

IV EINFACHE STERNMODELLE

- Einfache Sternmodelle :
- homogene Sterne
 - einfache Zustandsgleichung
 - Sterne, die sich durch Ähnlichkeitsgesetze beschreiben lassen (Homologie)

17. Polytrope Gaskugeln

Einfachster Typ von Sternmodellen (Emden (1907), Lane (1870), Ritter (1878), Kelvin (1887))

17.1. Definitionen

Polytrope : wenn $\exists$ Beziehung zwischen P und ρ (unabhängig von T) von der Form $P \sim \rho^n$.

► Polytropsenbeziehung $P = K \rho^{1 + \frac{1}{n}}$, K = Polytropenkonstante
 n = Polytropenindex

► Polytropsenbeziehung gilt im ganzen Stern, $\frac{\partial K}{\partial M_r} = 0$, $\frac{\partial n}{\partial M_r} = 0 \rightarrow K$ und n sind räumlich konstant.
 K und n können zeitlich variabel sein

► Die Polytropsenbeziehung braucht nicht mit der Zustandsgleichung identisch zu sein.

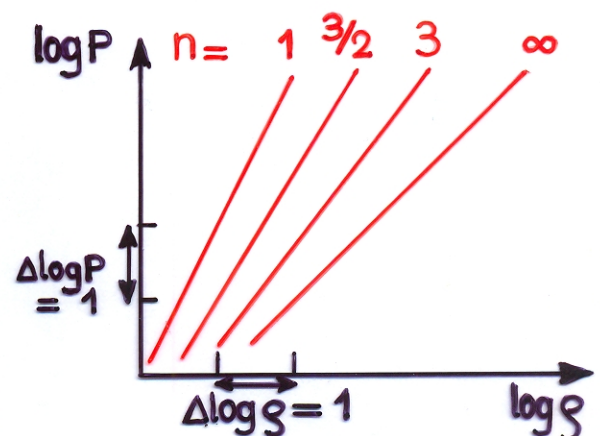
► $\exists$ 2 Möglichkeiten für Polytrope:

a) Die Zustandsgleichung ist polytrop

$$\rightarrow P = K \rho^{1 + \frac{1}{n}}$$

Beispiele : Vollst. entartetes Elektronengas
($\rightarrow$ 14.)

- nicht-rel. entartet : $P = \text{const.} \cdot \rho^{5/3} \rightarrow n = 3/2$
- extrem rel. entartet : $P = \text{const.} \cdot \rho^{4/3} \rightarrow n = 3$



b) Koppelung von P- und T-Schichtung

Zustandsgleichung $P = P(\rho, T)$ + Nebenbedingung $T = T(P)$

Beispiele: 1) isotherme Schichtung : $T = \text{const.}$ (kommt vor !)

mit idealem Gas $P = \frac{\rho}{\mu} \rho T \rightarrow P = \text{const.} \cdot \rho \rightarrow n = \infty$

2) adiabatische Schichtung : $T = \text{const.} \cdot P^{\nabla_a}$ (bei Konvektion)

mit idealem Gas $P = \frac{\rho}{\mu} \rho T \rightarrow P = \text{const.} \cdot \rho^{1/(1-\nabla_a)}$
 $\rightarrow n = \frac{1-\nabla_a}{\nabla_a}$

1-atomiges ideales Gas : $\nabla_a = 2/5 \rightarrow n = 3/2$

► Wichtiger Unterschied : Wenn Zustandsgleichung polytrop $\rightarrow K$ bekannt
 Wenn P- und T-Schichtung gekoppelt $\rightarrow K$ frei, von T abhängig !

17.2. Die Emdensche Differentialgleichung

► Wenn $P = P(\rho)$: mechanischer und thermischer Teil des Systems der Grundgleichungen entkoppelt ($\rightarrow 10.4$). Polytrope : nur mech. Struktur !

Zu lösende Gleichungen: $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho$; $\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho$; $P = K \rho^{1+\frac{1}{n}}$

Umrechnung in eine Differentialgleichung 2. Ordnung

$$M_r = -\frac{1}{G} \frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \rightarrow \frac{dM_r}{dr} = -\frac{1}{G} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = 4\pi r^2 \rho$$

► $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho$ Poisson-Gleichung

Benützen die Polytropenbeziehung $\rightarrow \frac{dP}{dr} = K(1+\frac{1}{n}) \rho^{\frac{1}{n}} \frac{d\rho}{dr}$

$$\rightarrow K \left(\frac{n+1}{n} \right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi G \rho$$

► Substitution : $r = \alpha x$ $\rightarrow \frac{1}{\alpha^2} \frac{K(n+1)}{4\pi G} \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \rho^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\rho}{dx} \right) = -\rho$

$\rho = \lambda y^n$ $\rightarrow \frac{1}{\alpha^2} \frac{K(n+1)\lambda^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n$

Wählen nun α : $\alpha^2 = \frac{K(n+1)\lambda^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \rightarrow \alpha = \alpha(n, K, \lambda)$

► $\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n$: Emdensche Differentialgleichung
(transformierte Poisson-Gleichung)

ausdifferenzierte Emdengleichung: $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + y^n = 0$

Haben noch einen freien Parameter: λ . Wählen $\lambda = \varrho_c$

Randbedingungen im Zentrum: $r=0$ und $\varrho(r=0) = \varrho_c$

→ $x=0$ und $y(x=0) = 1$. Ausserdem: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} < \infty \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_0 = 0$

→ Emdengleichung bleibt endlich bei $x=0$.

17.3 Lösungen der Emdengleichung

a) Lösung durch Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} x^{\nu}$

ergibt $c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = -\frac{1}{6}, c_3 = 0, c_4 = \frac{n}{120}$

$$\underline{y(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{nx^4}{120} + \dots}$$

b) Analytische Lösungen existieren für $n = 0, 1, 5$

$$n = 0 : y(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$$

$$n = 1 : y(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$n = 5 : y(x) = \frac{1}{(1+x^2/3)^{1/2}}$$

≡ unendlich ausgedehnte Gleichgewichtskonfiguration $y \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$

c) Numerische Lösungen: rel. einfach zu berechnen, da die Randbedingungen festliegen.

Lösungen für verschiedene n : Lane-Emden-Funktionen

d) Diskussion der Lane-Emden-Funktionen

- In der Nähe des Zentrums ($x \rightarrow 0$) $\forall n : y(x) = 1 - \frac{x^2}{6}$, $x \ll 1$
- $\forall n < 5$ hat $y(x)$ eine Nullstelle $x_0 < \infty$. $x_0 \hat{=}$ Rand der Polytrope.
Alle Polytrope mit $n < 5$ haben einen scharfen Rand, $y'(x_0) < 0$.

17.4 Masse und Radius von Polytropen

Radius: $R = \alpha x_0 = \left[\frac{K(n+1) \varrho_c^{\frac{1}{n}-1}}{4\pi G} \right]^{1/2} x_0$

Masse: $M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \varrho(r) dr = 4\pi \varrho_c \alpha^3 \int_0^x \xi^2 y^n(\xi) d\xi = -4\pi \varrho_c \alpha^3 \int_0^x \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{dy}{d\xi} \right) d\xi$

$M_r = -4\pi \varrho_c \alpha^3 x^2 \frac{dy}{dx} \rightarrow M = -4\pi \varrho_c \alpha^3 x_0^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_0}$

Setzen α ein und erhalten:

$M = -4\pi \left(\frac{K(n+1)}{4\pi G} \right)^{3/2} \varrho_c^{\frac{3-n}{2n}} x_0^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_0}$

► Für $n=3$ hängt M nicht mehr von ϱ_c ab!

$M(n=3) = -4\pi \left(\frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} (x_0^2 y'(x_0))_{n=3}$

(Wichtig bei Weissen Zwergen,
→ 18)

17.5 Der Freiheitsgrad der Lösungen

Betrachten für festes n $y(x)$ im Intervall $[0, x_0]$. Fallunterscheidung:

a) Die Polytropenkonstante ist gegeben, d.h. Zustandsgleichung $P = K \varrho^{\frac{1}{n}+1}$

$\rightarrow \alpha = \left[\frac{K(n+1)}{4\pi G} \right]^{1/2} \varrho_c^{\frac{1-n}{2n}} = \alpha(\varrho_c) \rightarrow$ Elimination von α und ϱ_c aus den Gl. $\alpha = \alpha(\varrho_c)$, $R = \alpha x_0$ und $M(\varrho_c)$

► $R^{3-n} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{K(n+1)}{G} \right]^n \left[-x_0^{\frac{n+1}{n-1}} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=x_0} \right]^{n-1} M^{1-n}$

Masse-Radius-
Beziehung

Bemerkungen zur Masse-Radius-Beziehung:

- 1) Für festes n und $K \exists$ eindeutige M-R-Beziehung
- 2) Für $n = 3$ ist M unabhängig von R ! ($\rightarrow$ Weiße Zwerge)
- 3) Für $n = 1$ ist R unabhängig von M
- 4) Aus $R^{3-n} \sim M^{1-n}$, d.h. $R \sim M^{\frac{1-n}{3-n}}$ folgt

$$\frac{dR}{dM} \sim \frac{1-n}{3-n} M^{-\frac{2}{3-n}} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{dR}{dM} &> 0 \quad \text{für } n < 1 \text{ und } n > 3 \\ \frac{dR}{dM} &< 0 \quad \text{für } 1 < n < 3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{für } 1 < n < 3 \text{ nimmt } \rho_c \text{ mit } M \text{ zu: } \frac{d\rho_c}{dM} \sim \frac{2n}{3-n} M^{\frac{3n-3}{3-n}}$$

Verlauf von Druck und Dichte ist durch die M-R-Beziehung ebenfalls eindeutig bestimmt

Für gegebenes M und n ist

$$\alpha = \frac{R}{x_0} = \frac{r}{x} = \left(\frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3-n}} \left[\frac{K(n+1)}{G} \right]^{\frac{n}{3-n}} \left[-\frac{1}{x_0^2 y'(x_0)} \right]^{\frac{1-n}{3-n}} M^{\frac{1-n}{3-n}} = \text{const.}$$

► Mit $\rho\left(\frac{r}{\alpha}\right) = \rho(x) = \rho_c y^n(x)$ sind $\rho(r)$, $P(r)$ und $M_r(r)$ eindeutig bestimmt.

$\rightarrow$ Die Lösungen haben keine weiteren Freiheitsgrade mehr. Für gegebene K, n und M gibt es nur eine einzige Lösung.

Mittlere Dichte $\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}(ax_0)^3} = -3\rho_c \frac{y'(x_0)}{x_0}$

Mass für die Massenkonzentration : $\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = -\frac{1}{3} \frac{x_0}{y'(x_0)}$

► **Massenkonzentration nimmt mit wachsendem n stark zu!**

Zentraldruck von Polytropen : $P_c = K \rho_c^{\frac{1}{n}+1} = \frac{GM^2}{R^4} \frac{1}{4\pi(n+1)(y'(x_0))^2}$

Potentielle Energie : $E_G = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R}$

b) Wenn K unbekannt bleiben alle unter a) abgeleiteten Beziehungen richtig mit folgendem wichtigen Unterschied:

► K tritt als zusätzlicher Parameter auf

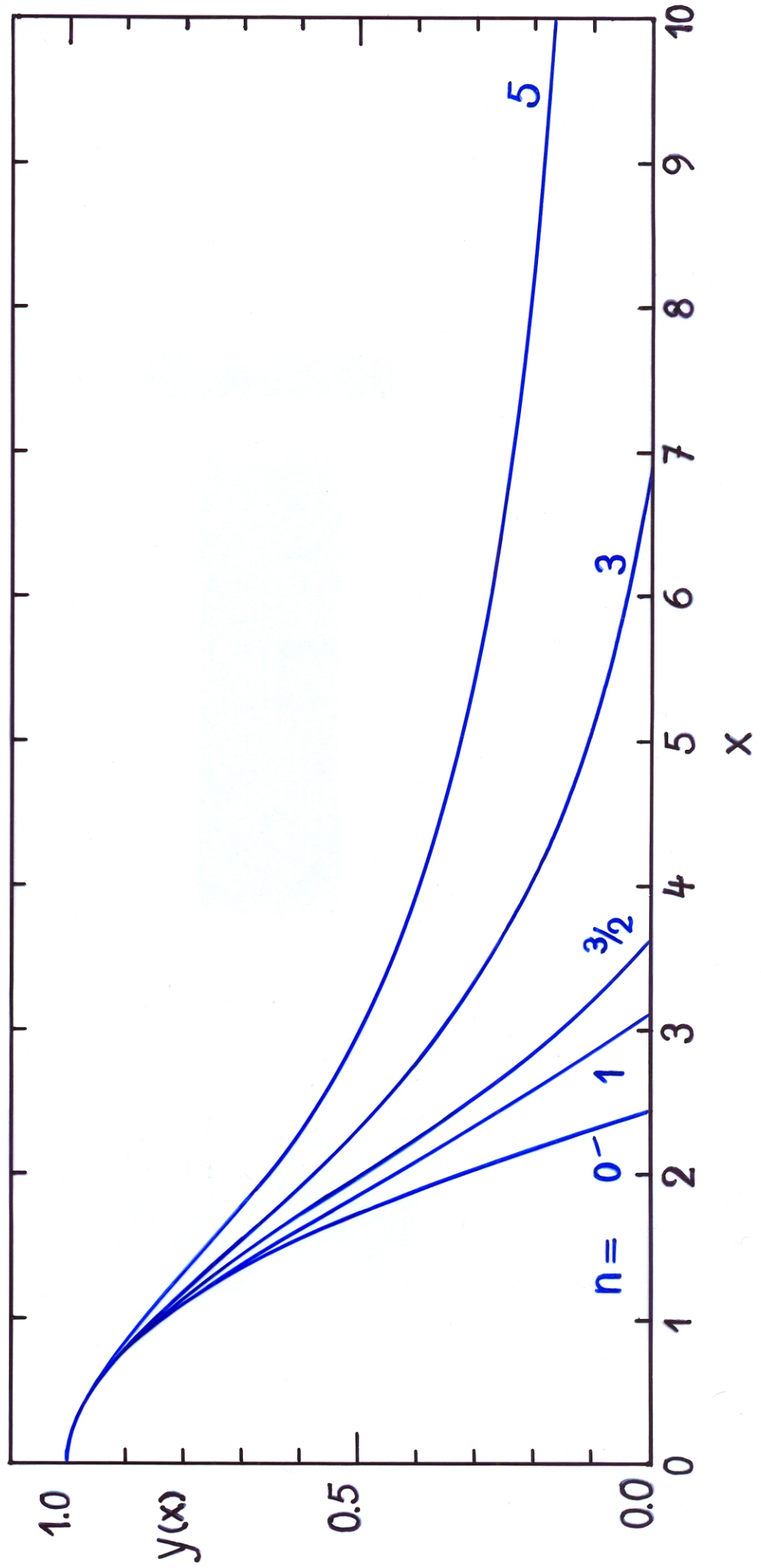
- Polytrope mit unbekanntem K haben einen Freiheitsgrad mehr!
- Keine eindeutige M-R-Beziehung, sondern einparametrische Schar von Lösungen zu vorgegebenem M und n, mit K oder g_c als Parameter.

17.6. Konstanten der Lane-Emden-Funktionen

n	x_0	$-x_0^2 y'(x_0)$	$g_c/\bar{g}$
0	2.4494	4.8988	1.0000
0.5	2.7528	3.7878	1.8361
1.0	3.14159	3.14159	3.28987
1.5	3.65375	2.71406	5.99071
2.0	4.35287	2.41105	11.40254
2.5	5.35528	2.18720	23.40646
3.0	6.89685	2.01824	54.1825
3.25	8.01894	1.94980	88.153
3.5	9.53581	1.89056	152.884
4.0	14.97155	1.79723	622.408
4.5	31.83646	1.73780	6189.47
4.9	169.47	1.7355	934000.
5.0	∞	1.73205	∞

Lane – Emden – Funktionen

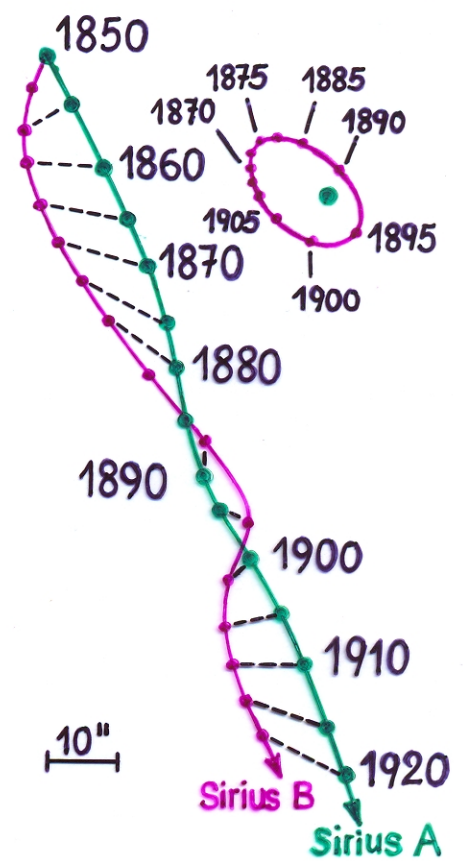
$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -y^n \quad ; \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0$$



WEISSE ZWERGE

Zur Geschichte

- 1834 **Bessel (1784 - 1846)** entdeckt variable Eigenbewegung von Sirius
 → Doppelstern mit unsichtbarem Begleiter
- 1862 **A.G. Clark** findet Sirius-Begleiter nahe am vorausberechneten Ort
 Aus den Bahnelementen und der Parallaxe folgt für Sirius B $M \sim 1M_{\odot}$, $L \sim \frac{1}{400} L_{\odot}$
- 1915 **Adams** bestimmt Spektraltyp von Sirius B
 $SpT \sim F \rightarrow T \approx 8500 \text{ K}$, $R \approx \frac{1}{55} R_{\odot}$
 $\bar{\rho} \approx 61'000 \text{ g cm}^{-3}$!
- 1924 **A.S. Eddington** formuliert Paradoxon: Hohe Dichte nur bei vollst. Ionisation, d.h. bei hohen Temperaturen möglich. → Stern mit mit so hoher Dichte braucht Energie um abzukühlen !
- 1925 **Adams** misst Gravitationsrotverschiebung bei Sirius B ($v_R \approx 20 \text{ km/s}$) bestätigt damit Voraussage der ART und hohes $\bar{\rho}$ von Sirius B.
- 1926 **R.H. Fowler** löst Eddingtons Paradoxon: Vollst. Ionisation nicht nur bei hohem T möglich, sondern auch bei $T \rightarrow 0$, wenn nur der Druck hoch genug (Druckionisation). Pauli-Prinzip, d.h. Fermi-Dirac-Statistik für das Elektronengas (Entartungsdruck)
 → Zustandsgleichung, WZ sind Polytrope mit $n = 3/2 \rightarrow R \sim M^{-1/3}$.
- 1931 **S. Chandrasekhar** verallgemeinert Fowlers Ansatz: Berücksichtigung der speziellen RT → rel. Entartung → Grenzmasse für WZ. Beginn der Kontroverse mit Eddington. Eddington: Relativist. Entartung gibt es nicht, folglich auch keine Grenzmasse. Die M-R-Beziehung ist $R \sim M^{-1/3}$ für beliebige M.
 Chandrasekhar sucht Unterstützung bei Physikern (u.a. bei Bohr und Pauli), die sich aber nicht öffentlich zur Sache äussern.
- 1938/39 **Chandrasekhar** zieht Schlussstrich unter die Affaire, schreibt sein Buch *An Introduction to the Study of Stellar Structure* und wendet sich anderen Dingen zu. (Die Kontroverse endet letztlich mit Eddingtons Tod).



18. Weisse Zwerge

Weisse Zwerge : eines der wichtigsten Anwendungsgebiete für Polytropen

18.1 Abschätzung charakteristischer Größen

Prototyp eines Weissen Zwergs : **Sirius B**, der Begleitstern von Sirius A
(Sirius B : entdeckt von A.C. Clark 1862 ; Sirius AB = Doppelstern, $P=49.9a$)

Charakteristische Größen von Sirius B:

$$\left. \begin{array}{l} M = 1.05 M_{\odot} \\ R = 0.008 R_{\odot} \end{array} \right\} \rightarrow \text{mittlere Dichte } \underline{\bar{\rho} = 2.9 \cdot 10^6 \text{ gcm}^{-3}}$$

Charakteristische Größen anderer Weisser Zwerge (Mittelwerte)

$$\langle M \rangle = 0.58 M_{\odot}, \sigma_M = 0.1 M_{\odot}$$

$$\langle R \rangle = 0.012 R_{\odot}$$

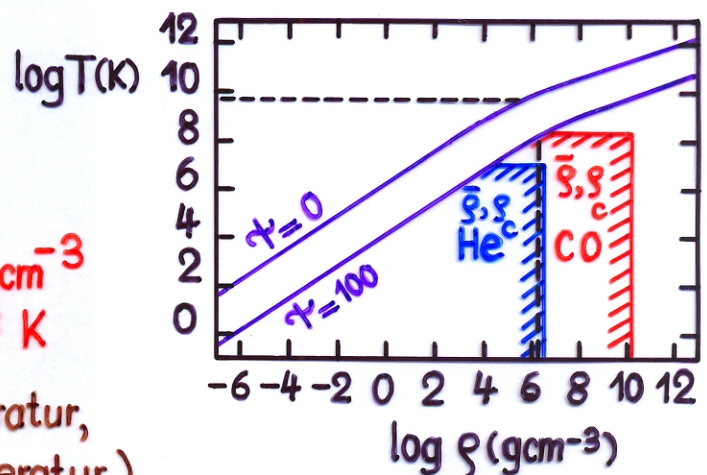
$$\rightarrow \langle \bar{\rho} \rangle = 4.7 \cdot 10^5 \text{ gcm}^{-3}$$

$$\langle g \rangle = 1.1 \cdot 10^8 \text{ cm s}^{-2}$$

► für alle Weissen Zwerge : $\bar{\rho} \approx 10^5 - 10^6 \text{ gcm}^{-3}$
 $T_c \lesssim 10^7 - 10^8 \text{ K}$

(Für He-WZ : $T_c \lesssim 10^7 \text{ K} \approx \text{H-Brenntemperatur}$,
für CO-WZ : $T_c \lesssim 2 \cdot 10^8 \text{ K} \approx \text{He-Brenntemperatur}$)

→ Lage der Weissen Zwerge im $\log \rho - \log T$ -Diagramm



► Elektronengas ist entartet, Ionengas $\approx$ ideales Gas (→ 14.5)

→ Zustandsgleichung:

$$P = K_{3/2} \rho^{5/3}, \quad K_{3/2} = \frac{h^2}{5m_e m_p} \left(\frac{3}{8\pi m_p} \right)^{2/3} \mu_e^{-5/3}$$

für vollst. nicht-rel. entart.
Elektronengas
 $\hat{=}$ Polytropenindex $n=3/2$

$$P = K_3 \rho^{4/3}, \quad K_3 = \frac{c}{4m_p} \left(\frac{3h^3}{8\pi m_p} \right)^{1/3} \mu_e^{-4/3}$$

für vollst. extrem-relativistisch
entartetes Elektronengas
 $\hat{=}$ Polytropenindex $n=3$

→ in beiden Fällen ist K gegeben → $\exists$ M-R-Beziehung für Weisse Zwerge

18.2. Die Masse-Radius- und Masse-Dichte-Beziehung

Da K gegeben, gilt die in 17.5 hergeleitete M-R-Beziehung (für beliebige n):

$$R = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3-n}} \left[\frac{K(n+1)}{G}\right]^{\frac{n}{3-n}} \left[-x_0^{\frac{n+1}{n-3}} y'(x_0)\right]^{\frac{n-1}{n-3}} M^{\frac{1-n}{3-n}} = \text{const.} \cdot M^{\frac{1-n}{3-n}}$$

und die entspr. Masse - Dichte - Beziehung

$$\rho_c = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{2n}{3-n}} \left[\frac{K(n+1)}{G}\right]^{\frac{3n}{n-3}} \left[-x_0^2 y'(x_0)\right]^{\frac{2n}{n-3}} M^{\frac{2n}{3-n}} = \text{const.} \cdot M^{\frac{2n}{3-n}}$$

Annahme: Elektronengas sei vollst. nicht-relativistisch entartet

$$\rightarrow n = 3/2, \quad K = K_{3/2}$$

$$\rightarrow \underline{R = \text{const.} \cdot M^{-1/3}} \quad \text{und} \quad \underline{\rho_c = \text{const.} \cdot M^2}$$

→ mit $\left. \begin{array}{l} \frac{dR}{dM} < 0 \\ \frac{d\rho_c}{dM} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d\phi}{dM} > 0$: Entartung steigt mit M !
 → Ab einer bestimmten Masse muss relativistische Entartung wichtig werden !

18.3 Die Grenzmasse für Weisse Zwerge

a) Nehmen Zustandsgleichung des vollst. extrem relativistisch entarteten Elektronengases → Polytrope mit $n=3$

$n=3$: M-R-Beziehung wird singulär. $\exists$ nur eine von R und ρ_c unabhängige Masse

$$\underline{\underline{M_3 = -4\pi \left(\frac{K}{\pi G}\right)^{3/2} (x_0^2 y'(x_0))_{n=3}}}$$

Weiter gilt : $\underline{R_3 = \left(\frac{K}{\pi G}\right)^{1/2} \rho_c^{-1/3} x_0}$: R nur noch von ρ_c abhängig

Betrachten jetzt M-R-Beziehung für $n = 3 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$:

Aus $R = \text{const.} \cdot M^{\frac{1-n}{3-n}} = \text{const.} \cdot M^{1-\frac{2}{\varepsilon}}$ folgt: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R = 0$

Entsprechend: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varrho_c \rightarrow \infty$

b) Übergang von $n = 3/2 \rightarrow n = 3$

$n = 3/2$: $\varrho_c \sim M^2 \rightarrow$ Fermi-Energie wächst mit M

$\rightarrow \xi = \frac{P_F}{m_e c} \sim \varrho^{1/3}$ wächst mit M

Andererseits: Für gegebenes M : $\frac{d\varrho}{dM_r} < 0 \rightarrow \frac{d\xi}{dM_r} < 0$

► Für reale Weisse Zwerge wird die Entartung nach aussen hin weniger relativistisch $\rightarrow$ Von M_r/M abhängiger Polytropenindex. Solche Konfigurationen sind keine Polytropen!

Die relevante Zustandsgleichung ist ($\rightarrow$ 14.6)

$$P_e = \frac{8\pi}{3m_e h^3} (m_e c)^5 \int_0^\xi \frac{\eta^4 d\eta}{(1+\eta^2)^{1/2}} = \frac{8\pi}{3m_e h^3} (m_e c)^5 f(\xi)$$

Theorie für Sterne mit dieser Zustandsgleichung zuerst von Chandrasekhar (1935).

Wenn M hinreichend gross, so ist wegen $\varrho_c \sim M^2$ und $\xi \sim \varrho^{1/3}$ das Elektronengas im ganzen Stern relativistisch entartet. $\rightarrow n = 3 - \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$.

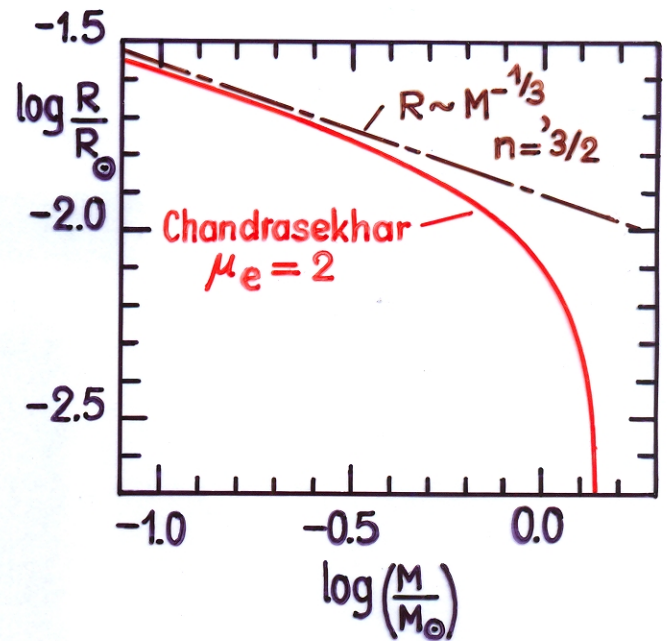
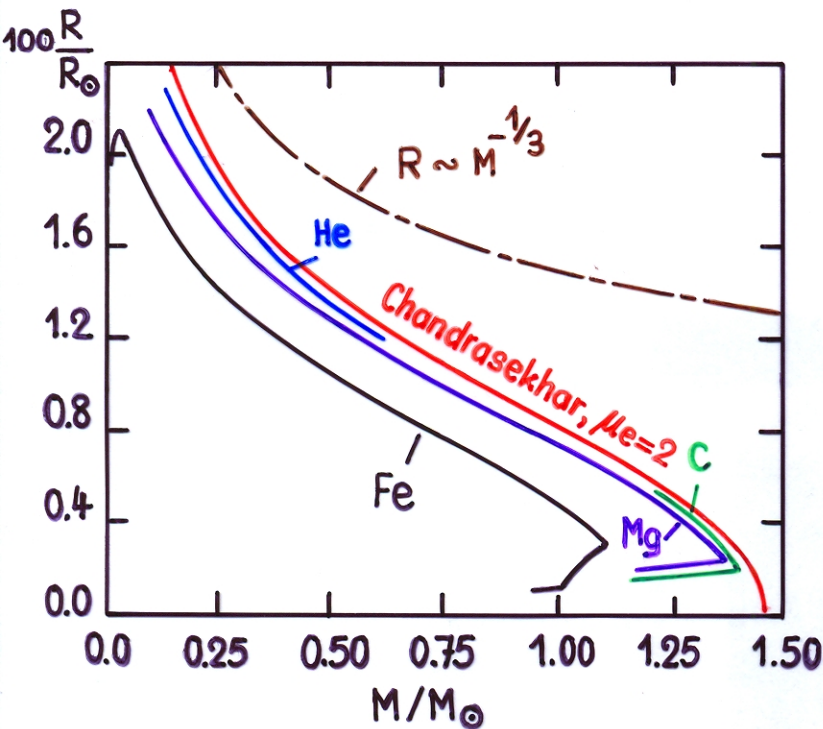
► Die Masse eines Weissen Zwergs, für die $\varepsilon = 0$, d.h. $n = 3$ ist, heisst Chandrasekhar Masse und ist

$$M_{\text{ch}} = M_3(K_3) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{4\pi m_p^2} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \mu_e^{-2} (-x_0^2 y'(x_0))_{n=3} = \frac{0.1976}{m_p^2} \left(\frac{hc}{G} \right)^{3/2} \mu_e^{-2} = \frac{5.76 M_\odot}{\mu_e^2}$$

M_{ch} : Grösste Masse, die ein Stern haben kann, der durch den Druck eines entarteten Elektronengases gestützt wird.

► Für ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{20}\text{Ne}$, ${}^{24}\text{Mg}$: $\mu_e = 2 \rightarrow \underline{\underline{M_{\text{CH}} = 1.44 M_{\odot}}}$

Die M-R-Beziehung : Ergebnisse numerischer Rechnungen



Gründe für Abweichungen von Chandrasekhars Theorie:

- bei He, C, Mg : negativer Druck durch Coulombkräfte der Ionen
- bei Fe : " " " " " "

und $\mu_e \neq 2$: $(\mu_e)_{\text{Fe}} = \frac{56}{26} = 2.15 \rightarrow (M_{\text{CH}})_{\text{Fe}} = 1.24 M_{\odot}$,
aber schon für $M > 1.1 M_{\odot}$ einsetzen der Neutronisierung

Analytische Approximation für die
M-R- Beziehung (Nauenberg, 1972) :

$$R = 1.12 \cdot 10^{-2} R_{\odot} \left[\left(\frac{M}{M_{\text{CH}}} \right)^{-2/3} - \left(\frac{M}{M_{\text{CH}}} \right)^{2/3} \right]^{1/2}$$

Einige numerische Werte für $\mu_e = 2 \Rightarrow$

$M/M_{\odot}$	$\log \rho_c (\text{g/cm}^3)$	$\log R/R_{\odot}$
0.22	5.39	-1.70
0.40	6.03	-1.81
0.50	6.29	-1.86
0.61	6.56	-1.91
0.74	6.85	-1.96
0.88	7.20	-2.03
1.08	7.72	-2.15
1.22	8.21	-2.26
1.33	8.83	-2.41
1.38	9.29	-2.53
1.44	∞	$-\infty$

Zur Masse-Radius-Beziehung Weisser Zwerge

- wichtigster Test für Chandrasekhars Theorie und deren späteren Verfeinerungen.
- Zu Eddingtons Lebzeiten waren die Beobachtungen zu ungenau, um die Kontroverse mit Chandrasekhar zu entscheiden.

1958 scheint alles klar zu sein. (→ Schatzman: White Dwarfs, Fig. 13: Chandrasekhar glänzend bestätigt).

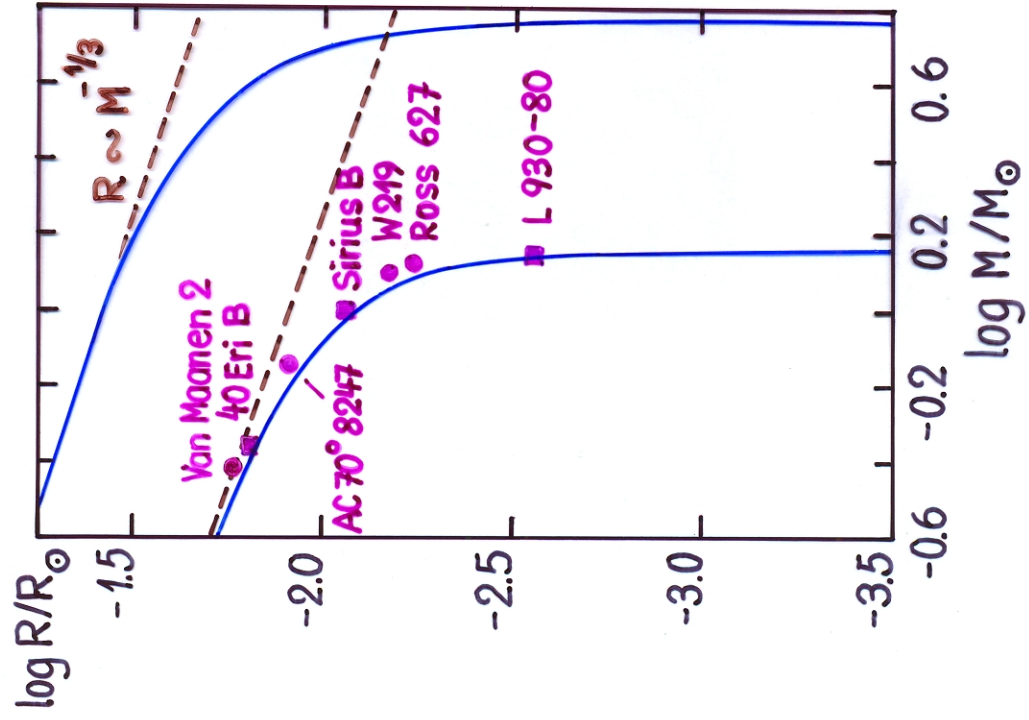
1995 Nur 3 Weisse Zwerge (Sirius B, LB 1497, 40 Eri B), deren Daten für eine Überprüfung der M-R-Beziehung hinreichend genau bekannt. Grund: Beobachtungen sind sehr schwierig. Braucht unabhängige Bestimmung von M und R, z.B. aus

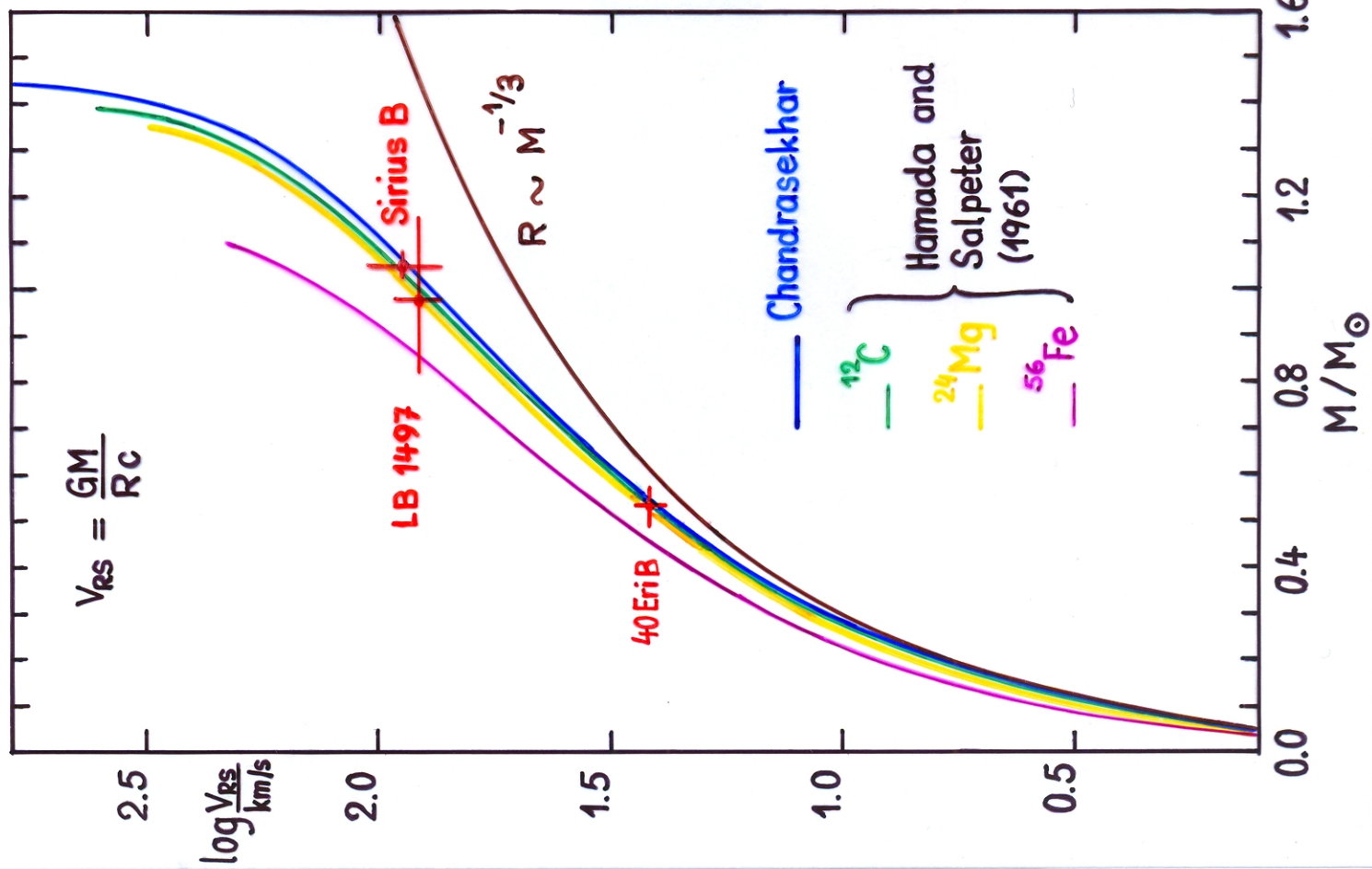
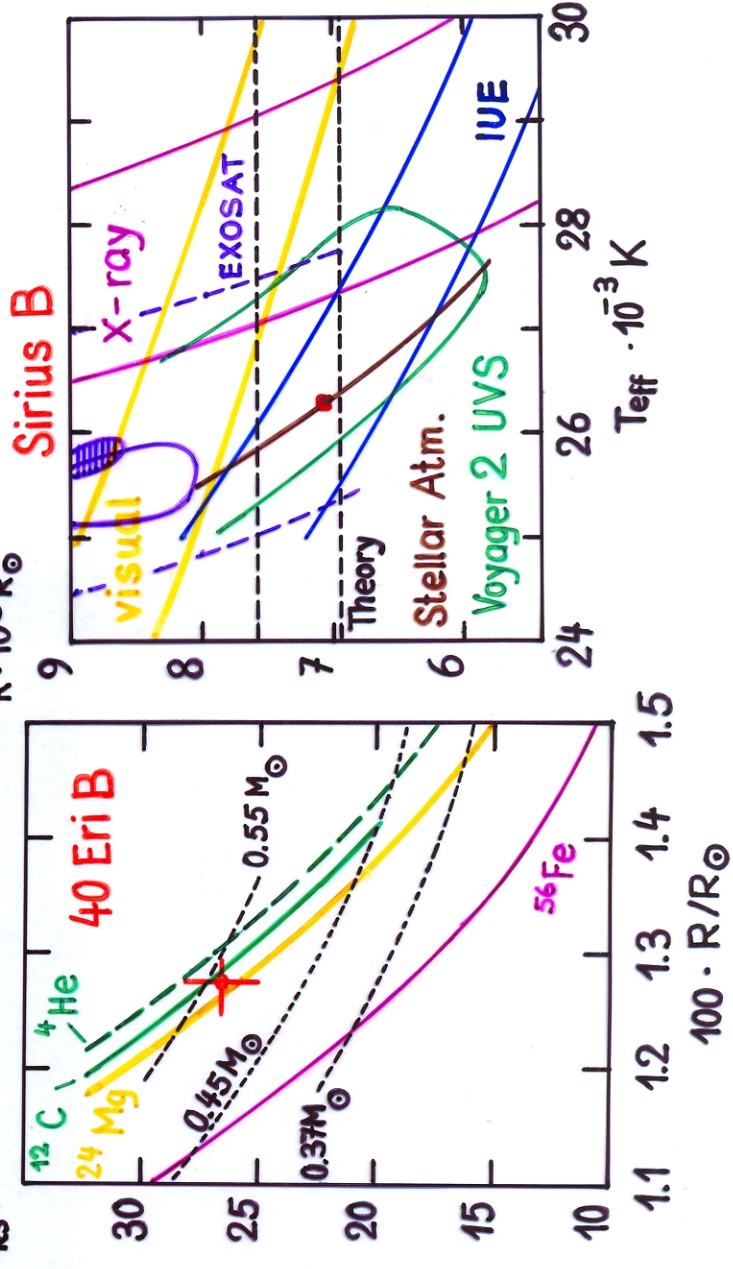
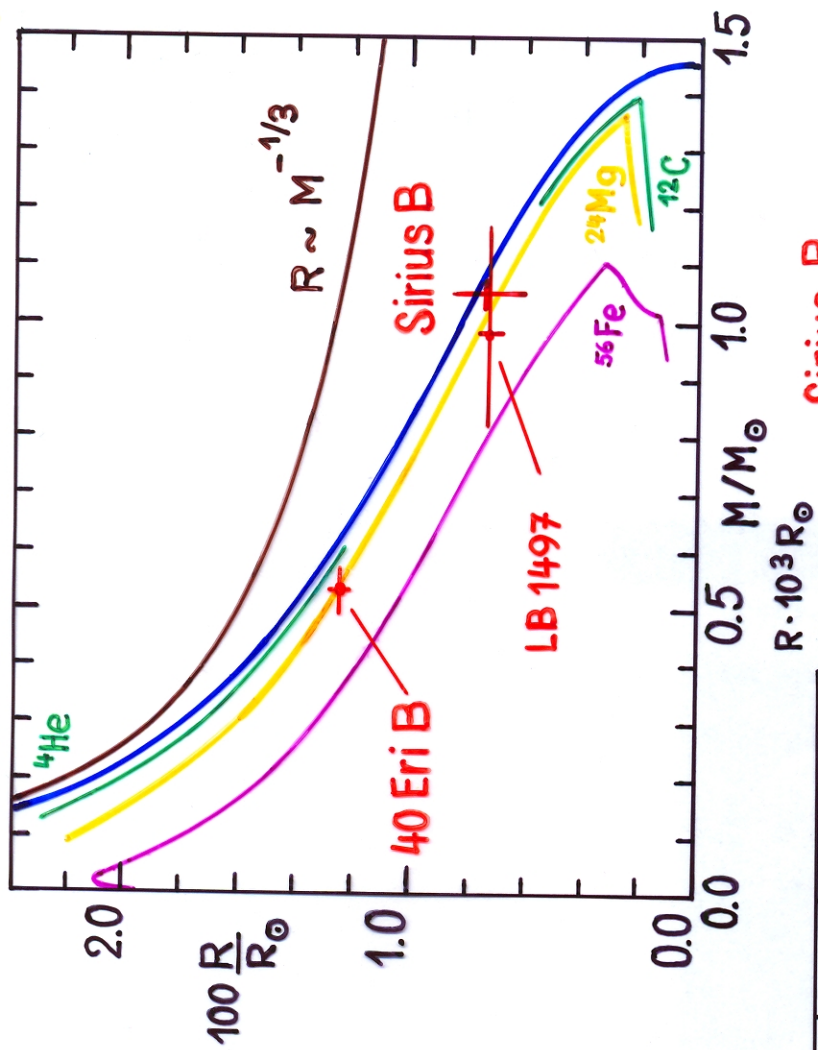
- 3. Kepler Gesetz $\frac{G(M_1+M_2)}{A^3} = \frac{4\pi^2}{P^2}$ (bei Doppelsternen)
- + Radialgeschwindigkeiten etc.

- Gravitationsrotverschiebung $V_{RS} = \frac{GM}{Rc}$
- Schwerebeschleunigung $g = \frac{GM}{R^2}$ (spektroskopisch)
- Leuchtkraft $L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$

Angaben, wonach die M-R-Beziehung heute durch viele WZ bestätigt wird, beruhen auf einem Zirkelschluss!

Mass Radius Relation of White Dwarfs (Schatzman 1958)





c) Physikalische Deutung der Chandrasekhar Masse

Warum können nur WZ mit $M < M_{\text{CH}}$ existieren?

Grund: Hydrostatisches Gleichgewicht : $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho$

Abschätzung: $\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho \rightarrow \frac{\bar{P}}{R} \sim \frac{M}{R^2} \frac{M}{R^3} \rightarrow \bar{P} \sim \frac{M^2}{R^4}$

Hydrost. Gleichgewicht : $\frac{\text{Gravitationskraft}}{\text{Druckkraft}} = 1 = \text{const.} \cdot \frac{M^2}{\bar{P} R^4}$

Sei nun $P = \text{const.} \cdot \rho^{5/3}$ (vollst. nicht-rel. entartetes Elektronengas)

$\rightarrow \bar{P} = \text{const.} \cdot \frac{M^{5/3}}{R^5} \rightarrow \frac{\text{Gravitationskraft}}{\text{Druckkraft}} = \text{const.} \cdot M^{1/3} R$

► zu jedem M gibt es ein R , so dass der Stern im hydrost. Gleichgew. ist.

Sei nun $P = \text{const.} \cdot \rho^{4/3}$ (vollst. extrem rel. Entartung)

$\rightarrow \bar{P} = \text{const.} \cdot \frac{M^{4/3}}{R^4} \rightarrow \frac{\text{Gravitationskraft}}{\text{Druckkraft}} = \text{const.} \cdot M^{2/3}$, unabhängig von R !

► Es gibt nur eine Masse (M_{CH}), für die hydrost. Gleichgew. möglich ist.

Wenn $M > M_{\text{CH}}$: Gravitation überwiegt $\rightarrow$ Kontraktion

Wenn $M < M_{\text{CH}}$: (Gravitationskraft/Druckkraft) nicht mehr unabhängig von $R \rightarrow$ hydrostat. Gleichgew. für ein best. R möglich

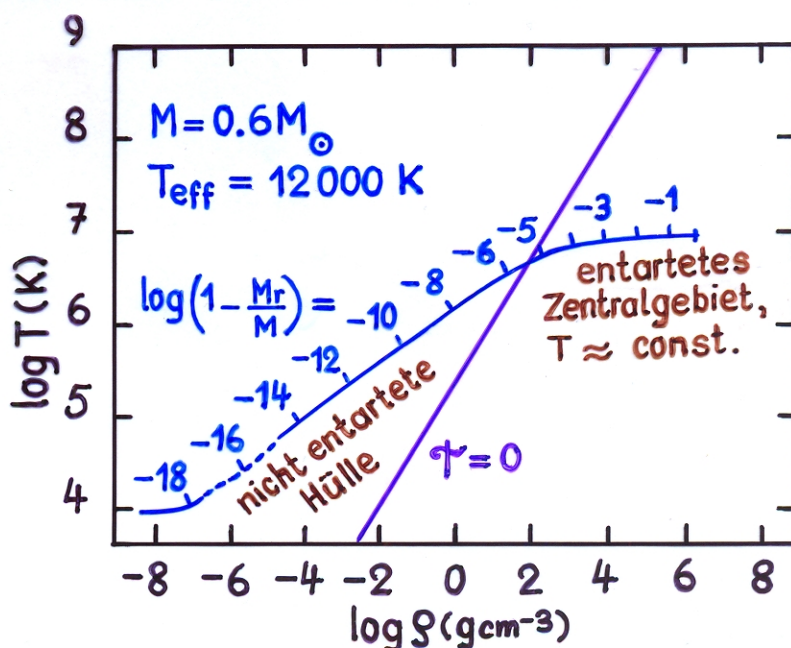
18.4. Zentraltemperatur und Entwicklung von Weissen Zwergen

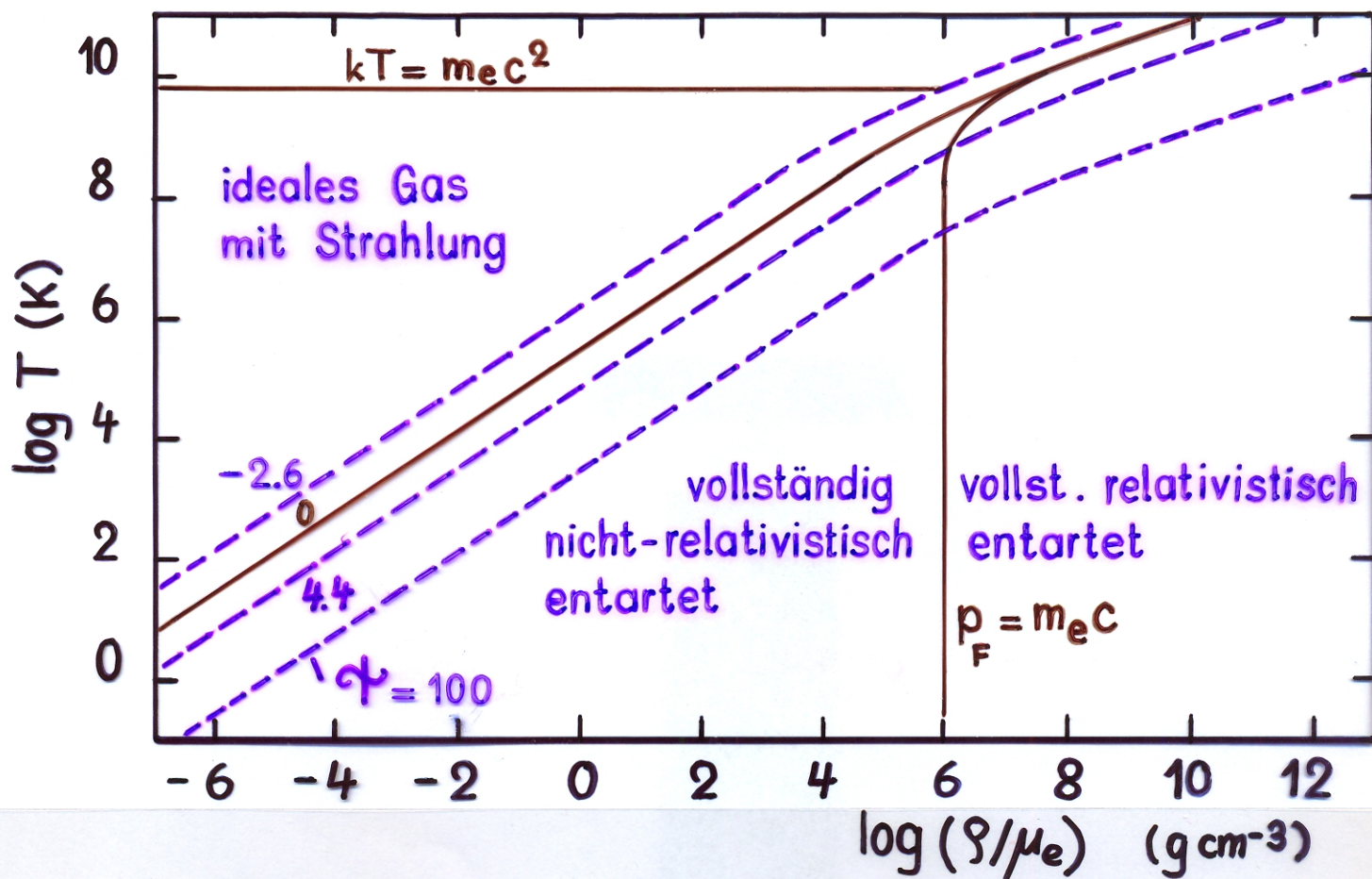
Entartetes Elektronengas

$\rightarrow$ gute Wärmeleitfähigkeit

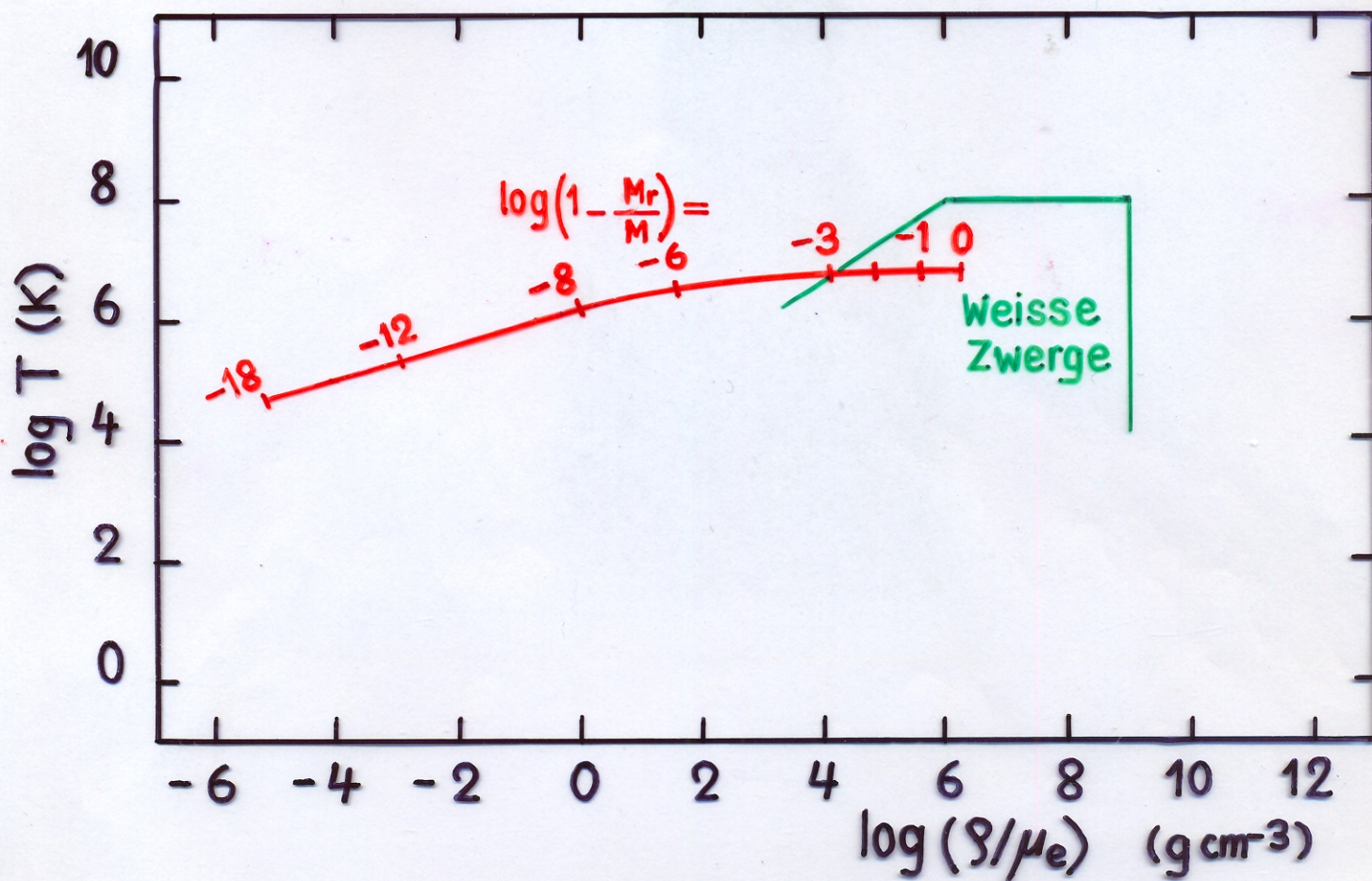
► Der entartete Teil eines Weissen Zwergs ist praktisch isotherm

$\rightarrow T(\psi) \approx T(\psi_c), \psi > 0$





Weisser Zwerg , $M = 0.6 M_\odot$, $T_{\text{eff}} = 12'000 \text{ K}$



Sei $r_0 = r(\psi = 0)$. $\rightarrow T(r < r_0) \approx T_c$ durch Wärmeleitung

Für $r > r_0$: $\psi < 0 \rightarrow$ annähernd ideales Gas, Strahlungstransport

a) Abschätzung der Zentraltemperatur

Annahme: Für $r > r_0$ ideales Gas, Energietransport durch Strahlung

$\rightarrow$ Aus den Hüllenrechnungen ($\rightarrow 11.3$) :

$$P^2 = C' T^{8.5} + C \quad \text{mit} \quad C' = \frac{32\pi a c G}{25.5} \frac{M}{\kappa_0 L} \sim \frac{M}{L}$$

$$\text{Mit } P = \frac{Q}{\mu} \varrho T \text{ folgt } \varrho^2 \sim \frac{M}{L} T^{6.5} \text{ oder } \underline{\underline{\varrho \sim \left(\frac{M}{L}\right)^{1/2} T^{13/4}}}$$

Für $\psi = \text{const.}$ gilt ($\rightarrow 14.2$) : $\varrho \sim T^{3/2}$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} \varrho(r_0) \sim T(r_0)^{3/2} = T(\psi=0)^{3/2} \\ \varrho(r_0) \sim \left(\frac{M}{L}\right)^{1/2} [T(r_0)]^{13/4} \end{array} \right\} \rightarrow \underline{\underline{T(r_0) \sim \left(\frac{L}{M}\right)^{2/7}}}$$

Alle Konstanten mitgerechnet findet man

$$\underline{\underline{T(r_0) = T_0 \left(\frac{L/L_\odot}{M/M_\odot}\right)^{2/7}}} \quad \text{mit} \quad T_0 = \left[\frac{102\pi F_{1/2}(0) Q k^3 m_p^2 m_e^3 \mu_e^2 \kappa_0 Z(1+X) L_\odot}{a c G h^6 \mu M_\odot} \right]^{2/7}$$

Mit $Y = 0.99$, $Z = 0.01$, $\mu_e = 2$, $F_{1/2}(0) = 0.678$, $\kappa_0 = 4 \cdot 10^{25} \text{ cgs}$ folgt

$$\underline{\underline{T(r_0) \approx 3 \cdot 10^7 \text{ K} \left(\frac{L/L_\odot}{M/M_\odot}\right)^{2/7}}} \quad \blacktriangleright \text{kleines } L \text{ trotz hoher Temperatur}$$

► Im Inneren eines Weissen Zwergs gibt es keinen Wasserstoff mehr

(Begründung: Angenommen $X > 0$ im Inneren: $\rightarrow$ Thermonukleare Energieerzeugung, z.B. bei $T \approx T_0 \approx 3 \cdot 10^7 \text{ K}$ und $\varrho \approx 10^4 - 10^8 \text{ g cm}^{-3}$ durch CNO-Zyklus $\rightarrow L/L_\odot \gg 1$)

► Thermonukleare Reaktionen im Inneren von Weissen Zwergen sind aus Stabilitätsgründen überhaupt ausgeschlossen ($\rightarrow 23.5$)

b) Entwicklung von Weissen Zwergen

Annahme: $M = \text{const.}$

→ Wegen M-R-Beziehung: $R(t) = \text{const.}$, d.h. $\dot{R} = 0$

Weiter folgt $\dot{E}_G = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r \right) = 0$, → es wird keine Gravitationsenergie frei

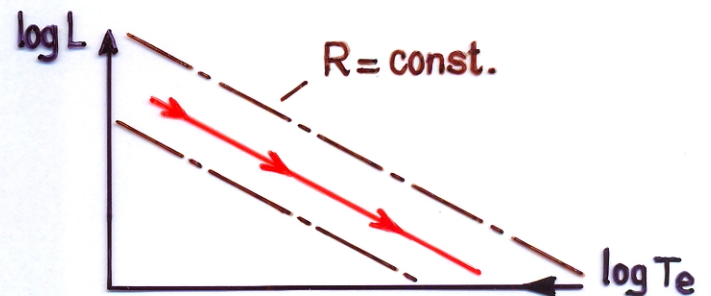
und $\dot{E}_N = 0$, d.h. keine thermonukleare Energieerzeugung

► $L = -\dot{E}_T$, Energie nur aus dem thermischen Energiereservoir → Abkühlung

Entwicklung von Weissen Zwergen besteht in Abkühlung

→ $\dot{T} < 0 \rightarrow L > 0$

Abkühlzeit $\tau = -\frac{E_T}{\dot{E}_T} = \frac{E_T}{L}$



Weisse Zwerge im Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD)

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4$$

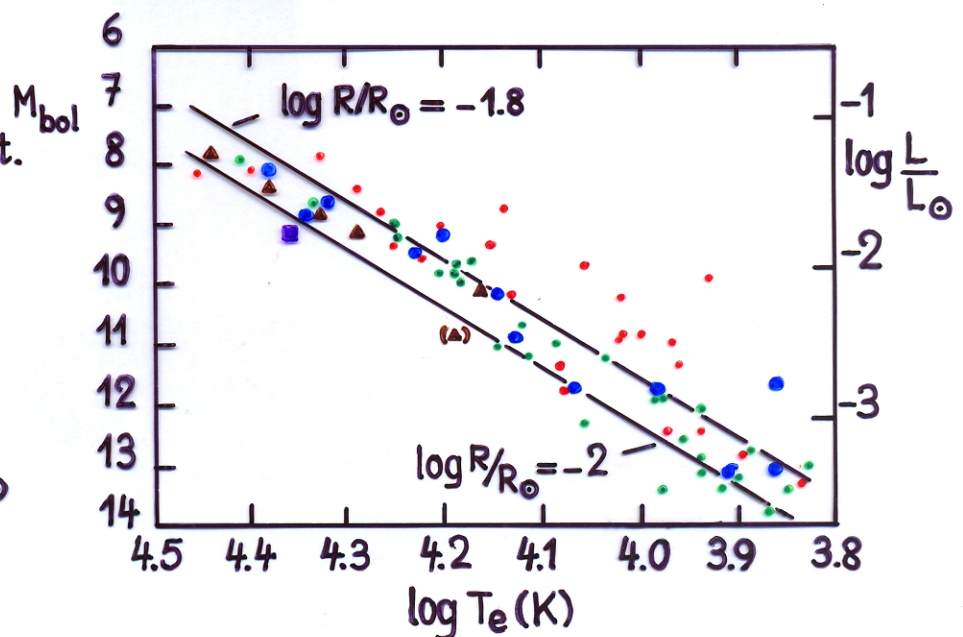
→ $\log L = 4 \log T_e + 2 \log R(M) + \text{const.}$

für gegebene Masse:

$$\log L = 4 \log T_e + \text{const.}$$

Typische Werte: $L \approx 10^{-2} \dots 10^{-3} L_\odot$
 $R \approx 10^{-2} R_\odot$

→ $T_e \approx 1 \dots 2 \cdot 10^4 \text{ K}$



HRD für DA Weisse Zwerge

- mit Parallaxe $\pi \geq 0''.06$
- mit Parallaxe $0''.03 \leq \pi < 0''.06$
- mit Parallaxe $\pi < 0''.03$
- Sirius B

18.5 Abkühlzeit von Weissen Zwergen

Bei vollständiger Entartung : thermische Energie der Elektronen $E_{T,e} = 0$

$$\begin{aligned} \rightarrow E_T \approx E_{T,i} &= \int_0^M \frac{3}{2} k T(M_r) \frac{dN_i}{dM_r} dM_r = \frac{3}{2} k \int_0^M T(M_r) \frac{dM_r}{\mu_{i,m_p}} = \frac{3}{2} \frac{k}{\mu_{i,m_p}} \int_0^M T(M_r) dM_r \\ &= \frac{3k\bar{T}}{2\mu_{i,m_p}} M \quad \text{mit} \quad \bar{T} = \frac{1}{M} \int_0^M T(M_r) dM_r \end{aligned}$$

Da $T(M_r) \approx T_c = \text{const.}$ für $M_r < M_r$ und $1 - \frac{M_r}{M} \ll 1$, ist $\bar{T} \approx T_c$

$$\tau = \frac{E_T}{L} \approx \frac{3kT_c}{2\mu_{i,m_p}} \frac{M}{L}$$

Bessere Abschätzung unter Verwendung von $T = T_0 \left(\frac{L/L_0}{M/M_0} \right)^{2/7}$ ($\rightarrow 18.4$)

$$\begin{aligned} \rightarrow L = L_0 M T^{7/2} \quad \text{mit} \quad L_0 = \frac{L_0}{M_0} T_0^{-7/2} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{Differentialgleichung für } T(t): \\ \text{andererseits: } L = -\dot{E}_T = -\frac{3kM}{2\mu_{i,m_p}} \dot{T} \end{array} \right\} \quad \frac{T^{-7/2} dT}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{m_p \mu_i}{k} \frac{L_0}{M} \end{aligned}$$

$$\tau(T) = \frac{3}{5} \frac{k}{\mu_{i,m_p} L_0} T^{-5/2} \left\{ 1 - \left(\frac{T}{T(t=0)} \right)^{5/2} \right\} \approx \frac{3}{5} \frac{k}{\mu_{i,m_p} L_0} T^{-5/2}, \quad \text{wenn} \quad \left(\frac{T}{T(t=0)} \right)^{5/2} \ll 1$$

Einsetzen von L_0 ergibt

$$\tau \approx \frac{3}{5} \frac{k T_0 M_0}{\mu_{i,m_p} L_0} \left(\frac{M/M_0}{L/L_0} \right)^{5/7} \Rightarrow L(t) = L_0 \frac{M}{M_0} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-7/5}, \quad t_0 = \frac{3kT_0 M_0}{5\mu_{i,m_p} L_0}$$

Mit $T_0 \approx 3 \cdot 10^7 \text{ K}$, $\mu_i = 14$ (50% ^{12}C + 50% ^{16}O) : $\tau \approx 1.7 \cdot 10^6 \text{ a} \left(\frac{M/M_0}{L/L_0} \right)^{5/7}$

► Bei kleinen Leuchtkräften wird die Abkühlzeit sehr lang

Berechnung von $T_{\text{eff}}(t)$: Mit $\frac{L}{L_0} = \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T_{\text{eff},0}} \right)^4$ wird

$$T_{\text{eff}}(t) \approx T_{\text{eff},0} \left(\frac{M}{M_0} \right)^{1/4} \left(\frac{R(M)}{R_0} \right)^{1/2} \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-7/20}, \quad \text{mit} \quad t_0 = \frac{3}{5} \frac{k T_0 M_0}{\mu_{i,m_p} L_0}$$

