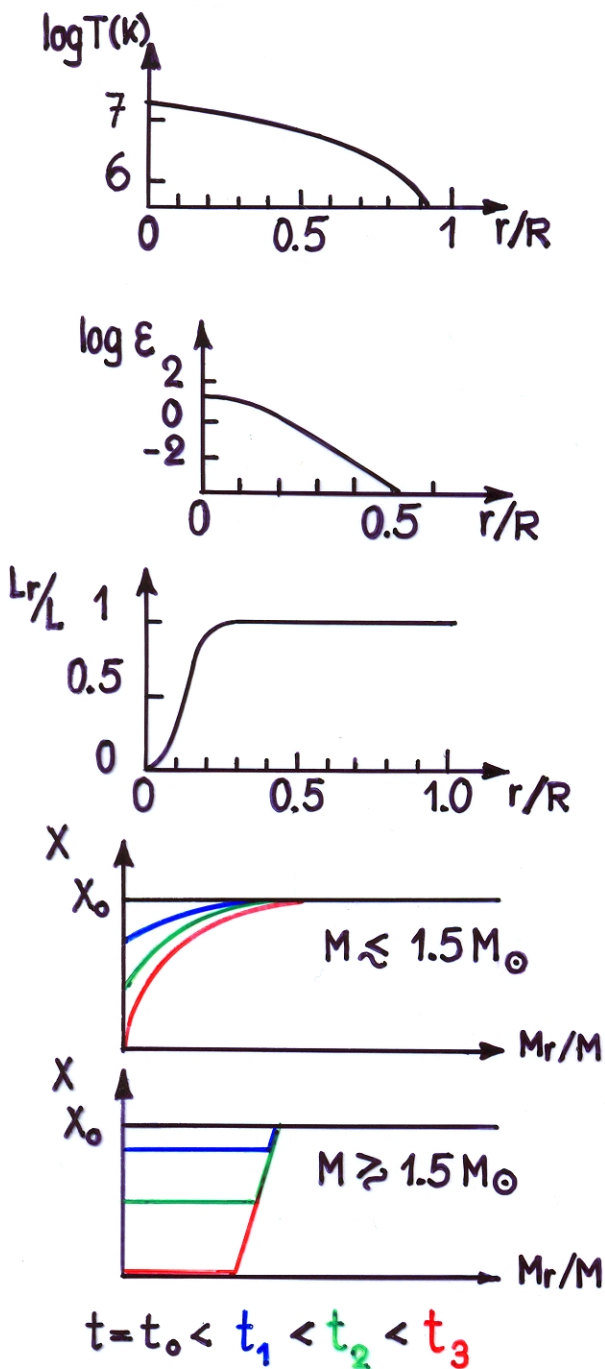
Entwicklung im $M_r/M-t$ -Diagramm

- $\rightarrow$ Heliumkern mit Masse M_c , $\dot{M}_c > 0$, isotherm bei der Temperatur der Schalenquelle T_s

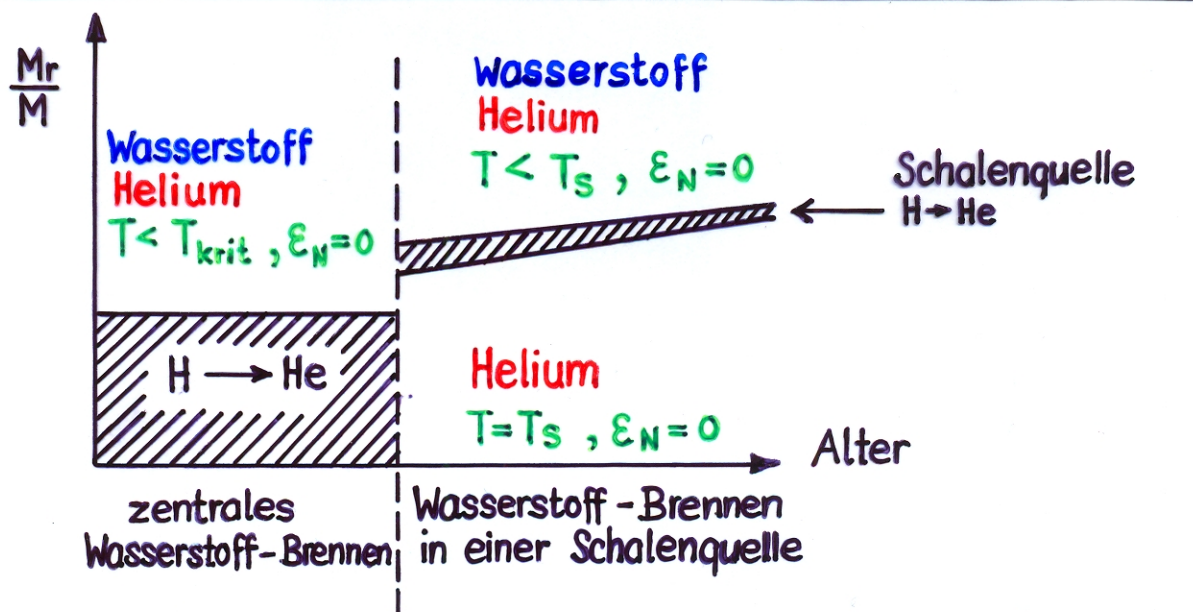
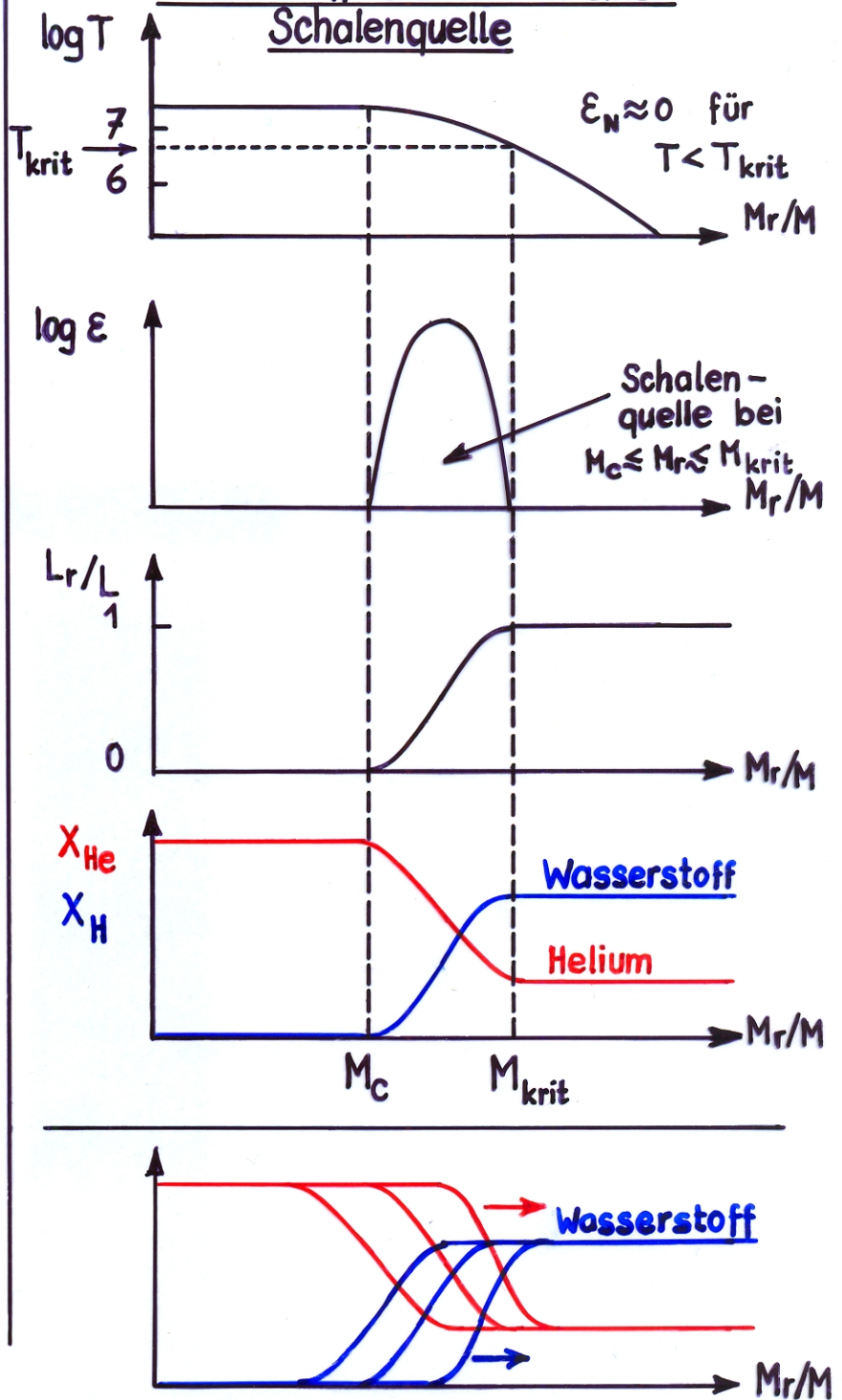


- Zentrale Frage für die weitere Entwicklung: Wie entwickelt sich der isotherme Heliumkern? ($T_c = T_s$ zu klein für nächstes Brennen!)

Zentrales Wasserstoff-Brennen



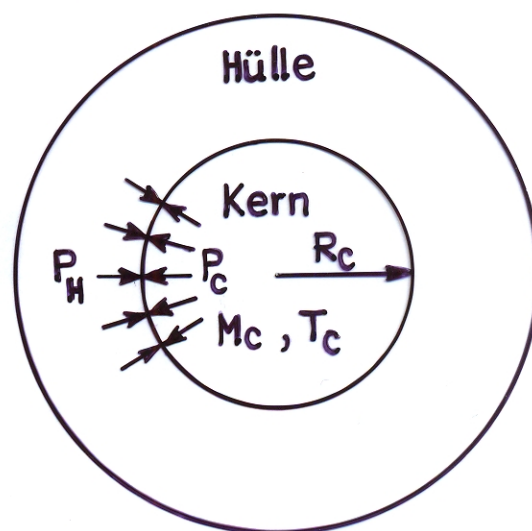
Wasserstoff-Brennen in einer Schalenquelle



22.2. Die Schönberg – Chandrasekhar – Grenze

- Problem : Nach dem zentralen Wasserstoffbrennen : $\exists$ wachsenden isothermen Kern bei der Temperatur der Schalenquelle : $T_c(M_r < M_c) = T_s$
 ➔ Frage : Kann ein isothermer Kern mit $T = T_s$ überhaupt im Gleichgewicht mit der Hülle sein ?

Betrachten jetzt ein Zentralgebiet (Kern) mit Masse M_c , Radius R_c und Temperatur $T = T_c = T_s = \text{const.}$ im Bereich $M_r \leq M_c$.



Voraussetzung: Ideales Gas

Druck des Kerns an seiner Oberfläche

Verwenden Virialsatz ($\rightarrow$ 3.2.)

$$E_G = - \int_0^{M_c} \frac{G M_r}{r} dM_r = [4\pi r^3 P]_0^{M_c} - \int_0^{M_c} 3 \frac{P}{\rho} dM_r,$$

wobei $3 \int_0^{M_c} \frac{P}{\rho} dM_r = 3 \frac{Q}{\mu} \int_0^{M_c} T dM_r = 3 \frac{Q}{\mu} T_c \int_0^{M_c} dM_r = 3 \frac{Q}{\mu} T_c M_c = 2E_T$

- $3 \frac{Q}{\mu} T_c M_c + E_G - 4\pi R_c^3 P_c = 0$: Virialsatz für isothermen Kern

Schreiben für E_G : $E_G = - \int_0^{M_c} \frac{G M_r}{r} dM_r = - C_G \frac{G M_c^2}{R_c}$, C_G von der Massenverteilung abhängig

➔ $3 \frac{Q}{\mu} T_c M_c - C_G \frac{G M_c^2}{R_c} = 4\pi R_c^3 P_c$, oder nach P_c aufgelöst :

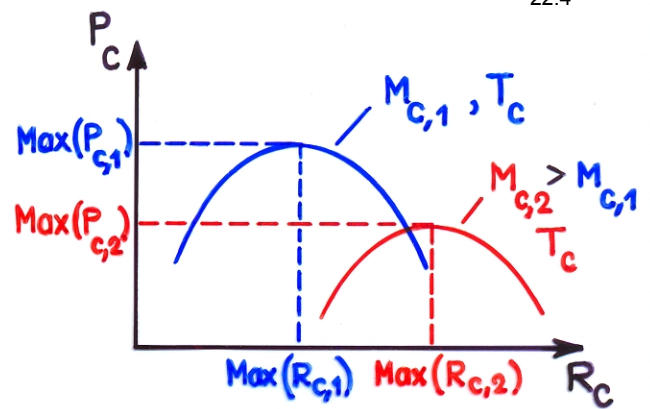
► $P_c = \frac{3Q}{4\pi\mu} \frac{T_c M_c}{R_c^3} - \frac{C_G G}{4\pi} \frac{M_c^2}{R_c^4} = C_1 \frac{T_c M_c}{R_c^3} - C_2 \frac{M_c^2}{R_c^4}$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$

➔ P_c durch zwei gegenläufige Terme bestimmt. Für festes M_c und T_c $\exists$ einen Wert R_c , für den P_c maximal.

$$\left(\frac{\partial P_c}{\partial R_c} \right)_{M_c, T_c} = 0 \rightarrow \underline{R_c = \frac{4}{9} \frac{C_G G \mu}{Q} \frac{M_c}{T_c}}$$

$$\rightarrow \text{Max}(P_c) = \frac{2187 Q^4}{1024 \pi C_G^3 G^3 \mu^4} \frac{T_c^4}{M_c^2} \sim \frac{T_c^4}{M_c^2}$$

Für festes T_c nimmt $P_c \sim M_c^{-2}$ mit wachsendem M_c stark ab!



Druck der Hülle auf den Kern

Verwenden für Abschätzung des Hüllendrucks P_H die Homologieannahme (wie bei 19.5), da nur die Proportionalitäten wichtig sind:

$$\left. \begin{array}{l} P_H \sim \frac{M^2}{R^4} : \text{hydrostat. Gleichgewicht} \\ T_c \sim \frac{M}{R} \end{array} \right\} \rightarrow \underline{P_H \sim \frac{T_c^4}{M^2}}$$

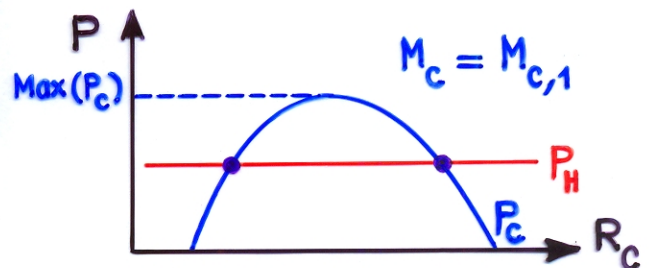
→ Für gegebene Werte von M und T_c ist P_H praktisch unabhängig von R_c !

Bedingung für hydrostatisches Gleichgewicht: $P_H = P_c$

Müssen hier 3 Fälle unterscheiden:

a) $\text{Max}(P_c) > P_H$

► Es sind zwei Lösungen möglich!
(Vgl. das Vogt-Russel-Theorem,
→ Abschnitt 12.3)

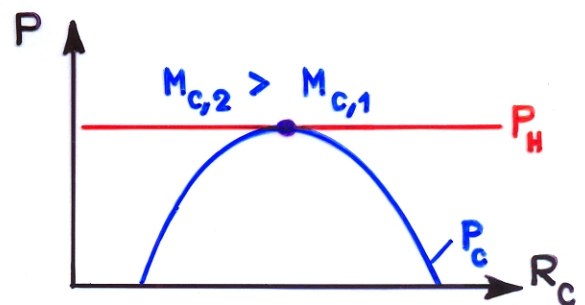


Da $\frac{P_H}{\text{Max}(P_c)} \sim \left(\frac{M_c}{M}\right)^2$ und $\dot{M}_c > 0$ (bei festem M) → ∃ $M_c = \tilde{M}_c$, so dass

$P_H = \text{Max}(P_c)$ für $M_c = \tilde{M}_c$.

b) $\text{Max}(P_c) = P_H$

► ∃ nur eine Lösung und zwar für ein bestimmtes Massenverhältnis



$\frac{\tilde{M}_c}{M} = \left(\frac{M_c}{M}\right)_{sc}$: Schönberg - Chandrasekhar - Grenze (SC - Grenze)

Aus numerischen Rechnungen : $\left(\frac{M_c}{M}\right)_{SC} \approx 0.37 \left(\frac{\mu_H}{\mu_c}\right)^2$

Sinnvolle Definition der SC-Grenze nur für Sterne mit $2M_\odot \lesssim M \lesssim 5M_\odot$, da

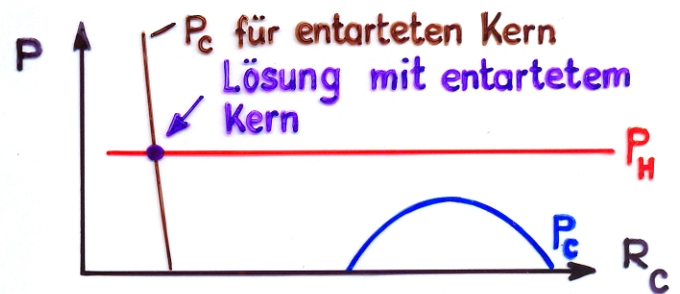
- für $M \lesssim 2M_\odot$ der isotherme Kern von Anfang an entartet ist (N.B. ideales Gas war Voraussetzung für die SC-Grenze)
- für $M \gtrsim 5M_\odot$ die Masse des konvektiven Kerns schon zu Beginn des Schalenbrennens die SC-Grenze überschreitet.

Bei Sternen mit $2M_\odot \lesssim M \lesssim 5M_\odot$ wächst M_c während des Schalenbrennens bis $M_c/M = (M_c/M)_{SC}$. Wächst M_c weiter, so wird

c) $P_H > \text{Max}(P_c)$

→ Hülle drückt Kern zusammen.

Nun sind zwei Fälle denkbar:



c1) Gas im Kern bleibt ideales Gas

→ Erzwungene Kontraktion erhöht P und T so, dass der Kern nicht mehr isotherm. → Eine der Vor. der obigen Betrachtungen entfällt!

c2) Erzwungene Kontraktion so stark, dass das Elektronengas entartet.

→ Voraussetzung des idealen Gases entfällt.

Entarteter Kern: einem WZ nicht unähnlich, entartetes Elektronengas ist praktisch inkompressibel → $P_c(R_c)$ verläuft sehr steil bei kleinem $R_c \approx R_{WZ}$.

► **Fazit**: Bei Sternen mit $M \gtrsim 2M_\odot$: Kernkontraktion entweder mit Beginn des Schalenbrennens (wenn $M \gtrsim 5M_\odot$) oder mit Erreichen der SC-Grenze.

22.3. Die Kontraktion des Zentralgebiets

Numerische Rechnungen zeigen: Der Zentralteil des ausgebrannten Kerns kontrahiert nahezu homolog.

→ Betrachten daher homologe Kontraktion der Zentralkugel mit Radius r , Druck $P \approx P_c$ und Dichte $\varrho \approx \varrho_c$. Mit allg. Zustandsgleichung $\varrho \sim P^\alpha T^{-\delta}$ und den Homologierelationen (→ 21.2) wird:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} &= \alpha \frac{\dot{P}}{P} - \delta \frac{\dot{T}}{T} \\ \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} &= -3 \frac{\dot{r}}{r} \\ \frac{\dot{P}}{P} &= -4 \frac{\dot{r}}{r} \end{aligned} \right\} \quad \text{Durch Elimination von } \dot{r}/r \text{ wird} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{\dot{T}}{T} = \frac{4\alpha - 3}{3\delta} \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}}}$$

Unterscheiden zwei Fälle:

a) Ideales Gas: $\alpha = 1$, $\delta = 1 \rightarrow \frac{\dot{T}}{T} = \frac{1}{3} \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} = -\frac{\dot{r}}{r}$

► Kontraktion → Erhöhung der Zentraltemperatur → Zündung des nächsten nuklearen Brennens (sofern das Zentralgebiet nicht entartet, s. unten)

► Schematischer Entwicklungsverlauf:

Beginn eines neuen nuklearen Brennens → Erschöpfung des Brennstoffs
 $\uparrow$ $\downarrow$
 Erhitzung des Zentralgebiets ← Kontraktion des Zentrums

Dieses Schema funktioniert im Prinzip bis das Sternzentrum aus ^{56}Fe besteht, d.h. solange die Kernreaktionen exotherm sind.

► Nicht alle Sterne durchlaufen dieses Schema vollständig, d.h. bis ^{56}Fe

Begründung: Homologe Kontraktion + ideales Gas $\rightarrow T_c \sim \varrho_c^{1/3}$

Bedingung für konstante Entartung: $\psi = \text{const.} \rightarrow T \sim \varrho^{2/3}$

► Jede homologe Kontraktion erhöht ψ , d.h. führt in Richtung Entartung

- Wie weit ein Stern dieses Entwicklungsschema durchläuft hängt von seiner Masse ab. Je kleiner die Masse, desto näher ist sein Zentrum der Entartung. → Massearme Sterne verlassen den Entwicklungszyklus früher als massereiche.

b) Entartung: Vollst. nicht relat. Entartung : $\alpha = \frac{3}{5}$, $1 \gg \delta > 0$

$$\rightarrow \frac{\dot{T}}{T} < \frac{\dot{S}}{S} \text{ , sobald } \alpha < 3/4 \text{ und } \delta > 0$$

- Diese Bedingung ist ab einem bestimmten Wert von α erfüllt, in jedem Fall lange bevor vollständige Entartung erreicht ist
- Sternzentrum kühlt sich bei Kontraktion ab sobald diese in die Entartung geführt hat. → Stern erreicht dabei eine maximale Zentraltemperatur. → Je nach dem wird die Zündung des nächsten nuklearen Brennens verhindert. → Je geringer die Masse, desto früher ist das der Fall.

Beispiele:

kein Wasserstoffbrennen, wenn $M \lesssim 0.08 M_{\odot}$, kein Gleichgewichtsmodell möglich. Die Sterne entarten bereits bei der Kontraktion zur Hauptreihe

kein Heliumbrennen, wenn $M_{\text{He}} \lesssim 0.35 M_{\odot}$; Entartung nach dem Wasserstoffbrennen

kein Kohlenstoffbrennen, wenn $M_{\text{C}} \lesssim 0.9 M_{\odot}$; Entartung nach dem Heliumbrennen.

Bei Sternen mit entartetem He-Kern : Entwicklung aus der Entartung zum normalen Heliumbrennen durch den sog. Helium-Flash möglich (→ 23.)

Die Entwicklung des Zentralgebiets

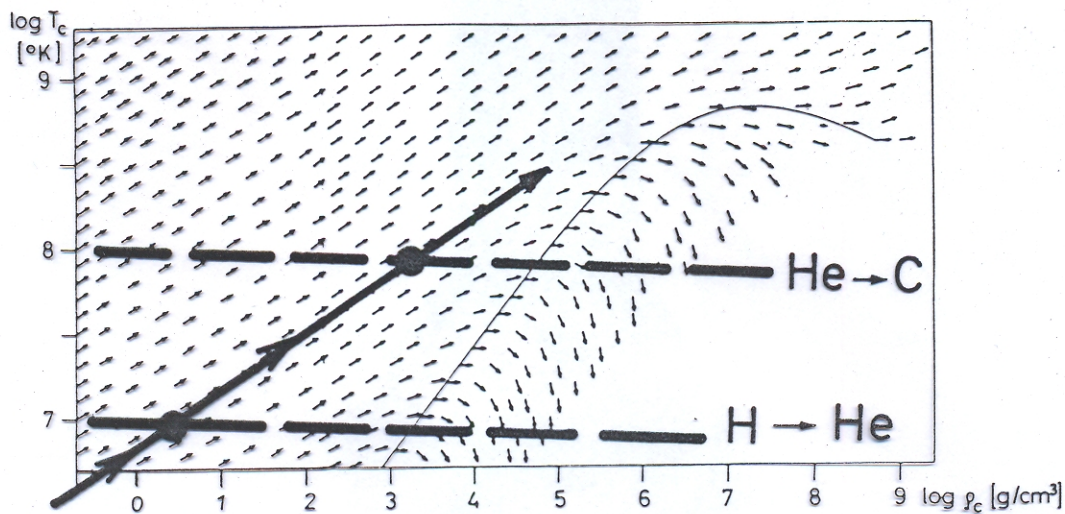
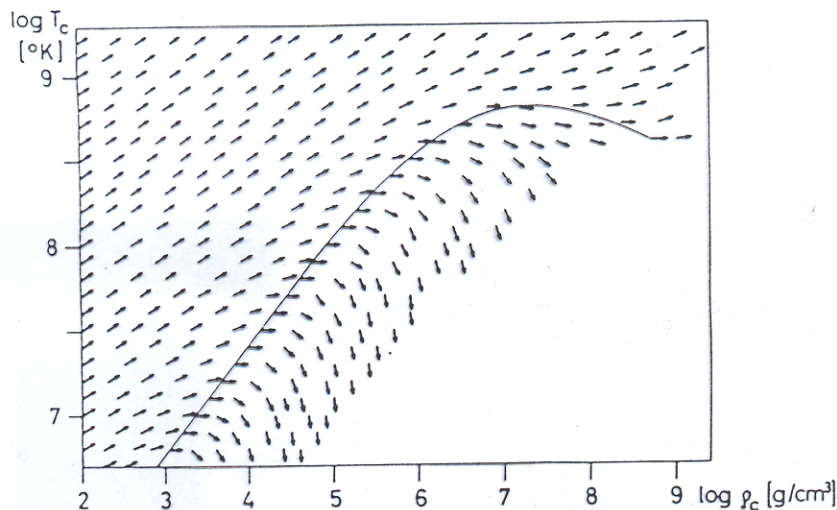
A) Homologe Kontraktion des Zentralgebiets

Das Richtungsfeld in der $\log \rho_c - \log T_c$ Ebene. Die Pfeilchen geben die Richtung an, in die sich bei Kontraktion das Zentrum eines Sterns bewegt. Sie entspricht dem Koeffizienten

$$\frac{4\alpha - 3}{3\delta}$$

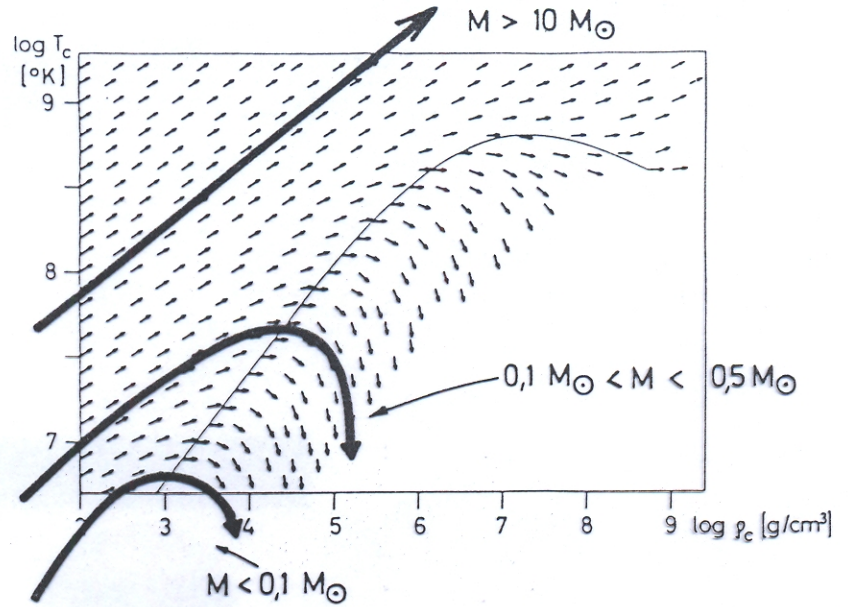
Im Bereich des idealen Gases ($\alpha = 1, \delta = 1$) ist die Steigung $1/3$ (links). Bei Kontraktion erhöht sich die Zentraltemperatur. Nach rechts wird das Elektronengas entartet.

α und δ nähern sich den Werten $3/5$ und 0 . Auf dem Wege dorthin nimmt α den Wert $3/4$ an. Dann wird die Steigung null. Die durchgezogene Linie gibt die Orte mit Steigung null an. Sie trennt nichtentartetes Gebiet von entartetem. Wie man aus der Pfeilrichtung sieht, nähert sich das Zentrum eines nichtentarteten Sterns bei Kontraktion immer mehr dem entarteten Gebiet.



Der Entwicklungsweg des Zentrums eines Sterns. Die nahezu horizontalen gestrichelten Geraden geben die Stellen an, an denen nukleares Brennen zündet. Als kühler, noch weit ausgedehnter Stern beginnend, liegt sein Zentrum im Diagramm links unten. Der Stern kontrahiert und erhitzt sich dabei, bis sein Zentrum die Temperatur von ca. 10 Millionen Grad hat, dann beginnt die Fusion des Wasserstoffs. Ist im Zentrum der Wasserstoff verbrannt, dann kontrahiert der Stern weiter, bis sein Zentrum die Temperatur der Fusion des Heliums zu Kohlenstoff erreicht. Die dicken Punkte am Entwicklungsweg deuten an, dass das Sternzentrum dort lange stehen bleibt.

Nicht alle Sterne erreichen im Laufe ihres Lebens immer höhere Zentraltemperaturen. Sterne mit weniger als ca. $0.08 M_{\odot}$ werden entartet und kühlen ab, noch ehe sie die Temperatur der Wasserstoff-Fusion erreichen. Sterne mit weniger als ca. $0.5 M_{\odot}$ erreichen nicht das Heliumbrennen. Sterne mit mehr als $10 M_{\odot}$ dagegen werden nie entartet.



B) Die Entwicklung des Zentralgebiets : Ergebnisse numerischer Rechnungen.

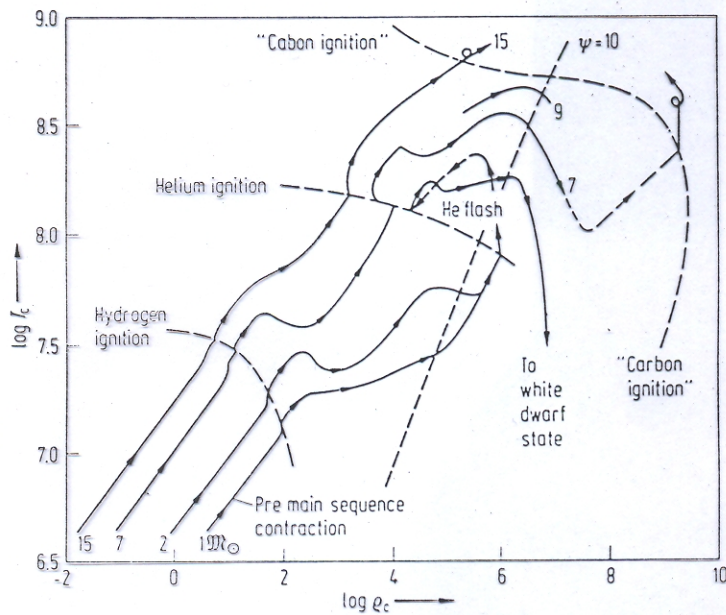
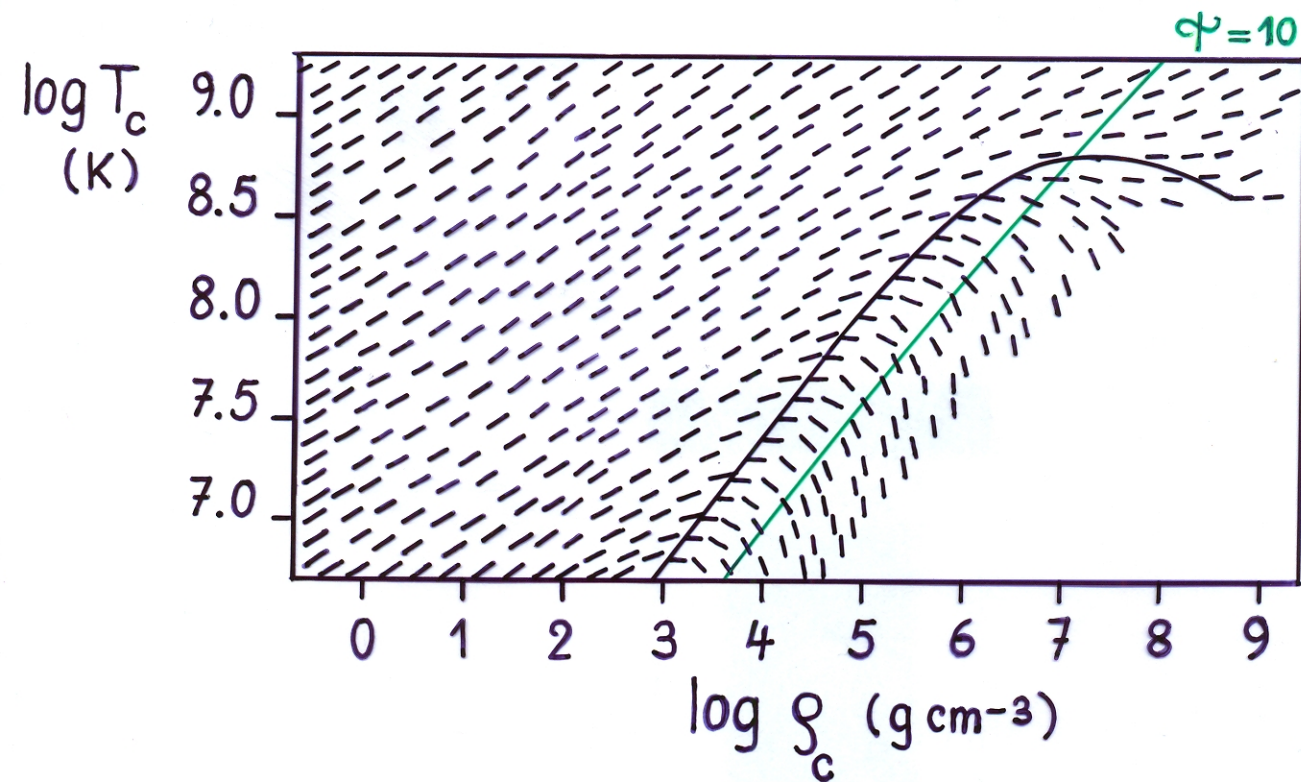


Fig. 9. Density ρ_c and temperature T_c at the centers of stars of different masses. Time is the parameter which varies in the direction of the arrows along each curve. Prior to helium ignition, the central densities and temperatures for all stars less massive than about $2.25 M_{\odot}$ converge onto a common path [57]. T_c in [K]; ρ_c in $[g\ cm^{-3}]$.



Homologous contraction : $\frac{\partial}{\partial M_r} \left(\frac{\dot{r}}{r} \right) = 0$

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{r}}{r} \quad (1) \quad \text{mass distribution}$$

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{P}}{P} = -4 \frac{\dot{r}}{r} \quad (2) \quad \text{hydrostatic equil.}$$

Equation of state : $\rho = \text{const. } P^\alpha T^{-\delta}$

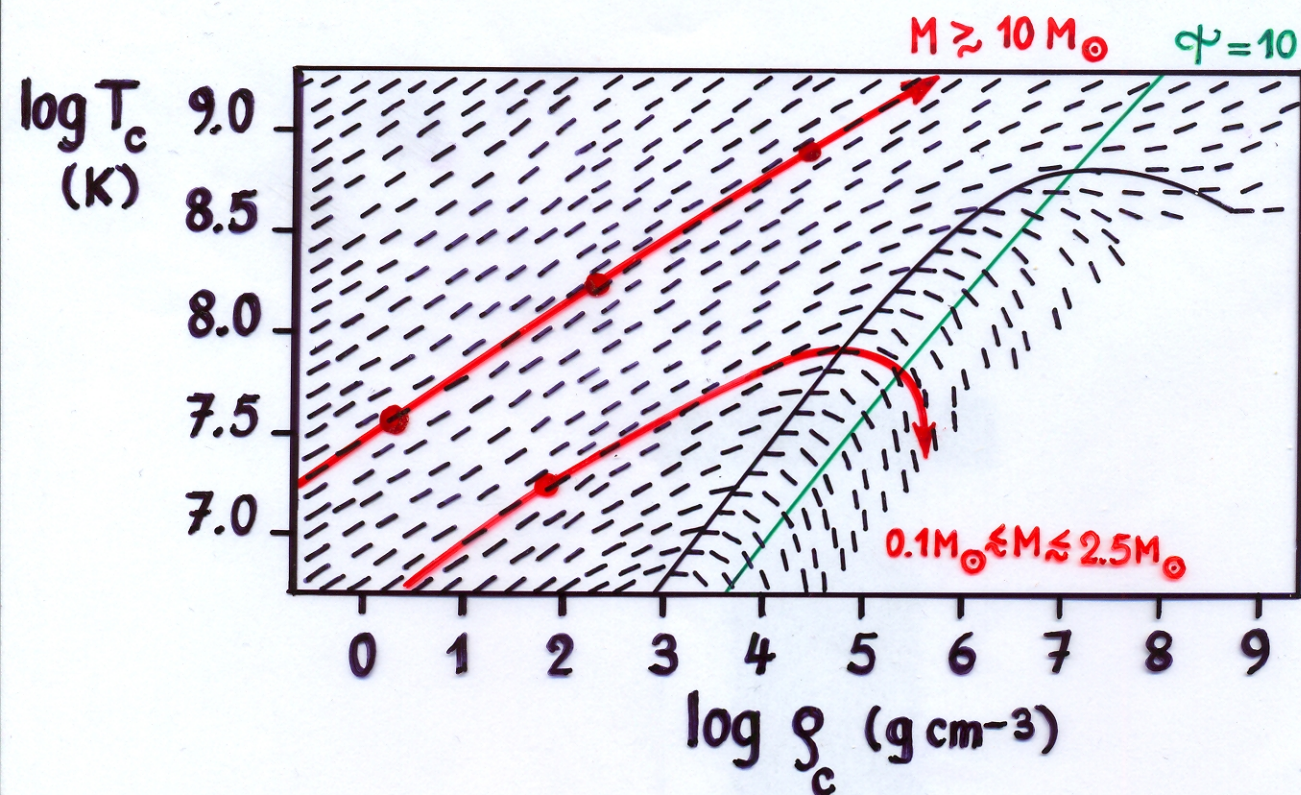
for a monoatomic ideal gas $\alpha = 1, \delta = 1$

for a n.r. degenerate electron gas $\alpha = \frac{3}{5}, \delta \rightarrow 0$

$$\rho = \text{const. } P^\alpha T^{-\delta} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \alpha \frac{\dot{P}}{P} - \delta \frac{\dot{T}}{T} \quad (3)$$

From (1), (2) and (3) :

$$\underline{\underline{\frac{\dot{T}}{T} = \frac{4\alpha - 3}{3\delta} \frac{\dot{\rho}}{\rho}}}$$



Homologous contraction : $\frac{\partial}{\partial M_r} \left(\frac{\dot{r}}{r} \right) = 0$

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{r}}{r} \quad (1) \quad \text{mass distribution}$$

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{P}}{P} = -4 \frac{\dot{r}}{r} \quad (2) \quad \text{hydrostatic equil.}$$

Equation of state : $\rho = \text{const. } P^\alpha T^{-\delta}$

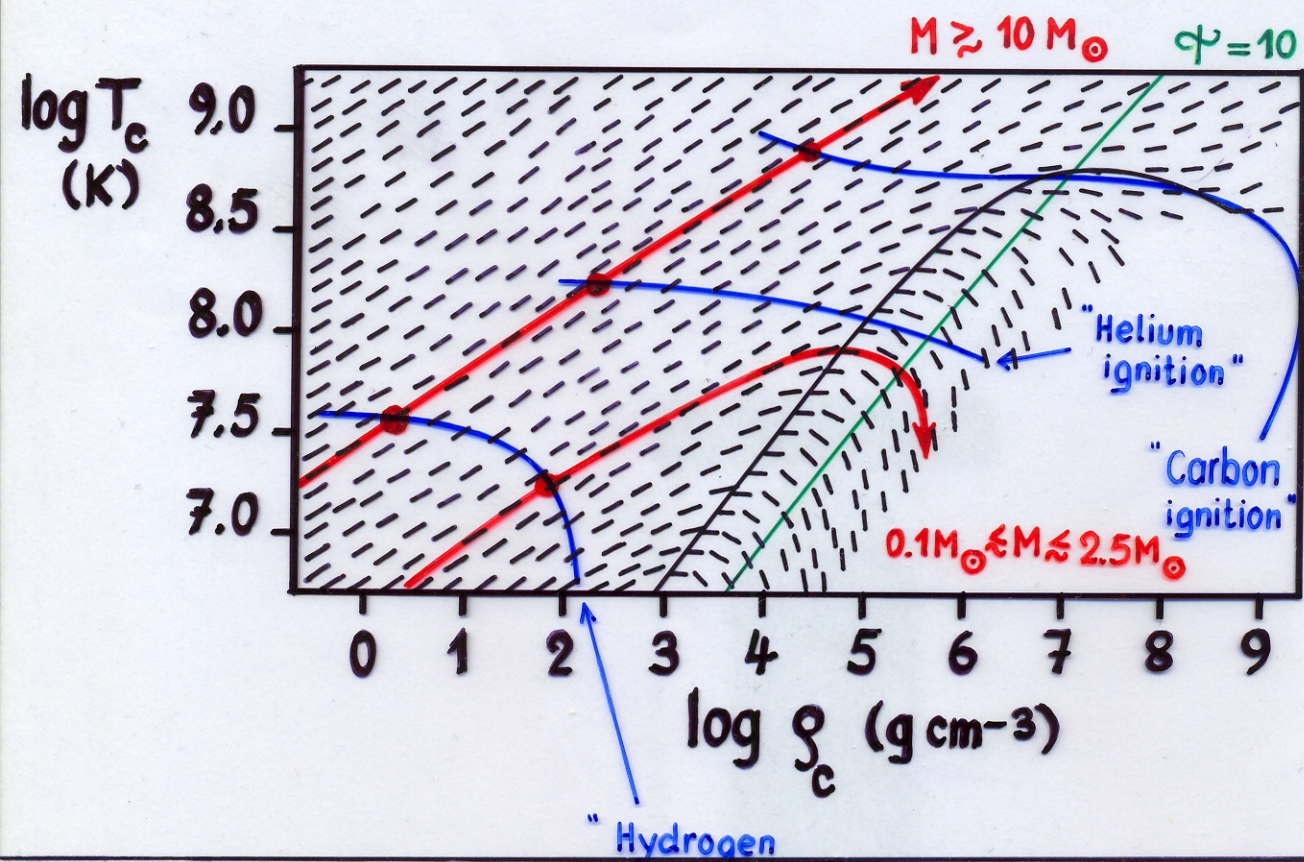
for a monoatomic ideal gas $\alpha = 1, \delta = 1$

for a n.r. degenerate electron gas $\alpha = \frac{3}{5}, \delta \rightarrow 0$

$$\rho = \text{const. } P^\alpha T^{-\delta} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \alpha \frac{\dot{P}}{P} - \delta \frac{\dot{T}}{T} \quad (3)$$

From (1), (2) and (3) :

$$\underline{\underline{\frac{\dot{T}}{T} = \frac{4\alpha - 3}{3\delta} \frac{\dot{\rho}}{\rho}}}$$



Homologous contraction : $\frac{\partial}{\partial M_r} \left(\frac{\dot{r}}{r} \right) = 0$

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3 \frac{\dot{r}}{r} \quad (1) \quad \text{mass distribution}$$

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{P}}{P} = -4 \frac{\dot{r}}{r} \quad (2) \quad \text{hydrostatic equil.}$$

Equation of state : $\rho = \text{const. } P^\alpha T^{-\delta}$

for a monoatomic ideal gas $\alpha = 1, \delta = 1$

for a n.r. degenerate electron gas $\alpha = \frac{3}{5}, \delta \rightarrow 0$

$$\rho = \text{const. } P^\alpha T^{-\delta} \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = \alpha \frac{\dot{P}}{P} - \delta \frac{\dot{T}}{T} \quad (3)$$

From (1), (2) and (3) :
$$\underline{\underline{\frac{\dot{T}}{T} = \frac{4\alpha - 3}{3\delta} \frac{\dot{\rho}}{\rho}}}$$