12 Lösung und Lösungen des Systems der Grundgleichungen

12.1 Die Fit-Methode

Bis ca. 1962 einzige Methode zur Berechnung realistischer Sternmodelle

Sternaufbauproblem : Randwertproblem

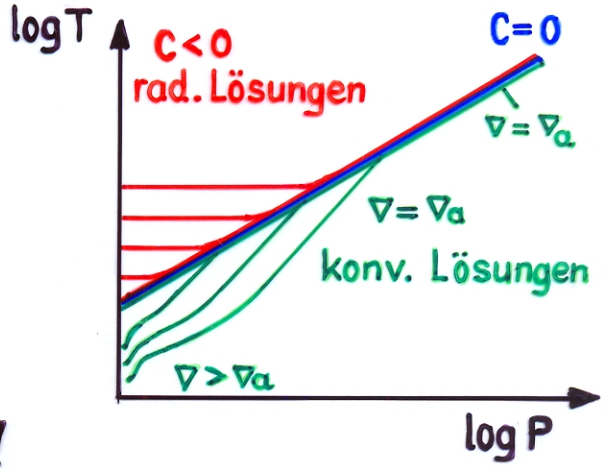
2 Randwerte bei $M_r = M$ (bzw. $M_r = M_F$)
2 Randwerte bei $M_r = 0$

→ grösste Schwierigkeiten für die Fit-Methode

a) Integration der Grundgleichungen vom Zentrum nach aussen

Von den Zentralwerten $P_c = P(0)$, $T_c = T(0)$, $r_c = r(0)$ und $L_c = L(0)$ sind nur zwei durch die Randbedingungen festgelegt :

$$r_c = 0 \quad \text{und} \quad L_c = 0$$



→ Versuchswerte für P_c und T_c

! Lösungen divergieren nach aussen sehr stark !

→ grosse Schwierigkeiten, die äusseren Randbedingungen zu erfüllen (numerische Zufälligkeiten werden störend , da z.B. $P^2 \sim T^{8.5}$)

b) Integration von aussen zum Zentrum

Wieder nur 2 Randwerte bzw. Randbedingungen gegeben . → Braucht 2 Versuchswerte für 2 der 4 Randwerte , z.B. für P und R

→ Integration durch die Aussenschichten relativ problemlos , da Lösungen nach innen konvergieren . Die Lösungen divergieren jedoch in der Nähe des Zentrums , da $\partial P/\partial M_r \sim r^{-4}$.

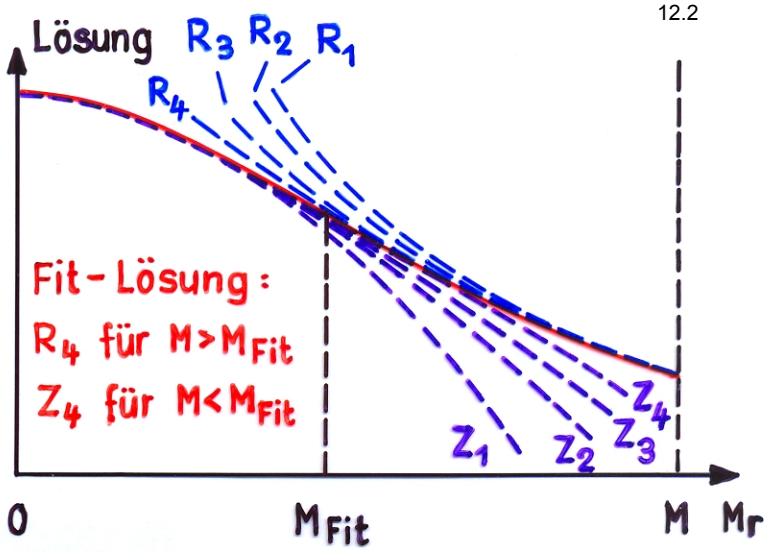
→ grosse Schwierigkeiten, die inneren Randbedingungen zu erfüllen (i.a. $r(M_r=0) > 0$, d.h. ein Loch oder $M_r(r=0) > 0$, d.h. $\rho_c = \infty$)

▶ Da Lösungen in der Nähe der Ränder divergieren → Integration von beiden Rändern aus und Anpassung der Lösungen im Zwischenbereich

c) Die Fit-Methode

Integration vom Zentrum nach aussen mit Versuchswerten für P_c und T_c

Integration von aussen zum Zentrum mit Versuchswerten für $P(M)$ und $R(M)$



Versuch, durch Variation der Versuchswerte die Lösungen in einem günstigen M_r-Bereich anzugleichen.

d) Schwierigkeiten der Fit-Methode

- zeitraubendes Verfahren, sofern es überhaupt funktioniert
- hat 4 freie Parameter (Versuchswerte) → Muss Lösungen in einer 4-dim. Mannigfaltigkeit suchen
- die Methode versagt schon bei relativ harmlosen Modellen, z.B. mit Schalenquellen (ε_g !)

▶ Mit der Fit-Methode konnte man die Entwicklung zum He-Brennen schon nicht mehr rechnen

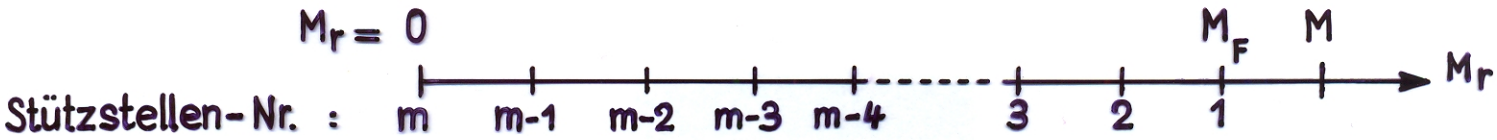
12.2 Die Henyey-Methode

- ca. 1962 von L. Henyey eingeführt
- implizites (iteratives) Verfahren, auf dem Newton-Raphson-Verfahren beruhend
- Heute die am weitesten verbreitete Methode zur Berechnung des Sternaufbaus

Die Henyey - Methode

a) Diskretisierung : Übergang von Differentialgleichungen zu Differenzengleichungen

Einteilung des Sterns, d.h. des Intervalls $[0 \leq M_r \leq M]$ in m Massenschalen



Übergang zu Differenzengleichungen :

$$\frac{d\xi}{dM_r} \longrightarrow \frac{\xi_{i+1} - \xi_i}{M_{i+1} - M_i} \quad , \quad \text{wobei } \xi : P, T, r, L_r$$

$$\eta \longrightarrow \frac{1}{2}(\eta_{i+1} + \eta_i) = \eta_{i+1/2} \quad , \quad \text{wobei } \eta \text{ jede in der Gl. vorkommende Grösse ist.}$$

Beispiel : 1. Grundgleichung

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \varrho} \longrightarrow \frac{r_{i+1} - r_i}{M_{i+1} - M_i} = \frac{1}{4\pi r^2_{i+1/2} \varrho_{i+1/2}}$$

Umschreibung der Differenzengleichungen in die Form

$$G^i_j = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, 4 \quad ; \quad \text{für das Masseninterval } [M_i, M_{i+1}], \; i = 1, \dots, m-2$$

Beispiel : $$G^i_1 = \frac{r_{i+1} - r_i}{M_{i+1} - M_i} - \frac{1}{4\pi r^2_{i+1/2} \varrho_{i+1/2}} = 0$$

▶ System von Gleichungen $G^i_j = 0$, $j = 1, \dots, 4$, $i = 1, \dots, m-2$.
Für jedes i $\exists$ 4 Gleichungen für 8 Variable P_i , P_{i+1} , T_i , T_{i+1} , r_i , r_{i+1} , L_i , L_{i+1} an den Stellen M_i und M_{i+1} .

Randbedingungen an den Stellen $i=1$ und $i=m-1$

Äussere Randbedingungen:

$$R_1 = a_1 L_1 + a_2 r_1 + a_3 - P_1 = 0$$
$$R_2 = b_1 L_1 + b_2 r_1 + b_3 - T_1 = 0$$

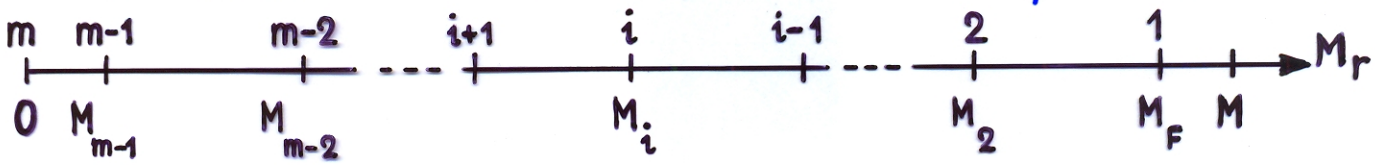
Innere Randbedingungen:

$$Z_1 = \frac{4\pi}{3} r_{m-1}^3 \varrho_{m-1} - M_{m-1} = 0$$

$$Z_2 = L_{m-1} - (\varepsilon_N - \varepsilon_\nu + \varepsilon_g)_{m-1} M_{m-1} = 0$$

▶ Damit hat man folgende Gleichungen:

	$G_1^{m-2}=0$	$G_1^i=0$	$G_1^1=0$	
	$G_2^{m-2}=0$	$G_2^i=0$	$G_2^1=0$	
$Z_1=0$	$G_3^{m-2}=0$	$G_3^i=0$	$G_3^1=0$	$R_1=0$
$Z_2=0$	$G_4^{m-2}=0$	$G_4^i=0$	$G_4^1=0$	$R_2=0$



Total: m Stützstellen

$4(m-2)$ Differenzengleichungen vom Typ $G_j^i=0$

4 Randbedingungen

$= \underline{4(m-1) \text{ Gleichungen}}$

für die <u>$4(m-1)$ Unbekannten</u> P_j, T_j, r_j, L_j, $j=1,\dots,m-1$

Umbenennung und Umnummerierung

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
R_1, & R_2, & G_1^1, & G_2^1, & G_3^1, & G_4^1, & \ldots, & G_1^i, & G_2^i, & G_3^i, & G_4^i, & \ldots, & G_3^{m-2}, & G_4^{m-2}, & Z_1, & Z_2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
A_1, & A_2, & A_3, & A_4, & A_5, & A_6, & \ldots, & & & A_k & & \ldots, & A_{n-3}, & A_{n-2}, & A_{n-1}, & A_n
\end{array}$$

▶ $\underline{A_k = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, n = 4(m-1)}$

mit $\quad i = \left[\frac{k+1}{4}\right] \quad , \; 3 \leq k \leq n-2 \quad$, und $\; j = (k-2) \bmod 4$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
P_1, & r_1, & T_1, & L_1, & P_2, & T_2, & r_2, & L_2, & \ldots, & P_l, & T_l, & r_l, & L_l, & \ldots, & r_{m-1}, & L_{m-1} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & & & \downarrow & \downarrow \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7, & x_8, & \ldots, & & x_k & & & \ldots, & x_{n-1}, & x_n
\end{array}$$

▶ $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

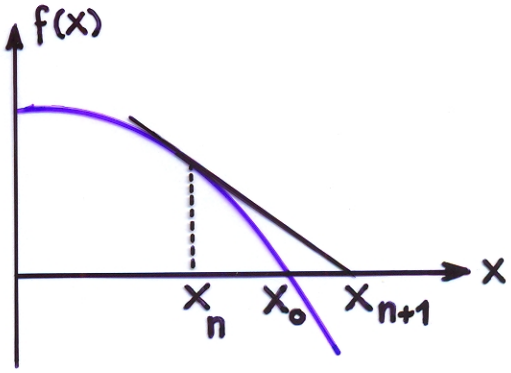
mit $\quad l = \left[\frac{k+3}{4}\right] \quad$ und $\quad j = (k) \bmod 4$

$j=1 \mathrel{\hat{=}} P \; , \; j=2 \mathrel{\hat{=}} T, \; j=3 \mathrel{\hat{=}} r, \; j=4 \mathrel{\hat{=}} L$

▶ $\underline{\underline{A_k(\vec{x}) = 0 \quad , \quad k = 1, \ldots, 4(m-1)}}$

b) Lösung des Systems der Differenzengleichungen

Lösung durch Newtonsches Verfahren



Beispiel : 1-dim. Fall : $f(x_o) = 0$

$$f(x_o) = 0 = f(x_n + (x_o - x_n))$$
$$\approx f(x_n) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_n} (x_o - x_n)$$

▶ verbesserte Näherung für x_o :

$$\underline{\underline{x_o = x_n + (x_o - x_n) \approx x_n - \frac{f(x_n)}{(df/dx)_{x_n}} = x_{n+1}}}$$

Allgemeiner Fall: $A_k(\vec{x}_0) = 0 \quad , \quad k = 1, \dots, n$

Sei $\vec{x}_*$ eine Näherung für $\vec{x}_0$.

▶ Taylor-Entwicklung: $A_k(\vec{x}_0) = A_k(\vec{x}_* + (\vec{x}_0 - \vec{x}_*))$

$$\approx A_k(\vec{x}_*) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial x_l}\Big|_{\vec{x}_*} (x_{l_0} - x_{l*})$$

▶ $\exists$ Matrix $H_{k,l} = \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)_{\vec{x}_*} \quad , \quad k = 1, \dots, n \quad ; \quad l = 1, \dots, n$

▶ verbesserte Näherung: $\vec{x}_0 = \vec{x}_* + (\vec{x}_0 - \vec{x}_*) \approx \vec{x}_* + \vec{\delta x}$,

wobei $\underline{\underline{H\,\vec{\delta x} = -\vec{A}_*}}$ lin. Gleichungssystem

mit $\vec{A}_* = \begin{pmatrix} A_1(\vec{x}_*) \\ \vdots \\ A_n(\vec{x}_*) \end{pmatrix}$, $\underline{H = (H_{kl}) \ : \text{Henyey-Matrix}}$

Eigenschaften von H:

Die meisten Elemente von H verschwinden! Es ist

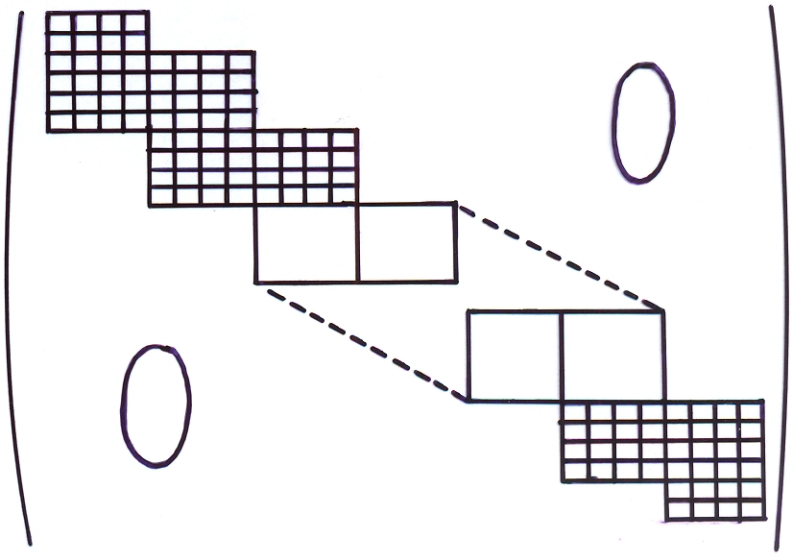
$H_{k,l} = \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_l}\right)_{\vec{x}_*} \neq 0$ nur für $4i-3 \leq l \leq 4(i+1)$ mit $i = \left[\frac{k+1}{4}\right]$
und $3 \leq k \leq n-2$,

sowie für $k = 1, 2$; $l = 1, \dots, 4$
und $k = n-1, n$; $l = n-3, \dots, n$

$H_{k,l} = 0$ sonst

▶ **H hat Blockstruktur**

$H =$



$$
\underbrace{\begin{pmatrix}
\frac{\partial R_1}{\partial P_1} & \frac{\partial R_1}{\partial T_1} & \frac{\partial R_1}{\partial r_1} & \frac{\partial R_1}{\partial L_1} & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\
\frac{\partial R_2}{\partial P_1} & \frac{\partial R_2}{\partial T_1} & \frac{\partial R_2}{\partial r_1} & \frac{\partial R_2}{\partial L_1} & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\
\frac{\partial G_1^1}{\partial P_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial T_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial r_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial L_1} & \frac{\partial G_1^1}{\partial P_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial T_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial r_2} & \frac{\partial G_1^1}{\partial L_2} & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\
\frac{\partial G_2^1}{\partial P_1} & \frac{\partial G_2^1}{\partial T_1} & \frac{\partial G_2^1}{\partial r_1} & \frac{\partial G_2^1}{\partial L_1} & \frac{\partial G_2^1}{\partial P_2} & \frac{\partial G_2^1}{\partial T_2} & \frac{\partial G_2^1}{\partial r_2} & \frac{\partial G_2^1}{\partial L_2} & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\
\frac{\partial G_3^1}{\partial P_1} & \frac{\partial G_3^1}{\partial T_1} & \frac{\partial G_3^1}{\partial r_1} & \frac{\partial G_3^1}{\partial L_1} & \frac{\partial G_3^1}{\partial P_2} & \frac{\partial G_3^1}{\partial T_2} & \frac{\partial G_3^1}{\partial r_2} & \frac{\partial G_3^1}{\partial L_2} & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\
\frac{\partial G_4^1}{\partial P_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial T_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial r_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial L_1} & \frac{\partial G_4^1}{\partial P_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial T_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial r_2} & \frac{\partial G_4^1}{\partial L_2} & 0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\
0 & - & - & 0 & \frac{\partial G_1^2}{\partial P_2} & \frac{\partial G_1^2}{\partial T_2} & \frac{\partial G_1^2}{\partial r_2} & \frac{\partial G_1^2}{\partial L_2} & \frac{\partial G_1^2}{\partial P_3} & \frac{\partial G_1^2}{\partial T_3} & \frac{\partial G_1^2}{\partial r_3} & \frac{\partial G_1^2}{\partial L_3} & 0 & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\
0 & - & - & 0 & \frac{\partial G_2^2}{\partial P_2} & \frac{\partial G_2^2}{\partial T_2} & \frac{\partial G_2^2}{\partial r_2} & \frac{\partial G_2^2}{\partial L_2} & \frac{\partial G_2^2}{\partial P_3} & \frac{\partial G_2^2}{\partial T_3} & \frac{\partial G_2^2}{\partial r_3} & \frac{\partial G_2^2}{\partial L_3} & 0 & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\
0 & - & - & 0 & \frac{\partial G_3^2}{\partial P_2} & \frac{\partial G_3^2}{\partial T_2} & \frac{\partial G_3^2}{\partial r_2} & \frac{\partial G_3^2}{\partial L_2} & \frac{\partial G_3^2}{\partial P_3} & \frac{\partial G_3^2}{\partial T_3} & \frac{\partial G_3^2}{\partial r_3} & \frac{\partial G_3^2}{\partial L_3} & 0 & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\
0 & - & - & 0 & \frac{\partial G_4^2}{\partial P_2} & \frac{\partial G_4^2}{\partial T_2} & \frac{\partial G_4^2}{\partial r_2} & \frac{\partial G_4^2}{\partial L_2} & \frac{\partial G_4^2}{\partial P_3} & \frac{\partial G_4^2}{\partial T_3} & \frac{\partial G_4^2}{\partial r_3} & \frac{\partial G_4^2}{\partial L_3} & 0 & - & - & - & - & - & - & - & 0 \\
0 & - & - & - & - & - & - & 0 & \frac{\partial G_1^3}{\partial P_3} & \frac{\partial G_1^3}{\partial T_3} & \frac{\partial G_1^3}{\partial r_3} & \frac{\partial G_1^3}{\partial L_3} & \frac{\partial G_4^{m-3}}{\partial P_{m-2}} & \frac{\partial G_4^{m-3}}{\partial T_{m-2}} & \frac{\partial G_4^{m-3}}{\partial r_{m-2}} & \frac{\partial G_4^{m-3}}{\partial L_{m-2}} & 0 & - & - & 0 \\
0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \frac{\partial G_1^{m-2}}{\partial P_{m-2}} & \frac{\partial G_1^{m-2}}{\partial T_{m-2}} & \frac{\partial G_1^{m-2}}{\partial r_{m-2}} & \frac{\partial G_1^{m-2}}{\partial L_{m-2}} & \frac{\partial G_1^{m-2}}{\partial P_{m-1}} & \frac{\partial G_1^{m-2}}{\partial T_{m-1}} & \frac{\partial G_1^{m-2}}{\partial r_{m-1}} & \frac{\partial G_1^{m-2}}{\partial L_{m-1}} \\
0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \frac{\partial G_2^{m-2}}{\partial P_{m-2}} & \frac{\partial G_2^{m-2}}{\partial T_{m-2}} & \frac{\partial G_2^{m-2}}{\partial r_{m-2}} & \frac{\partial G_2^{m-2}}{\partial L_{m-2}} & \frac{\partial G_2^{m-2}}{\partial P_{m-1}} & \frac{\partial G_2^{m-2}}{\partial T_{m-1}} & \frac{\partial G_2^{m-2}}{\partial r_{m-1}} & \frac{\partial G_2^{m-2}}{\partial L_{m-1}} \\
0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \frac{\partial G_3^{m-2}}{\partial P_{m-2}} & \frac{\partial G_3^{m-2}}{\partial T_{m-2}} & \frac{\partial G_3^{m-2}}{\partial r_{m-2}} & \frac{\partial G_3^{m-2}}{\partial L_{m-2}} & \frac{\partial G_3^{m-2}}{\partial P_{m-1}} & \frac{\partial G_3^{m-2}}{\partial T_{m-1}} & \frac{\partial G_3^{m-2}}{\partial r_{m-1}} & \frac{\partial G_3^{m-2}}{\partial L_{m-1}} \\
0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & \frac{\partial G_4^{m-2}}{\partial P_{m-2}} & \frac{\partial G_4^{m-2}}{\partial T_{m-2}} & \frac{\partial G_4^{m-2}}{\partial r_{m-2}} & \frac{\partial G_4^{m-2}}{\partial L_{m-2}} & \frac{\partial G_4^{m-2}}{\partial P_{m-1}} & \frac{\partial G_4^{m-2}}{\partial T_{m-1}} & \frac{\partial G_4^{m-2}}{\partial r_{m-1}} & \frac{\partial G_4^{m-2}}{\partial L_{m-1}} \\
0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & \frac{\partial Z_1}{\partial P_{m-1}} & \frac{\partial Z_1}{\partial T_{m-1}} & \frac{\partial Z_1}{\partial r_{m-1}} & \frac{\partial Z_1}{\partial L_{m-1}} \\
0 & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & 0 & \frac{\partial Z_2}{\partial P_{m-1}} & \frac{\partial Z_2}{\partial T_{m-1}} & \frac{\partial Z_2}{\partial r_{m-1}} & \frac{\partial Z_2}{\partial L_{m-1}}
\end{pmatrix}}_{\text{HENYEY - MATRIX}}
\underbrace{\begin{pmatrix}
\delta P_1 \\ \delta T_1 \\ \delta r_1 \\ \delta L_1 \\ \delta P_2 \\ \delta T_2 \\ \delta r_2 \\ \delta L_2 \\ \vdots \\ \delta P_{m-2} \\ \delta T_{m-2} \\ \delta r_{m-2} \\ \delta L_{m-2} \\ \delta P_{m-1} \\ \delta T_{m-1} \\ \delta r_{m-1} \\ \delta L_{m-1}
\end{pmatrix}}_{\text{KORREKTUREN}}
=
\begin{pmatrix}
-R_1 \\ -R_2 \\ -G_1^1 \\ -G_2^1 \\ -G_3^1 \\ -G_4^1 \\ -G_1^2 \\ -G_2^2 \\ \vdots \\ -G_3^{m-3} \\ -G_4^{m-3} \\ -G_1^{m-2} \\ -G_2^{m-2} \\ -G_3^{m-2} \\ -G_4^{m-2} \\ -Z_1 \\ -Z_2
\end{pmatrix}
$$

Das Blockeliminationsverfahren (Henyey, 1961)

1. Block (verbindet die Stützstellen $i=1$ und $i=2$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial P_1}, & \frac{\partial R_1}{\partial T_1}, & \frac{\partial R_1}{\partial r_1}, & \frac{\partial R_1}{\partial L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial R_2}{\partial P_1}, & \frac{\partial R_2}{\partial T_1}, & \frac{\partial R_2}{\partial r_1}, & \frac{\partial R_2}{\partial L_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial P_1}, & \frac{\partial G_1}{\partial T_1}, & \frac{\partial G_1}{\partial r_1}, & \frac{\partial G_1}{\partial L_1}, & \frac{\partial G_1}{\partial P_2}, & \frac{\partial G_1}{\partial T_2}, & \frac{\partial G_1}{\partial r_2}, & \frac{\partial G_1}{\partial L_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4}{\partial P_1}, & \frac{\partial G_4}{\partial T_1}, & \frac{\partial G_4}{\partial r_1}, & \frac{\partial G_4}{\partial L_1}, & \frac{\partial G_4}{\partial P_2}, & \frac{\partial G_4}{\partial T_2}, & \frac{\partial G_4}{\partial r_2}, & \frac{\partial G_4}{\partial L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta T_1 \\ \delta r_1 \\ \delta L_1 \\ \delta P_2 \\ \delta T_2 \\ \delta r_2 \\ \delta L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1 \\ -R_2 \\ -G_1 \\ \vdots \\ -G_4 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial P_1}, & \frac{\partial R_1}{\partial T_1}, & \frac{\partial R_1}{\partial r_1}, & \frac{\partial R_1}{\partial L_1}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial R_2}{\partial P_1}, & \frac{\partial R_2}{\partial T_1}, & \frac{\partial R_2}{\partial r_1}, & \frac{\partial R_2}{\partial L_1}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial P_1}, & \frac{\partial G_1}{\partial T_1}, & \frac{\partial G_1}{\partial r_1}, & \frac{\partial G_1}{\partial L_1}, & \frac{\partial G_1}{\partial P_2}, & \frac{\partial G_1}{\partial T_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4}{\partial P_1}, & \frac{\partial G_4}{\partial T_1}, & \frac{\partial G_4}{\partial r_1}, & \frac{\partial G_4}{\partial L_1}, & \frac{\partial G_4}{\partial P_2}, & \frac{\partial G_4}{\partial T_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta T_1 \\ \delta r_1 \\ \delta L_1 \\ \delta P_2 \\ \delta T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1 \\ -R_2 \\ -\frac{\partial G_1}{\partial r_2}\delta r_2 - \frac{\partial G_1}{\partial L_2}\delta L_2 - G_1 \\ \vdots \\ -\frac{\partial G_4}{\partial r_2}\delta r_2 - \frac{\partial G_4}{\partial L_2}\delta L_2 - G_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -R_1 \\ 0 & 0 & -R_2 \\ -\frac{\partial G_1}{\partial r_2}, & -\frac{\partial G_1}{\partial L_2}, & -G_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4}{\partial r_2}, & -\frac{\partial G_4}{\partial L_2}, & -G_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_2 \\ \delta L_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

▶ Darstellung der Unbekannten $\delta P_1, \delta T_1, \delta r_1, \delta L_1, \delta P_2$ und δT_2 als Linearkombination von δr_2 und δL_2 mit Koeffizienten U_j, V_j, W_j, $j = 1, \dots, 6$:

$$\begin{pmatrix} \delta P_1 \\ \delta T_1 \\ \delta r_1 \\ \delta L_1 \\ \delta P_2 \\ \delta T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1, & V_1, & W_1 \\ U_2, & V_2, & W_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_6, & V_6, & W_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_2 \\ \delta L_2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Durch Vergleich von (2) und (3) → Gleichungssystem für U_j, V_j, W_j:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial P_1}, \frac{\partial R_1}{\partial T_1}, \frac{\partial R_1}{\partial r_1}, \frac{\partial R_1}{\partial L_1}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial R_2}{\partial P_1}, \frac{\partial R_2}{\partial T_1}, \frac{\partial R_2}{\partial r_1}, \frac{\partial R_2}{\partial L_1}, & 0, & 0 \\ \frac{\partial G_1}{\partial P_1}, \frac{\partial G_1}{\partial T_1}, \frac{\partial G_1}{\partial r_1}, \frac{\partial G_1}{\partial L_1}, & \frac{\partial G_1}{\partial P_2}, & \frac{\partial G_1}{\partial T_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_4}{\partial P_1}, \frac{\partial G_4}{\partial T_1}, \frac{\partial G_4}{\partial r_1}, \frac{\partial G_4}{\partial L_1}, & \frac{\partial G_4}{\partial P_2}, & \frac{\partial G_4}{\partial T_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1, V_1, W_1 \\ U_2, V_2, W_2 \\ U_3, V_3, W_3 \\ U_4, V_4, W_4 \\ U_5, V_5, W_5 \\ U_6, V_6, W_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0 & -R_1 \\ 0, & 0 & -R_2 \\ -\frac{\partial G_1}{\partial r_2}, & -\frac{\partial G_1}{\partial L_2}, & -G_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4}{\partial r_2}, & -\frac{\partial G_4}{\partial L_2}, & -G_4 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

N.B. Die U_j, V_j, W_j, $j = 1, \dots, 6$ hängen nur noch von bekannten Grössen ab!

2. i-ter Block ($i \geq 2$, verbindet die Stützstellen i und $i+1$)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial P_i}, \dots, \frac{\partial G_1}{\partial L_i}, \frac{\partial G_1}{\partial P_{i+1}}, \dots, \frac{\partial G_1}{\partial L_{i+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_4}{\partial P_i}, \dots, \frac{\partial G_4}{\partial L_i}, \frac{\partial G_4}{\partial P_{i+1}}, \dots, \frac{\partial G_4}{\partial L_{i+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P_i \\ \delta T_i \\ \delta r_i \\ \delta L_i \\ \delta P_{i+1} \\ \vdots \\ \delta L_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_1 \\ -G_2 \\ -G_3 \\ -G_4 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

von der Lösung des $i-1$-sten Blocks:

$$\begin{pmatrix} \delta P_i \\ \delta T_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{4i-3}, & V_{4i-3}, & W_{4i-3} \\ U_{4i-2}, & V_{4i-2}, & W_{4i-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_i \\ \delta L_i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (6)$$

(6) in (5) eingesetzt ergibt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r_i}, \frac{\partial g_1}{\partial L_i}, \frac{\partial G_1}{\partial P_{i+1}}, \frac{\partial G_1}{\partial T_{i+1}}, \frac{\partial G_1}{\partial r_{i+1}}, \frac{\partial G_1}{\partial L_{i+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_4}{\partial r_i}, \frac{\partial g_4}{\partial L_i}, \frac{\partial G_4}{\partial P_{i+1}}, \frac{\partial G_4}{\partial T_{i+1}}, \frac{\partial G_4}{\partial r_{i+1}}, \frac{\partial G_4}{\partial L_{i+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_i \\ \delta L_i \\ \delta P_{i+1} \\ \delta T_{i+1} \\ \delta r_{i+1} \\ \delta L_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ -g_3 \\ -g_4 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_j}{\partial r_i} &= \frac{\partial G_j}{\partial r_i} + \frac{\partial G_j}{\partial P_i} U_{4i-3} + \frac{\partial G_j}{\partial T_i} U_{4i-2} \\ \frac{\partial g_j}{\partial L_i} &= \frac{\partial G_j}{\partial L_i} + \frac{\partial G_j}{\partial P_i} V_{4i-3} + \frac{\partial G_j}{\partial T_i} V_{4i-2} \\ g_j &= G_j + \frac{\partial G_j}{\partial P_i} W_{4i-3} + \frac{\partial G_j}{\partial T_i} W_{4i-2} \end{aligned}\right\} \quad j = 1, \dots, 4 \qquad (8)$$

▶ Eliminieren δr_{i+1} und δL_{i+1} aus der linken Seite von (7):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r_i}, & \frac{\partial g_1}{\partial L_i}, & \frac{\partial G_1}{\partial P_{i+1}}, & \frac{\partial G_1}{\partial T_{i+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_4}{\partial r_i}, & \frac{\partial g_4}{\partial L_i}, & \frac{\partial G_4}{\partial P_{i+1}}, & \frac{\partial G_4}{\partial T_{i+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_i \\ \delta L_i \\ \delta P_{i+1} \\ \delta T_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial r_{i+1}} \delta r_{i+1} - \frac{\partial G_1}{\partial L_{i+1}} \delta L_{i+1} - g_1 \\ \vdots \\ -\frac{\partial G_4}{\partial r_{i+1}} \delta r_{i+1} - \frac{\partial G_4}{\partial L_{i+1}} \delta L_{i+1} - g_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial r_{i+1}}, & -\frac{\partial G_1}{\partial L_{i+1}}, & -g_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4}{\partial r_{i+1}}, & -\frac{\partial G_4}{\partial L_{i+1}}, & -g_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_{i+1} \\ \delta L_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

▶ Darstellung der Unbekannten δr_i, δL_i, δP_{i+1} und δT_{i+1} als Linearkombination von δr_{i+1} und δL_{i+1} mit Koeffizienten U_j, V_j, W_j, $j = 4i+3, \ldots, 4i+6$:

$$\begin{pmatrix} \delta r_i \\ \delta L_i \\ \delta P_{i+1} \\ \delta T_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{4i-1}, & V_{4i-1}, & W_{4i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{4i+2}, & V_{4i+2}, & W_{4i+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_{i+1} \\ \delta L_{i+1} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (10)$$

Durch Vergleich von (9) und (10) → Gleichungssystem für U_j, V_j, W_j:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r_i}, & \frac{\partial g_1}{\partial L_i}, & \frac{\partial G_1}{\partial P_{i+1}}, & \frac{\partial G_1}{\partial T_{i+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_4}{\partial r_i}, & \frac{\partial g_4}{\partial L_i}, & \frac{\partial G_4}{\partial P_{i+1}}, & \frac{\partial G_4}{\partial T_{i+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{4i-1}, & V_{4i-1}, & W_{4i-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{4i+2}, & V_{4i+2}, & W_{4i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial G_1}{\partial r_{i+1}}, & -\frac{\partial G_1}{\partial L_{i+1}}, & -g_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{\partial G_4}{\partial r_{i+1}}, & -\frac{\partial G_4}{\partial L_{i+1}}, & -g_4 \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Wieder hängen die U_j, V_j, W_j nur von bekannten Grössen ab !

<u>Für nächsten Block</u> : $i \to i+1$ (sofern $i \leq m-2$), dann weiter mit Gl. (5),

wenn $i = m-2$: → <u>letzter Block</u>

3. Der letzte Block (verbindet die Stützstellen m-2 und m-1)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial P_{m-2}}, \dots, \frac{\partial G_1}{\partial L_{m-2}}, \frac{\partial G_1}{\partial P_{m-1}}, \dots, \frac{\partial G_1}{\partial L_{m-1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial G_4}{\partial P_{m-2}}, \dots, \frac{\partial G_4}{\partial L_{m-2}}, \frac{\partial G_4}{\partial P_{m-1}}, \dots, \frac{\partial G_4}{\partial L_{m-1}} \\ 0, \dots, 0, \frac{\partial Z_1}{\partial P_{m-1}}, \dots, \frac{\partial Z_1}{\partial L_{m-1}} \\ 0, \dots, 0, \frac{\partial Z_2}{\partial P_{m-1}}, \dots, \frac{\partial Z_2}{\partial L_{m-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P_{m-2} \\ \delta T_{m-2} \\ \delta r_{m-2} \\ \delta L_{m-2} \\ \delta P_{m-1} \\ \delta T_{m-1} \\ \delta r_{m-1} \\ \delta L_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_1 \\ -G_2 \\ -G_3 \\ -G_4 \\ -Z_1 \\ -Z_2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

aus der Lösung von (11) für den vorletzten Block folgt (vgl. (10)):

$$\begin{pmatrix} \delta P_{m-2} \\ \delta T_{m-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{4m-7}, & V_{4m-7}, & W_{4m-7} \\ U_{4m-6}, & V_{4m-6}, & W_{4m-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_{m-2} \\ \delta L_{m-2} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

(13) in (12) eingesetzt ergibt:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial r_{m-2}}, \frac{\partial g_1}{\partial L_{m-2}}, \frac{\partial G_1}{\partial P_{m-1}}, \dots, \frac{\partial G_1}{\partial L_{m-1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_4}{\partial r_{m-2}}, \frac{\partial g_4}{\partial L_{m-2}}, \frac{\partial G_4}{\partial P_{m-1}}, \dots, \frac{\partial G_4}{\partial L_{m-1}} \\ 0, 0, \frac{\partial Z_1}{\partial P_{m-1}}, \dots, \frac{\partial Z_1}{\partial L_{m-1}} \\ 0, 0, \frac{\partial Z_2}{\partial P_{m-1}}, \dots, \frac{\partial Z_2}{\partial L_{m-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_{m-2} \\ \delta L_{m-2} \\ \delta P_{m-1} \\ \delta T_{m-1} \\ \delta r_{m-1} \\ \delta L_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_1 \\ -g_2 \\ -g_3 \\ -g_4 \\ -Z_1 \\ -Z_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g_j}{\partial r_{m-2}} &= \frac{\partial G_j}{\partial r_{m-2}} + \frac{\partial G_j}{\partial P_{m-2}} U_{4m-7} + \frac{\partial G_j}{\partial T_{m-2}} U_{4m-6} \\ \frac{\partial g_j}{\partial L_{m-2}} &= \frac{\partial G_j}{\partial L_{m-2}} + \frac{\partial G_j}{\partial P_{m-2}} V_{4m-7} + \frac{\partial G_j}{\partial T_{m-2}} V_{4m-6} \\ g_j &= G_j + \frac{\partial G_j}{\partial P_{m-2}} W_{4m-7} + \frac{\partial G_j}{\partial T_{m-2}} W_{4m-6} \end{aligned}\right\} \quad j = 1, \dots, 4 \tag{15}$$

Lösung von (14) liefert u.a. δr_{m-2}, δL_{m-2}. Diese in (10) eingesetzt liefert sukzessive alle Korrekturen.

▶ Vorteile dieses Verfahrens

- geringer Speicherbedarf, da man an Stelle der $16(2m-3)$ $H_{kl} \neq 0$ nur die ersten $12(m-1)$ der $6(2m-3)$ Koeffizienten U_j, V_j, W_j, $j = 1, \ldots, 4m-6$ abzuspeichern braucht
- Blockstruktur von H macht die Invertierung von H rel. leicht mit Hilfe des Blockeliminations-Verfahrens

! Anwendung des Blockeliminations-Verfahrens war der entscheidende Beitrag von L. Henyey. (Vorher hätte man eine Matrix mit n^2 Elementen $\neq 0$ invertieren müssen, was für grosse n vor 1962 unmöglich war)

- wenn $\det H \neq 0$, so hat das System $H\vec{\delta x} = -\vec{A}_*$ genau eine nicht-triviale Lösung

  mit bekanntem $\vec{\delta x}$ $\rightarrow$ verbesserte Lösung $\vec{x} = \vec{x}_* + \vec{\delta x}$

  Lösung muss iteriert werden, da
  - nur Glieder 1. Ordnung in $\delta P, \delta T, \delta r, \delta L$ berücksichtigt werden
  - Grundgleichungen nicht-lineare Diff.-Gleichungen sind

- Änderung der Randbedingungen durch sich ändernde Randwerte werden automatisch mitberücksichtigt

- Effektives Verfahren zur Berechnung von Sternaufbau und Sternentwicklung (keine Schwierigkeiten mit ε_g)

- Numerisch ausserordentlich "gutartig". Zahl der erforderlichen Iterationen pro Modell ist klein ($\lesssim 3-10$), d.h. gute Konvergenzeigenschaften

12.3 Das Vogt - Russel - Theorem

Aussage über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Systems der Grundgleichungen (räumliches Problem) für Gleichgewichtsmodelle ($\dot{P}=0$, $\dot{T}=0$).

a) klassisches Vogt-Russel-Theorem (Vogt, 1926; Russel, 1927)

Wenn M und $X_i(M_r)$ gegeben, und wenn weiter die Materialfunktionen ϱ, ε und $\varkappa$ als eindeutige Funktionen von P, T und X_i gegeben, dann existiert eine und genau eine Lösung.

Kritik: $\exists$ keine mathematische Grundlage für diese Behauptung.
Das klassische VR-Theorem ist falsch, denn $\exists$ Gegenbeispiele

b) lokales Vogt-Russel-Theorem (Kähler, 1972; 1975; Kähler + Weigert, 1974)

- klassisches V-R-Theorem gilt nicht allgemein

Da Mehrfachlösungen existieren: Frage: Gibt es in der Umgebung einer Lösung weitere Lösungen?

- Entweder gibt es keine weitere Lösung ($\rightarrow$ lokale Eindeutigkeit), oder $\exists$ ∞ viele Lösungen ($\rightarrow$ Verletzung der lok. Eindeutigkeit)

c) lokales Vogt-Russel-Theorem $\longleftrightarrow$ Henyey-Methode

Sind die Korrekturen $\delta\vec{x}$ immer eindeutig bestimmbar?

Sei $\vec{x}$: $A_k(\vec{x}) = 0 \quad \forall\, k$

Angenommen, $\vec{x}+\delta\vec{x}$ sei ebenfalls eine Lösung, d.h.

$$A_k(\vec{x}+\delta\vec{x}) = 0 = A_k(\vec{x}) + \sum_\ell \frac{\partial A_k}{\partial x_\ell}\delta x_\ell = A_k(\vec{x}) + (H\delta\vec{x})_k$$

$\Rightarrow$ $H\delta\vec{x} = 0 \iff$ entweder $\delta\vec{x}=0$ oder $\det H = 0$

$\Rightarrow$ wenn $\det H \neq 0 \rightarrow \delta\vec{x}=0$, Lösung lokal immer eindeutig.