

III DIE MATERIALFUNKTIONEN

$\rho = \rho(P, T, X_i)$
 $\alpha = \alpha(P, T, X_i)$
 $\varepsilon = \varepsilon(P, T, X_i)$

können im Prinzip als gegebene Funktionen betrachtet werden. Jedoch: Diskussion dieser Funktionen ist unerlässlich für das Verständnis gewisser Sternstypen.

13. Die Zustandsgleichung

Def.: Zustandsgleichung = Relation der Form $f(P, T, \rho, X_i) = 0$

13.1 Partialdrucke

Gesamtdruck $P = \sum_k P_k$, P_k = Partialdruck, z.B.

P_I : Ionendruck

P_e : Elektronendruck

P_r : Strahlungsdruck

$$\rightarrow P = \underbrace{P_I + P_e}_{= \text{Gasdruck } P_G} + P_r$$

a) Der Strahlungsdruck (LTE im Sterninneren, Abweichungen $\approx 10^{-10}$)

$$\rightarrow \underline{\underline{P_r = \frac{1}{3} a T^4 = \frac{1}{3} u_r}}$$

b) Der Druck eines idealen Gases

$$\rightarrow \underline{\underline{P_G = \frac{Q}{\mu} \rho T}}$$

! μ : abhängig von der chemischen Zusammensetzung und der Zahl der freien Elektronen, d.h. vom Ionisationszustand

13.2 Ionisation

Bei TE und LTE : Ionisationsgleichgewicht $\rightarrow$ Saha-Gleichung

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{u_{r+1}}{u_r} 2 \frac{(2\pi m_e k T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_r}{k T}}$$

oder
$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{2\ell_{r+1}+1}{2\ell_r+1} 2 \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\chi_r/kT}, \text{ wobei}$$

n_{r+1} = Zahl der $r+1$ -fach ionisierten Atome pro Volumeneinheit

n_r = " " r -fach " " " "

n_e = Elektronendichte = Zahl der Elektronen " "

$U_{r+1} = 2\ell_{r+1}+1$ = statistisches Gewicht des Zustands $r+1$

$U_r = 2\ell_r+1$ = " " " " r

χ_r = Ionisationspotential des r -fach ionisierten Zustands

a) Ionisation des Wasserstoffs in der Sonne

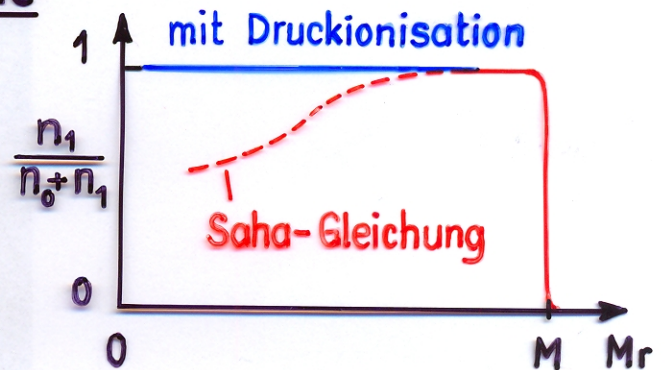
Wasserstoff : $\chi_0 = 13.54 \text{ eV}$

Sonne : Oberfläche : $T \approx 6000 \text{ K}$

$\rightarrow n_1/(n_0+n_1) \ll 1$

erwarten $n_1/(n_0+n_1) \approx 1$ für

$T \gtrsim 10'000 \text{ K}$



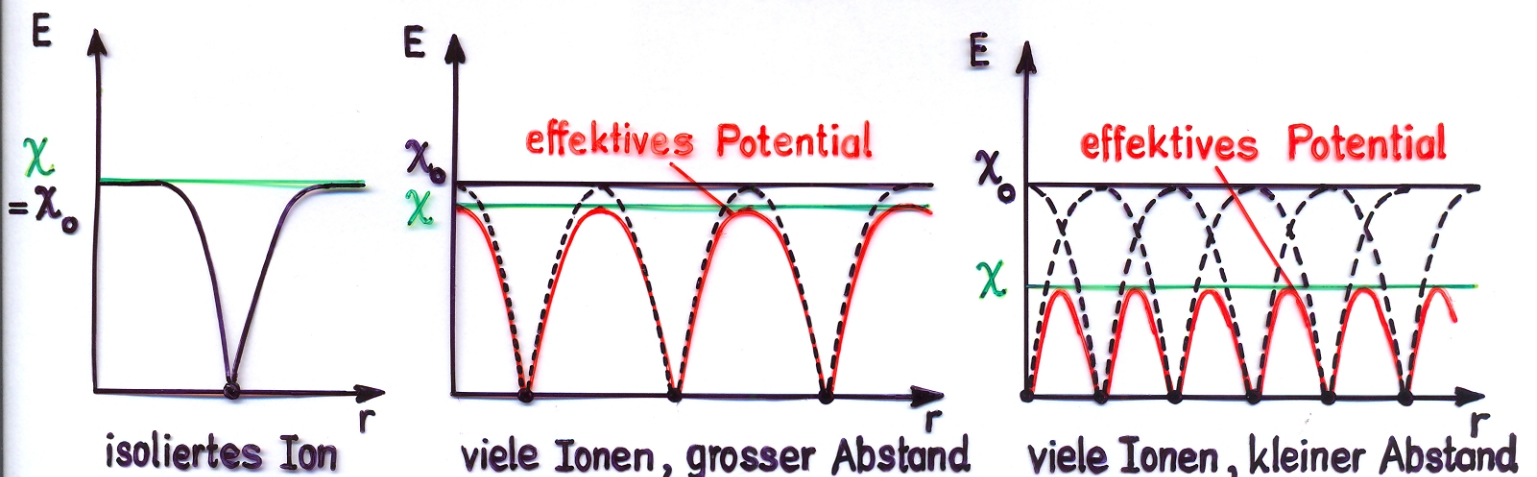
Inneres : $T \gtrsim 10^7 \text{ K}$, $kT \approx 1 \text{ keV} \rightarrow$ erwarten $n_1/(n_0+n_1) = 1$

aber: mit Saha-Gleichung : $n_1/(n_0+n_1) \approx 1/2 !!$

- Grund für das Versagen der Saha-Gleichung : 1) grosses n_e
2) Druckionisation

b) Druckionisation

Im Sterninneren : ρ sehr gross ($\rho_{C,\odot} \approx 10^2 \text{ gcm}^{-3}$) $\rightarrow$ geringe Atomabstände verändern das Ionisationspotential (Coulombabschirmung)



- mit Berücksichtigung der Druckionisation : vollständige Ionisation im Sterninneren (für H und He) $\rightarrow$ praktisch alle im Sterninneren vorkommenden Atome sind vollständig ionisiert

13.3 Das mittlere Molekulargewicht für vollständig ionisierte Gase

Def: mittl. Molekulargewicht für eine best. Teilchensorte = Zahl der Nukleonen pro freies Teilchen der betr. Sorte

Pro Masseneinheit : X_i Masseneinheiten der Teilchensorte i (mit Massenzahl A_i und der Ordnungszahl Z_i)

Zahl der Kerne i pro Masseneinheit $n_{k,i} = \frac{X_i}{A_i m_p}$, m_p = Protonenmasse

Zahl der Elektronen vom Element i pro Masseneinheit $n_{e,i} = \frac{X_i Z_i}{A_i m_p}$

Zahl der Teilchen pro Masseneinheit $n_{\text{tot}} = \sum_i (n_{k,i} + n_{e,i}) = \sum_i (1 + Z_i) \frac{X_i}{A_i m_p}$

Zahl der Nukleonen pro Masseneinheit $n_{\text{nuel.}} = \frac{1}{m_p}$

a) Molekulargewicht pro freies Teilchen μ : $\mu = \frac{n_{\text{nuel.}}}{n_{\text{tot}}} = \frac{1}{\sum_i (1 + Z_i) \frac{X_i}{A_i}}$

Sei $X_H = X$, $X_{He} = Y$, $1 - X - Y = Z = X_{\text{Rest}}$

Wasserstoff : $Z = 1$, $A = 1$
 Helium : $Z = 2$, $A = 4$
 Rest : $\langle \frac{Z+1}{A} \rangle \approx 1/2$

$$\mu \approx \frac{1}{2X + \frac{3Y}{4} + \frac{1Z}{2}} \approx \frac{2}{1 + 3X + Y/2}$$

b) Molekulargewicht pro freies Elektron μ_e : $\mu_e = \frac{n_{\text{nuel.}}}{n_e} = \frac{1}{\sum_i \frac{Z_i X_i}{A_i}}$

In X , Y und Z ausgedrückt :

$\mu_e \approx \frac{1}{X + Y/2 + Z/2} = \frac{2}{1 + X}$, wobei $\langle \frac{Z}{A} \rangle = \frac{1}{2}$ angenommen

c) Mittl. Molekulargewicht pro freies Ion μ_o : $\mu_o = \frac{n_{\text{nucl}}}{n_k} = \frac{1}{\sum_i \frac{X_i}{A_i}}$

d) Zusammenhang zwischen den verschiedenen Molekulargewichten

Nach Def: $\mu^{-1} = \mu_e^{-1} + \mu_o^{-1}$

13.4 Zustandsgleichung des idealen Gases mit Strahlung

$$P_G = \underbrace{\frac{Q}{\mu_o} gT}_{P_o} + \underbrace{\frac{Q}{\mu_e} gT}_{P_e} = \frac{Q}{\mu} gT \quad : \text{ tot. Gasdruck}$$

P_o : Ionendruck

P_e : Elektronendruck

► $\underline{\underline{P_{\text{tot}} = P_G + P_r = \frac{Q}{\mu} gT + \frac{a}{3} T^4}}$

14. Die Entartung des Elektronengases

Elektronen : Fermionen, Spin $1/2 \rightarrow$ Wegen Pauli-Verbot : Elektronengas bei geg. Temperatur kann nicht zu beliebig hohen Dichten wie ideales Gas behandelt werden.

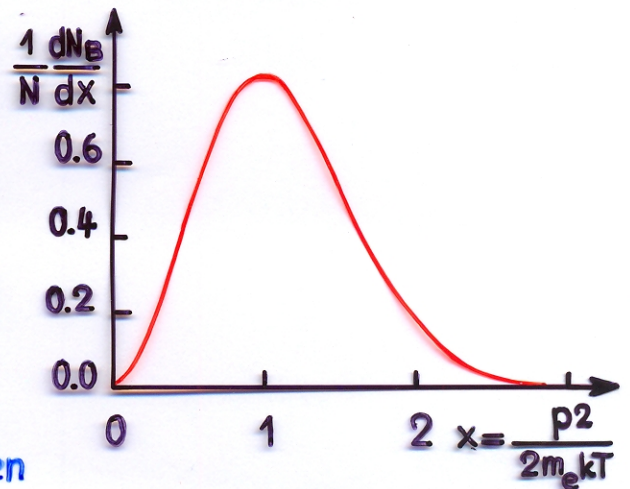
► für $\rho > \rho_{\text{krit}}(T)$ grosse Abweichungen vom idealen Gas $\rightarrow$ Entartung

14.1 Vergleich zwischen der Boltzmann- und der Fermi-Verteilung

Gegeben : N Elektronen in Volumen V $\rightarrow n_e = \frac{N}{V}$

Bei hinreichend kleinem n_e : ideales Gas, Impulsverteilung der Elektr. Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$dN_B(p, \dots, p+dp) = N \frac{4\pi p^2}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2m_e kT}} dp$$



► Gültigkeit der Maxwell-Boltzmann-Verteilung durch Pauli-Verbot eingeschränkt !

Pauli-Verbot : keine zwei identische Teilchen in Phasenraumvolumen h^3

$\rightarrow$ für Elektronen : höchstens 2 Elektronen mit entgegengesetztem Spin in Phasenraumvolumen h^3

$\rightarrow$ maximale Zahl der Elektronen in Volumen V und Impulsintervall $p, \dots, p+dp$

$$dN \leq dN_{\text{max}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{2 Elektr.} \\ \text{pro Zelle} \\ \text{mit } \uparrow\downarrow}} \underbrace{\frac{4\pi p^2 dp}{h^3}}_{\substack{= \text{Zahl} \\ \text{der Zellen}}} \underbrace{V}_{\substack{\text{räuml. Volumen}}} = \frac{8\pi p^2}{h^3} V dp$$

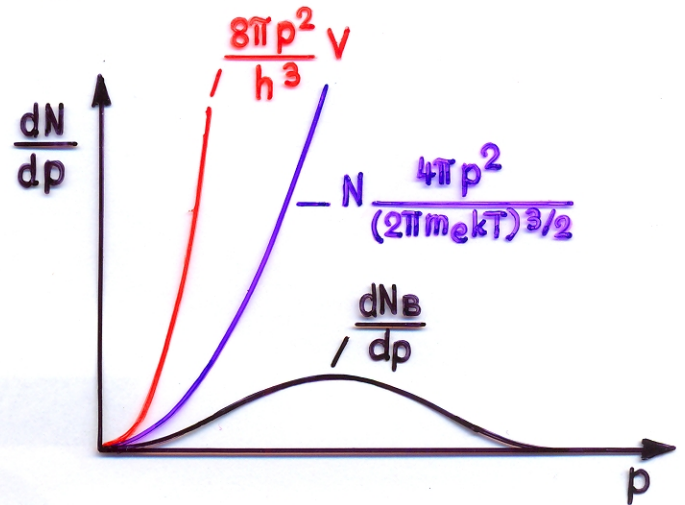
► $\frac{dN_{\text{max}}}{dp} \sim p^2$, wie bei der Boltzmann-Verteilung. Für kleine p, d.h. $p^2 \ll 2m_e kT$ muss daher gelten :

$$\frac{dN_B}{dp} = N \frac{4\pi p^2}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \leq \frac{dN_{\max}}{dp} = V \frac{8\pi p^2}{h^3}, \quad p^2 \ll 2m_e kT$$

Fallunterscheidung :

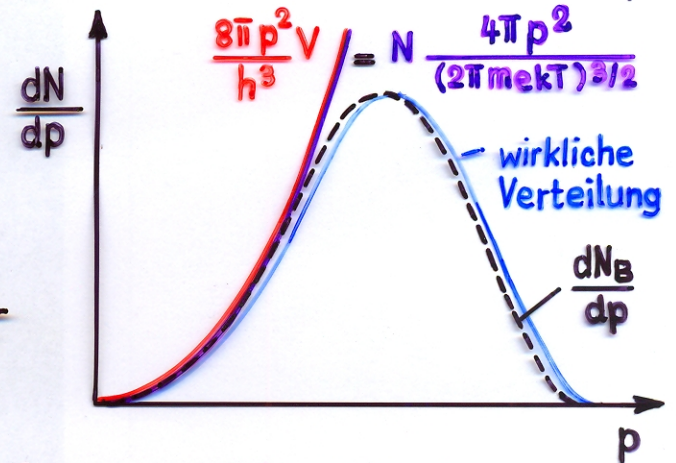
$$a) \quad N \frac{4\pi p^2}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} \ll V \frac{8\pi p^2}{h^3}$$

- $\exists$ viel mehr Phasenraumzellen als nötig
 → Elektronengas : ideales Gas mit Maxwell-Boltzmann-Verteilung



$$b) \quad N \frac{4\pi p^2}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} = V \frac{8\pi p^2}{h^3}$$

- bei kleinen Impulsen : alle Phasenraumzellen sind besetzt → Das Elektronengas ist partiell entartet



→ Bedingung für Grenze zwischen idealem Gas und starker Entartung

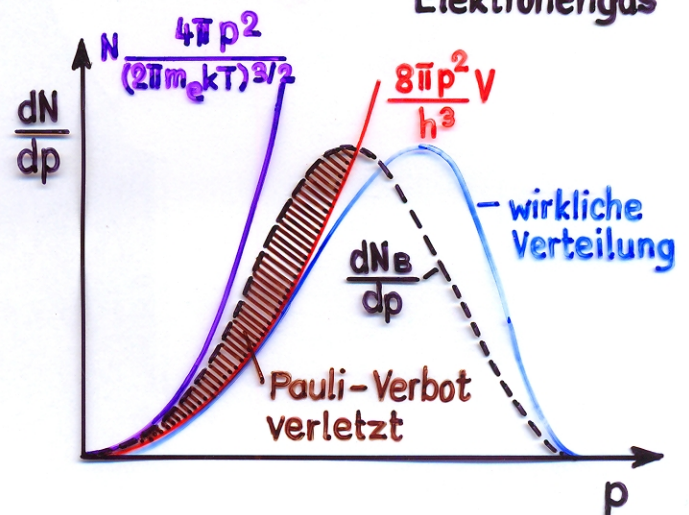
$$\frac{N}{V} = n_e = \frac{2(2\pi m_e k)^{3/2}}{h^3} T^{3/2} = n_e^*$$

$n_e \ll n_e^*$: ideales Gas
 $n_e > n_e^*$: entartetes Elektronengas

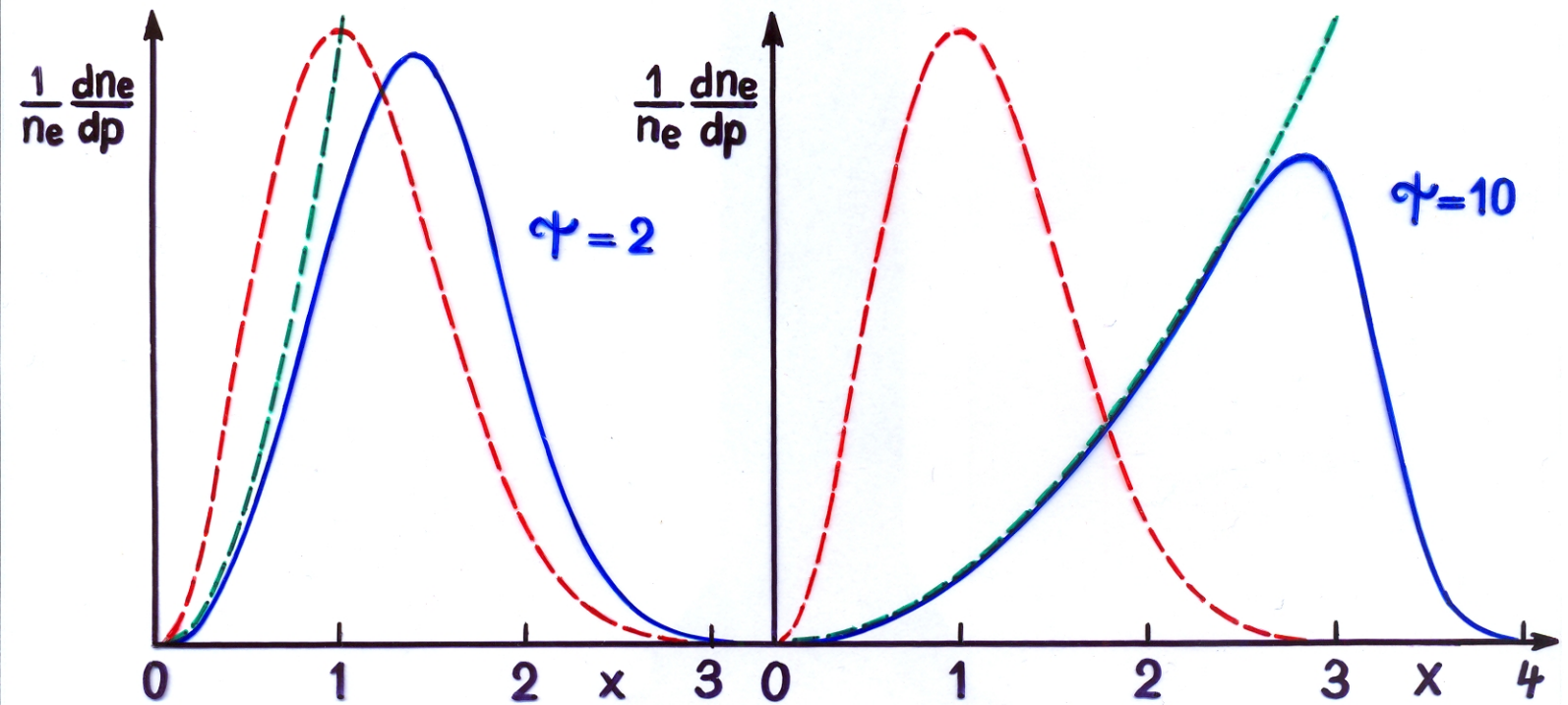
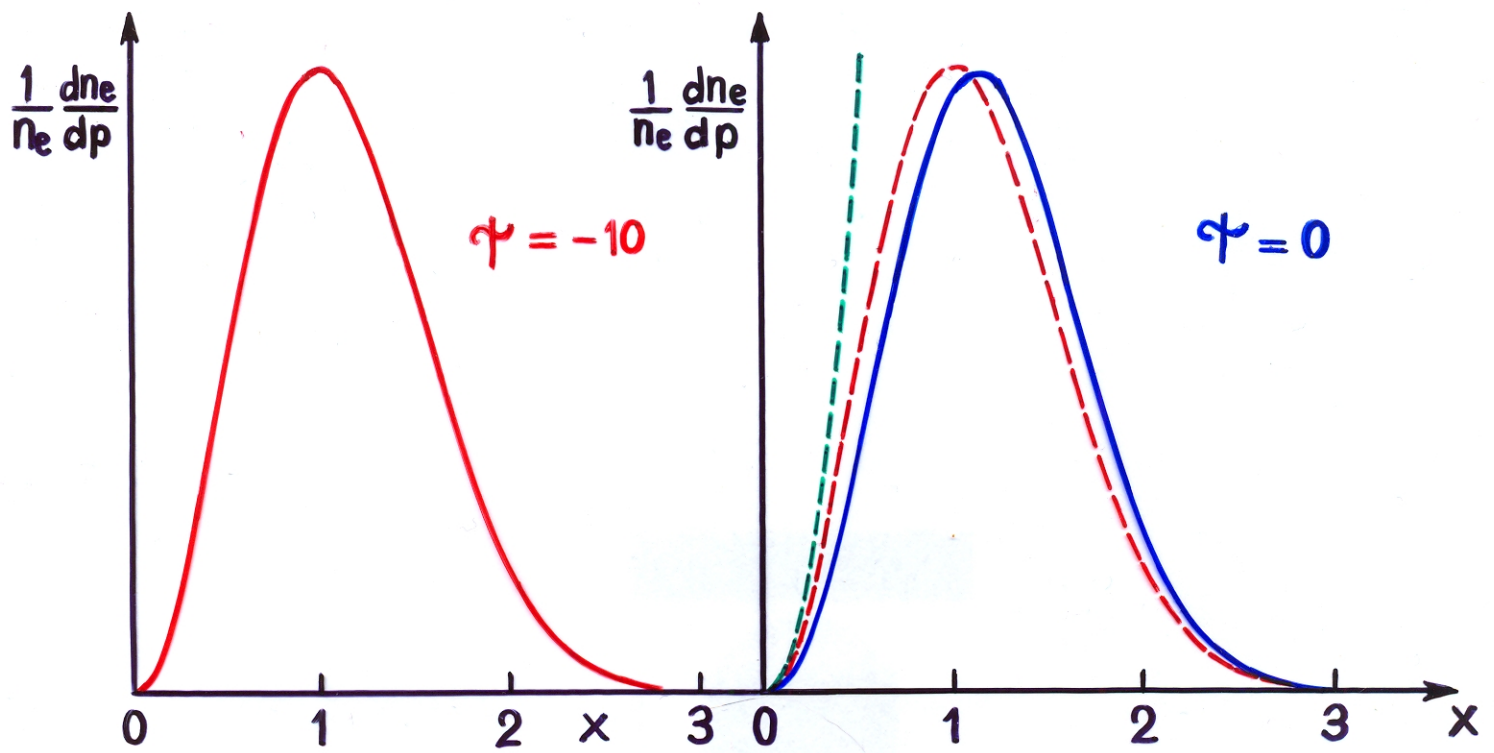
$$n_e^* = 4.83 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} K^{-3/2} T^{3/2}$$

$$c) \quad N \frac{4\pi p^2}{(2\pi m_e kT)^{3/2}} > V \frac{8\pi p^2}{h^3}$$

- Elektronengas ist stark entartet
 → Elektronen werden zu höheren Impulsen gezwungen als der Boltzmann-Verteilung entspricht



► Die wirkliche Impulsverteilung ist durch die Fermi-Verteilung gegeben



$$x = \frac{p}{(2mkT)^{1/2}}$$

— Maxwell-Boltzmann-Verteilung ($\phi = -\infty$)

— Fermi-Verteilung

— $\frac{1}{n_e} \sqrt{\frac{8\pi p^2}{h^3}} = \text{maximale Zahl von Phasenraumzuständen}$
 $= 2 \text{ mal max. Zahl von Phasenraumzellen}$

Fermi-Verteilung :

$$\underline{\underline{\frac{dN_F}{dp} = V \frac{8\pi p^2}{h^3} \frac{1}{1 + e^{-\varphi + \varepsilon/kT}}}}$$

Dabei ist

$V \frac{8\pi p^2}{h^3}$: maximale Zahl der Phasenraumzellen vom Volumen h^3 im Intervall $p, \dots, p+dp$

$[1 + e^{-\varphi + \varepsilon/kT}]^{-1}$: Auffüllfaktor = Wahrscheinlichkeit, dass eine Phasenraumzelle bei der Energie

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m_e} \quad \text{besetzt ist}$$

φ : Entartungsparameter (chemisches Potential)

14.2 Der Grenzfall schwacher Entartung

Schwache Entartung : Fermi-Verteilung $\rightarrow$ Boltzmann-Verteilung
 $\rightarrow \varphi \ll 0$

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \left\{ V \frac{8\pi p^2}{h^3} \frac{1}{1 + e^{-\varphi + \varepsilon/kT}} \right\} = V \frac{8\pi p^2}{h^3} e^{\varphi} e^{-\frac{p^2}{2m_e kT}}$$

Vergl. mit Boltzmann-Verteilung ergibt : $e^{\varphi} = \frac{N}{V} \frac{h^3}{2(2\pi m_e kT)^{3/2}}$

mit $n_e = \frac{N}{V}$ und $n_e \mu_{ep} = \varphi$ folgt :

$$\underline{\underline{e^{\varphi} = \frac{h^3}{2\mu_{ep} (2\pi m_e k)^{3/2}} \varphi T^{-3/2}}}$$

$$\rightarrow n_e^* = \frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} \triangleq \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = \ln\left(\frac{n_e}{n_e^*}\right) \quad , \quad \varphi < 0}}$$

Folgerungen :

a) Bedingungen für $\varphi = \text{const.}$

Aus $e^{\varphi} = \frac{h^3}{2\mu_{ep} (2\pi m_e k)^{3/2}} \varphi$ folgt $\underline{\underline{\varphi = \text{const.} \leftrightarrow \varphi T^{-3/2} = \text{const.}}}$

gilt auch für $\varphi > 0$

Bedingung für $\phi = \text{const.}$ bei beliebigem ϕ :

$$dN = V \frac{8\pi p^2}{h^3} \left\{ 1 + e^{-\phi + \epsilon/kT} \right\}^{-1} dp \rightarrow dn_e = \frac{dN}{V} = \frac{8\pi p^2}{h^3} \left\{ 1 + e^{-\phi + \epsilon/kT} \right\}^{-1} dp$$

$$\rightarrow n_e = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{1 + e^{-\phi + p^2/2m_e kT}} = \frac{8\pi}{h^3} (2m_e kT)^{3/2} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1 + e^{-\phi + x}} dx$$

$$\triangleright n_e = \frac{4\pi (2m_e kT)^{3/2}}{h^3} F_{1/2}(\phi), \text{ mit } F_n(\phi) = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{1 + e^{-\phi + x}}$$

$F_n(\phi)$: Fermi-Integral

Mit $\rho = n_e / \mu_e m_p$ folgt

$$\rho T^{-3/2} = \frac{4\pi \mu_e m_p (2m_e k)^{3/2}}{h^3} F_{1/2}(\phi) \rightarrow \rho T^{-3/2} = \text{const.} \Leftrightarrow \phi = \text{const.}$$

b) Erhöhung von ϕ : Erhöhung der Entartung, wenn $\rho \uparrow$ oder $T \downarrow$

Wichtig für astrophysikalische Anwendungen : $\frac{\partial \phi}{\partial \rho} > 0$ für beliebige T !

c) Entartung des Ionengases : (Protonengas, Neutronengas bei Neutronenstern)

Für Protonengas : $m_e \rightarrow m_p$, $\mu_e \rightarrow \mu_o$

$$\left. \begin{array}{l} \phi_e : \text{Entartungsparameter der Elektronen} \\ \phi_p : \text{ " der Protonen} \end{array} \right\} e^{\phi_p - \phi_e} = \frac{\mu_e}{\mu_o} \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^{3/2} \approx 10^{-5}$$

$\triangleright$ auch bei hochgradiger Entartung des Elektronengases ist das Ionengas noch nicht entartet und praktisch ein ideales Gas

Ionengas = ideales Gas : praktisch immer verwendete Arbeitshypothese

d) Beispiel: Die Sonne : $e^{\phi} = 10^{7.6} \rho T^{-3/2}$ (cgs) für schwache Entartung

$$\text{Sonnenzentrum} : \rho_c \approx 10^2 \text{ g cm}^{-3}, T_c \approx 10^7 \text{ K}, \rightarrow e^{\phi} \approx 10^{-0.9} \Leftrightarrow \phi \approx -2$$

nur schwache Entartung des Elektronengases

14.3 Der Druck des Elektronengases bei schwacher und mässiger Entartung

Druck = Impulsfluss pro Flächen- und Zeiteinheit

$$P_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty \vec{p} \vec{v} \frac{dN}{V} = \frac{1}{3} \int_0^\infty \vec{p} \vec{v} \frac{dn_e}{dp} dp \quad \text{mit} \quad \frac{dn_e}{dp} = \frac{8\pi p^2}{h^3} \left\{ 1 + e^{\psi + p^2/2m_e kT} \right\}^{-1}$$

nicht-relativistisch ($v \ll c$) : $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m_e}$

$$\rightarrow P_e = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int_0^\infty \frac{p^4}{1 + e^{\psi + p^2/2m_e kT}} dp = \frac{4\pi}{3h^3 m_e} (2m_e kT)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{1 + e^{\psi + x}} dx$$

$$\rightarrow \underline{P_e = \frac{8\pi kT}{3h^3} (2m_e kT)^{3/2} F_{3/2}(\psi)}$$

Elektronendruck bei nicht-relativistischer Entartung

Da $n_e = \frac{4\pi}{h^3} (2m_e kT)^{3/2} F_{1/2}(\psi)$ folgt :

$$\rightarrow \underline{P_e = n_e kT \left(\frac{2}{3} \frac{F_{3/2}(\psi)}{F_{1/2}(\psi)} \right)}$$

Durch Reihenentwicklung von $F_{1/2}(\psi)$ und $F_{3/2}(\psi)$ für $\psi < 0$ folgt

$$\underline{P_e = n_e kT \left\{ 1 + \frac{n_e h^3}{2^{3/2} (2\pi m_e kT)^{3/2}} + \dots \right\}}, \quad \psi < 0$$

14.4 Vollständige Entartung

Vollständige Entartung $\Leftrightarrow \psi = +\infty$ (für praktische Zwecke : $\psi \gg 1$)

Def: ϵ_F, p_F : $\psi = \frac{\epsilon_F}{kT} = \frac{p_F^2}{2m_e kT}$, ϵ_F = Fermi-Energie
 p_F = Fermi-Impuls

Diskussion des Auffüllfaktors $f(\psi) = \left\{ 1 + e^{\psi(\epsilon/\epsilon_F - 1)} \right\}^{-1}$

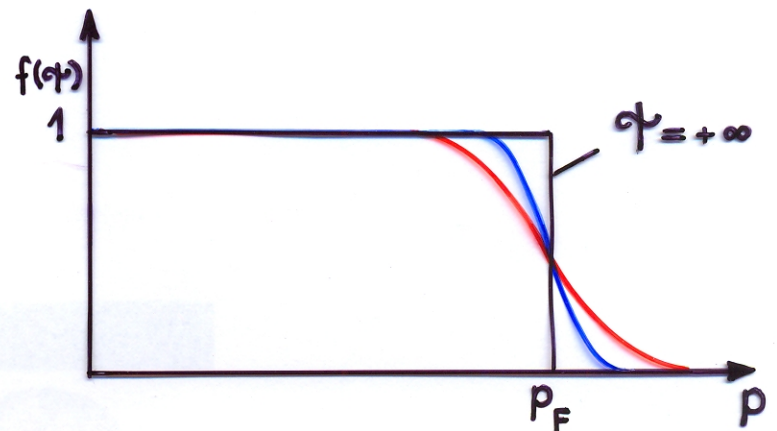
Da nach Vor. $\psi \gg 1$, ist $\begin{cases} \psi(\epsilon/\epsilon_F - 1) \text{ stark negativ für } \epsilon < \epsilon_F \\ \psi(\epsilon/\epsilon_F - 1) \text{ stark positiv für } \epsilon > \epsilon_F \end{cases}$

$$\rightarrow \gamma\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_F} - 1\right) \begin{cases} \ll 0, & \text{wenn } \epsilon < \epsilon_F \\ = 0, & \text{wenn } \epsilon = \epsilon_F \\ \gg 0, & \text{wenn } \epsilon > \epsilon_F \end{cases} \Rightarrow f(\gamma) = \begin{cases} 1, & \epsilon < \epsilon_F \\ 1/2, & \epsilon = \epsilon_F \\ 0, & \epsilon > \epsilon_F \end{cases}$$

$$\text{Da } f(\gamma) = \left\{ 1 + e^{(p^2 - p_F^2)/2m_e kT} \right\}^{-1}$$

→ Abfall von $f(\gamma)$ bei $\epsilon = \epsilon_F$ von 1 nach 0 über charakteristische Breite

$$\Delta\epsilon \approx kT$$

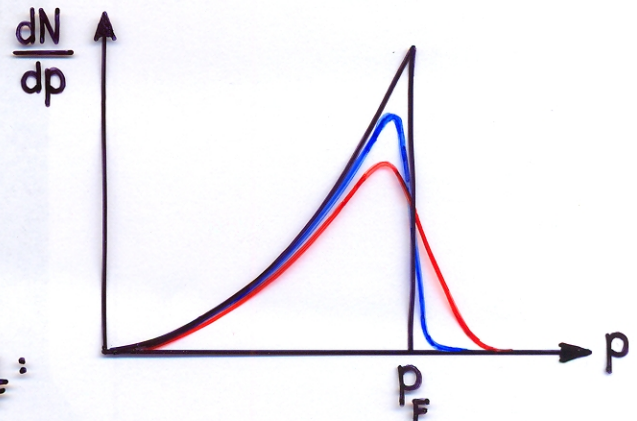


Zahl der Quantenzustände bzw. der Elektronen im Impulsintervall $p, \dots, p+dp$

$$\frac{dN}{dp} = V \frac{8\pi p^2}{h^3} \frac{1}{1 + e^{(p^2 - p_F^2)/2m_e kT}} = \text{Zahl der vorhandenen Zustände mal Besetzungswahrscheinlichkeit}$$

→ Für $\gamma = +\infty$

$$\frac{dN}{dp} = \begin{cases} V \frac{8\pi p^2}{h^3}, & p < p_F \\ 0, & p > p_F \end{cases}$$



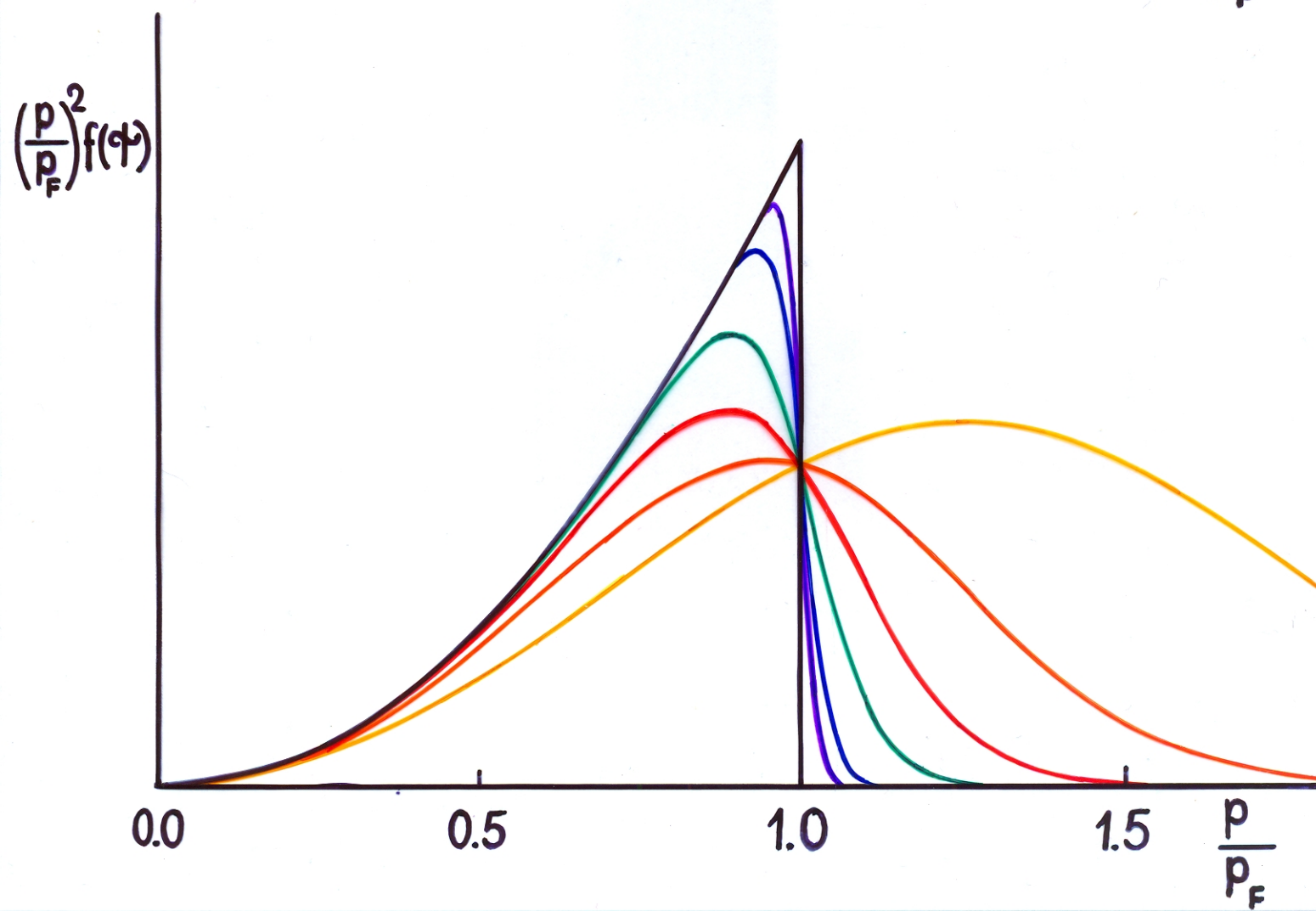
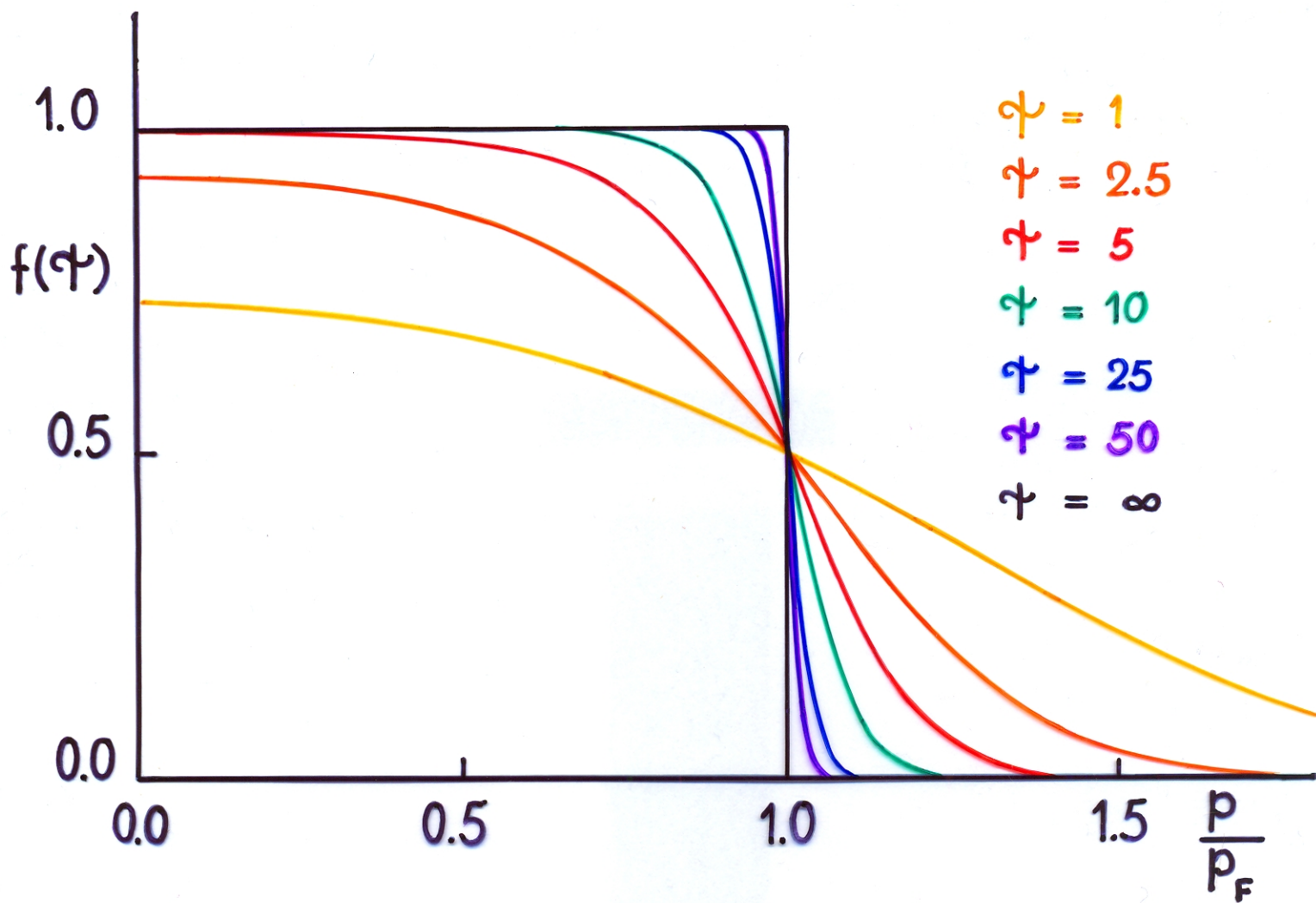
→ Zahl der Elektronen als Funktion von p_F :

$$N = \int_0^\infty \frac{dN}{dp} dp = V \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \underline{\underline{V \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3}}$$

Mit $\varrho = \frac{N}{V} / \mu_e m_p$ folgt:

$$\blacktriangleright \underline{\underline{\varrho = \frac{8\pi}{3h^3} \mu_e m_p p_F^3}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{p_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi m_p} \right)^{1/3} \left(\frac{\varrho}{\mu_e} \right)^{1/3}}}$$

▶ Mit zunehmender Dichte ϱ erhöht sich auch p_F . → Allein durch hinreichend grosses ϱ können die Elektronen relativistisch werden (wenn $p_F \gtrsim m_e c$)



14.5 Druck des Elektronengases bei vollständiger nicht-relat. Entartung

Für beliebige ϕ gilt: $P_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty \vec{p} \vec{v} \frac{dN}{V} = \frac{1}{3} \int_0^\infty \vec{p} \vec{v} \frac{dn_e}{dp} dp$

Mit $\phi = +\infty$, $p_F \ll m_e c$: $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m_e}$, $\frac{dn_e}{dp} = \frac{8\pi p^2}{h^3}$, $p < p_F$

$\rightarrow P_e = \frac{8\pi}{3m_e h^3} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{8\pi}{15m_e h^3} p_F^5$; verwenden $p_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi m_p}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{1/3}$

$P_e = \frac{h^2}{5m_e m_p} \left(\frac{3}{8\pi m_p}\right)^{2/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$: Druck eines vollständig, nicht-relativistisch entarteten Elektronengases

Alle Konstanten eingesetzt ergibt

$P_e = 10^{13.0} \text{ dyn cm}^{-2} \left(\frac{\rho(\text{g})}{\mu_e}\right)^{5/3}$

Verhältnis von Elektronendruck zu Ionendruck (Abschätzung)

$$\left. \begin{aligned} P_e &= n_e kT \left\{ \frac{2}{3} \frac{F_{3/2}(\phi)}{F_{1/2}(\phi)} \right\} = \frac{\rho}{\mu_e m_p} kT \left\{ \frac{2}{3} \frac{F_{3/2}(\phi)}{F_{1/2}(\phi)} \right\} \\ P_i &= n_i kT = \frac{\rho}{\mu_0 m_p} kT \end{aligned} \right\} \frac{P_e}{P_i} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{\mu_e} \frac{F_{3/2}(\phi)}{F_{1/2}(\phi)}$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} F_n(\phi) = \lim_{\phi \rightarrow \infty} \int_0^\infty x^n [1 + e^{-\phi+x}]^{-1} dx \approx \int_0^\phi x^n dx = \frac{\phi^{n+1}}{n+1}$$

$\frac{P_e}{P_i} = \frac{2}{5} \frac{\mu_0}{\mu_e} \phi$ für $\phi \gg 1$ $\rightarrow P_e \gg P_i$ wenn $\phi \gg 1$

Bei hinreichend starker Entartung ist P_i gegen P_e vernachlässigbar, so dass

$P_{\text{tot}} = P_e = \frac{h^2}{5m_e m_p} \left(\frac{3}{8\pi m_p}\right)^{2/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3}$

N.B. Zustandsgleichung unabhängig von T !

14.6 Druck eines relativistisch entarteten Elektronengases

Wenn $p_F \gtrsim m_e c$:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\vec{p}}{m_e} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{\vec{p}}{m_e} \left(\frac{m_e^2 c^2}{m_e^2 c^2 + p^2}\right)^{1/2}$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{3} \int_0^{p_F} \vec{p} \vec{v} \frac{dN}{dp} \frac{dp}{V} = \frac{8\pi}{3m_e h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4}{(1 + p^2/m_e^2 c^2)^{1/2}} dp$$

Setzen $\eta = \frac{p}{m_e c}$ und $\xi = \frac{p_F}{m_e c}$

$$\underline{\underline{P_e = \frac{8\pi}{3m_e h^3} (m_e c)^5 \int_0^\xi \frac{\eta^4 d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} = \frac{\pi}{3m_e h^3} (m_e c)^5 f(\xi)}}$$

mit $\underline{\underline{f(\xi) = 8 \int_0^\xi \frac{\eta^4 d\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} = \xi(2\xi^2 - 3)(1+\xi^2)^{1/2} + 3 \operatorname{arsh} \xi}}$

Asymptotisches Verhalten :

a) Extrem relativistische Entartung : $\xi \rightarrow \infty$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) = 2\xi^4 - 2\xi^2 + \dots \approx 2\xi^4$$

$$\rightarrow \lim_{\xi \rightarrow \infty} P_e = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \cdot 2\xi^4 = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4 \quad ; \quad \text{mit } p_F = \left(\frac{3h^3}{8\pi m_p}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{1/3}$$

$$\underline{\underline{\lim_{p_F \gg m_e c} P_e = \frac{2\pi c}{3h^3} \left(\frac{3h^3}{8\pi m_p}\right)^{4/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3} = \frac{c}{4m_p} \left(\frac{3h^3}{8\pi m_p}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}}}$$

Da auch hier $P_e \gg P_i$ ist, ist

$$\underline{\underline{P_{\text{tot}} = P_e = \frac{c}{4m_p} \left(\frac{3h^3}{8\pi m_p}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}}}$$

bei extrem relativistischer Entartung

► N.B. Zustandsgleichung unabhängig von T
P steigt nur noch mit $\rho^{4/3}$

b) Nicht-relativistische Entartung : $\xi \rightarrow 0$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = \frac{8}{5} \xi^5 - \frac{4}{7} \xi^7 + \dots \approx \frac{8}{5} \xi^5$$

$$\rightarrow \lim_{p_F \ll m_e c} P_e = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3 h^3} \frac{8}{5} \left(\frac{p_F}{m_e c} \right)^5 = \frac{8\pi}{15 m_e h^3} p_F^5 \quad : \text{ gleiches Ergebnis wie bei 14.5}$$

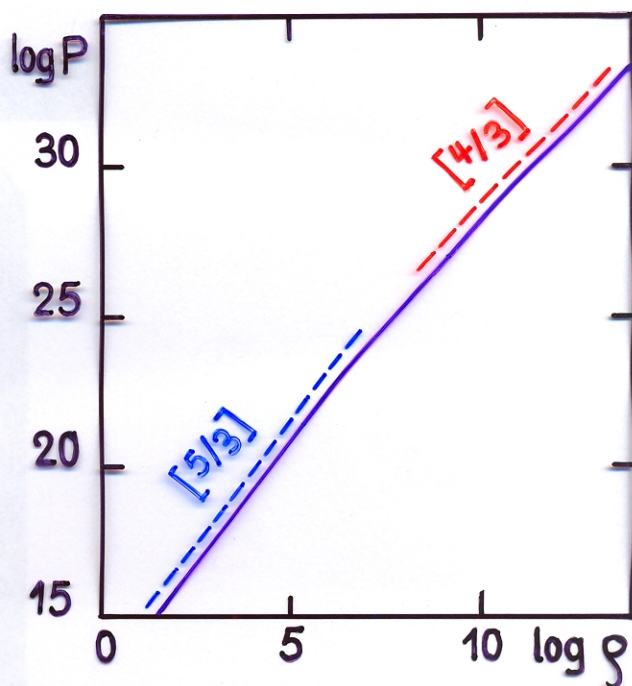
14.7 Zusammenfassung

Zustandsgleichung für das vollständig entartete Elektronengas

$$P = \frac{h^2}{5 m_e m_p} \left(\frac{3}{8\pi m_p} \right)^{2/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}, \quad p_F \ll m_e c$$

$$P = \frac{c}{4 m_p} \left(\frac{3 h^3}{8\pi m_p} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}, \quad p_F \gg m_e c$$

Zustandsgleichung unabhängig von T



Das $\log \rho - \log T$ - Diagramm

1, 7, 8 : ideales Gas,

Strahlung dominiert in 8

3, 4, 5 : Entartung,

- nicht-relativistisch in 3
- part. relativistisch in 4
- extrem relativist. in 5

2, 6, 9 : partielle Entartung

- nicht relativistisch in 2
- extrem relativistisch in 6
- partiell relativistisch in 9

