

9. Chemische Zusammensetzung

Chemische Zusammensetzung geht über α, ϵ_N , die Zustandsgleichung in das System der Grundgleichungen ein.

9.1. Definitionen

Def. : X_i = relative Massenkonzentration der Teilchensorte i

► $\sum_i X_i = 1$ (entsprechend der Definition der X_i)

► Chemische Zusammensetzung eines Sterns ist eindeutig bekannt, wenn $X_i(M_r, t)$ für alle i gegeben

Für Sterne : sehr oft nur 3 Komponenten der chem. Zus. angegeben:

$X_H \equiv X$: rel. Massenanteil von Wasserstoff

$X_{He} \equiv Y$: rel. Massenanteil von Helium

$X_{Rest} \equiv Z$: rel. Massenanteil der "schweren Elemente",
sog. "Metalle"

Typische Werte :

$X \approx$	$0.7 \dots 0.75$
$Y \approx$	$0.24 \dots 0.28$
$Z \approx$	$0.0001 \dots 0.04$

9.2 Zeitliche Änderung der chemischen Zusammensetzung in radiativen Gebieten

In radiativen Gebieten : keine Durchmischung $\rightarrow$ Änderung der chem. Zus. nur lokal durch Kernreaktionen

Kernreaktionen : — Teilchen der Sorte $i \rightarrow$ Teilchen der Sorte j
 — treten nur dort auf wo $\epsilon_N \neq 0$
 — meistens mehrere Reaktionen gleichzeitig
 (hängt von T und g ab)

- jede Reaktion liefert eine bestimmte Energiemenge $\epsilon_{N,\ell}$ (pro Massen- und Zeiteinheit)

$$\rightarrow \epsilon_N = \sum_{\ell} \epsilon_{N,\ell}$$

Änderung der chem. Zus. durch Kernreaktionen:

- a) Erzeugung eines Teilchens der Sorte i aus einem der Sorte n : $n \rightarrow i$.
Pro Masseneinheit frei werdende Energie $E_{n \rightarrow i}$. Energieerzeugungsrate $\epsilon_{n \rightarrow i}$ (pro Massen- und Zeiteinheit)
- b) Zerstörung eines Teilchens der Sorte i : $i \rightarrow k$.
Frei werdende Energie $E_{i \rightarrow k}$ (pro Masseneinheit), Energieerzeugungsrate $\epsilon_{i \rightarrow k}$ (pro Massen- und Zeiteinheit)

$$\blacktriangleright \quad \underline{\underline{\frac{\partial X_i}{\partial t} = \sum_n \frac{\epsilon_{n \rightarrow i}}{E_{n \rightarrow i}} - \sum_k \frac{\epsilon_{i \rightarrow k}}{E_{i \rightarrow k}}}} \quad \forall i = 1, \dots, I$$

(sog. Ratengleichungen)

Da $\sum_{i=1}^I X_i = 1$, kann man aus obigen I Gleichungen immer eine eliminieren. $\rightarrow I-1$ Gleichungen für I Teilchensorten

Wichtig: Es kommen keine neuen Funktionen mehr vor

$\blacktriangleright$ System der Ratengleichungen = "5." Grundgleichung des Sternaufbaus

Beispiel: Wasserstoffbrennen (einfachster Fall)

$$\frac{\partial X_H}{\partial t} = - \frac{\epsilon_{H \rightarrow He}}{E_{H \rightarrow He}}, \quad \sum_i X_i = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = - \frac{\partial X}{\partial t}$$

(Nur 2 Nuklide, ^1H und ^4He , an der Reaktion beteiligt)

9.3 Nukleare Zeitskala eines Sterns

Bei Wasserstoffbrennen ist $\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\epsilon_{H \rightarrow He}}{E_{H \rightarrow He}}$, wobei

$$E_{H \rightarrow He} = \frac{1}{4} Q_{H \rightarrow He} \frac{L}{\mu_i}, \text{ mit } Q_{H \rightarrow He} = 26.7 \text{ MeV}, L = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}, \mu_i = 1 \text{ g mol}^{-1}$$

$$\rightarrow \underline{E_{H \rightarrow He} = 6.45 \cdot 10^{18} \text{ erg g}^{-1}} \quad (\approx 10^{18.8} \text{ erg g}^{-1})$$

Gesamtmasse des Wasserstoffs: $M_H = \int_0^M X_H(M_r) dM_r = \bar{X} M$

zeitliche Änderung: $\dot{M}_H = \int_0^M \dot{X}_H(M_r) dM_r = - \int_0^M \frac{\epsilon}{E} dM_r$

Bei (zentralem) Wasserstoffbrennen: $\epsilon_g \approx 0$ (Stern im therm. Gl.)

$$\rightarrow \frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon \quad \rightarrow \quad \dot{M}_H = -\frac{1}{E} \int_0^M \frac{\partial L_r}{\partial M_r} dM_r = -\frac{L}{E}$$

$$\rightarrow \frac{1}{M_H} \frac{\partial M_H}{\partial t} = \frac{\partial \ln M_H}{\partial t} = -\frac{L}{M_H E} \quad : \quad M_H E = \text{tot. Energievorrat des Sterns aus der Reaktion } 4H \rightarrow He$$

$$M_H E = E_N \quad : \quad -\frac{\partial \ln M_H}{\partial t} = \frac{1}{\tau_N}, \quad \tau_N = \text{nukleare Zeitskala}$$

$$\blacktriangleright \quad \underline{\underline{\tau_N = \frac{E_N}{L}}} \quad (\text{vgl. mit Resultat in 4.4})$$

9.4 Änderung der chemischen Zusammensetzung in konvektiven Gebieten

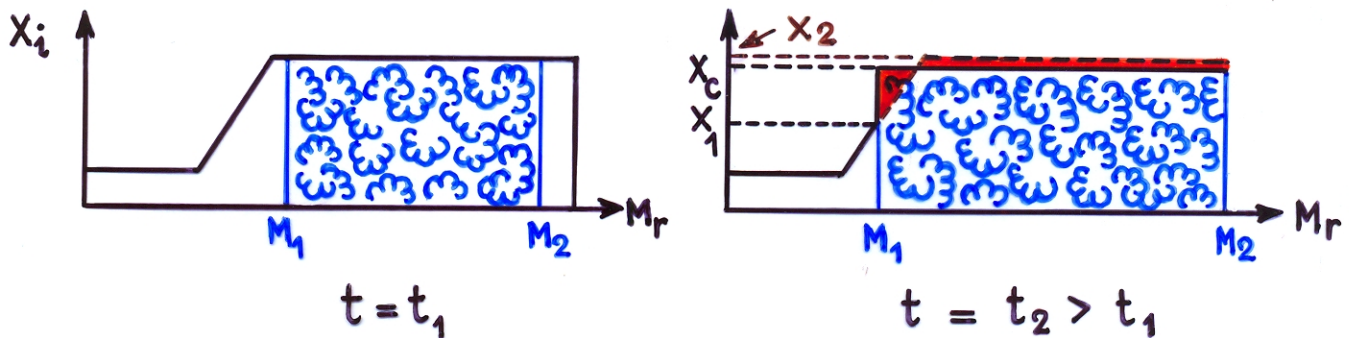
3 Möglichkeiten:

a) Kernreaktionen $\rightarrow$ Veränderung lokal mit τ_N

b) konvektive Mischung $\rightarrow$ vollst. Durchmischung mit $\tau_K \ll \tau_N$

$$\blacktriangleright \quad \underline{\underline{\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{\int_{\text{Konv. Z.}} \left(\sum_n \frac{\epsilon_{n \rightarrow i}}{E_{n \rightarrow i}} - \sum_k \frac{\epsilon_{i \rightarrow k}}{E_{i \rightarrow k}} \right) dM_r}{\int_{\text{Konv. Z.}} dM_r}}}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial X_i}{\partial M_r} = 0$$

c) Konvektionszone kann in ein chemisch inhomogenes Gebiet wandern

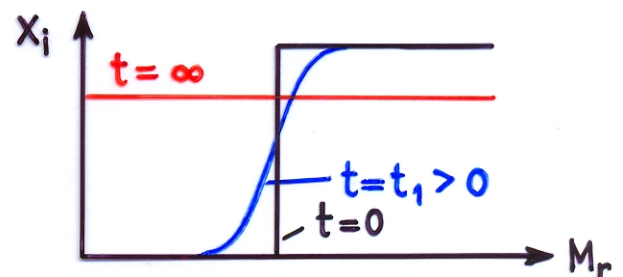


$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial t} = & \frac{\int_{M_1}^{M_2} \left(\sum_n \frac{\epsilon_{n \rightarrow i}}{E_{n \rightarrow i}} - \sum_k \frac{\epsilon_{i \rightarrow k}}{E_{i \rightarrow k}} \right) dM_r}{\int_{M_1}^{M_2} dM_r} + \frac{X_2 - X_c}{M_2 - M_1} \frac{1}{2} \left(\frac{dM_2}{dt} + \left| \frac{dM_2}{dt} \right| \right) \\ & + \frac{X_1 - X_c}{M_2 - M_1} \frac{1}{2} \left(\left| \frac{dM_1}{dt} \right| - \frac{dM_1}{dt} \right), \quad i=1, \dots, I \end{aligned}$$

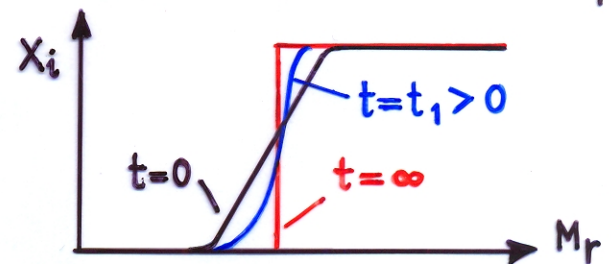
"5." Grundgleichung des Sternaufbaus

9.5 Bemerkungen zur Diffusion und Sedimentation

Diffusion: Ausgleich der chem. Inhomogenitäten mit Diffusionszeitskala τ_{diff}



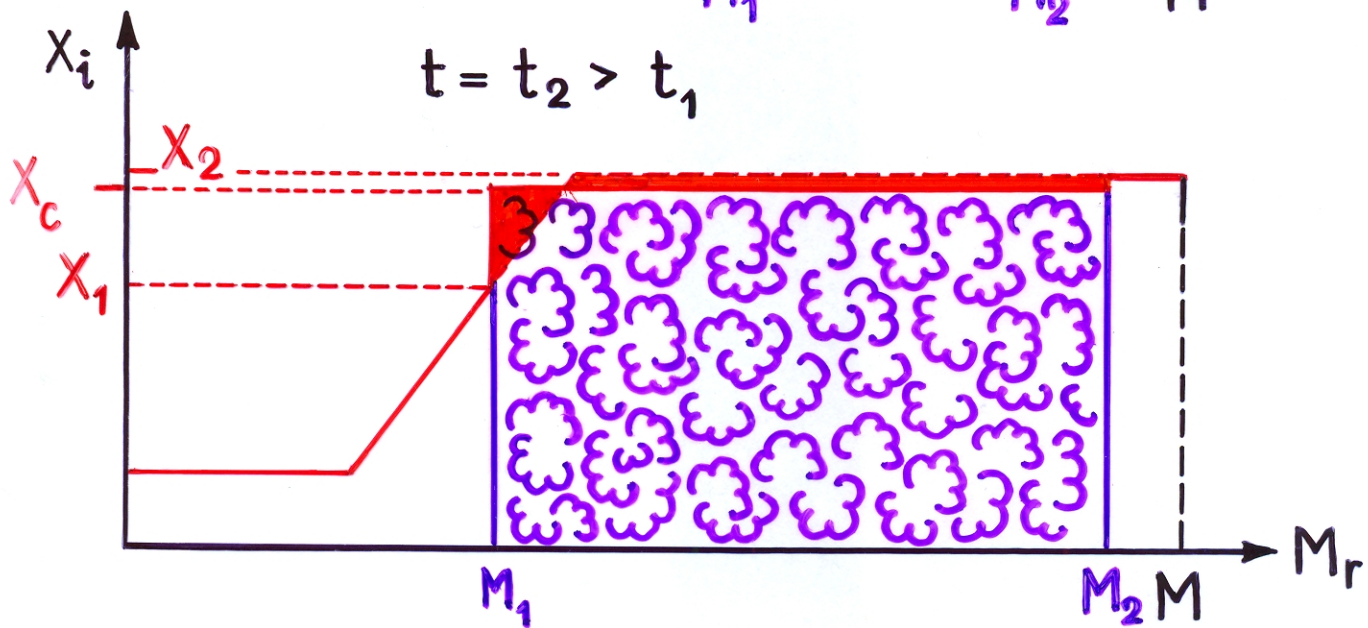
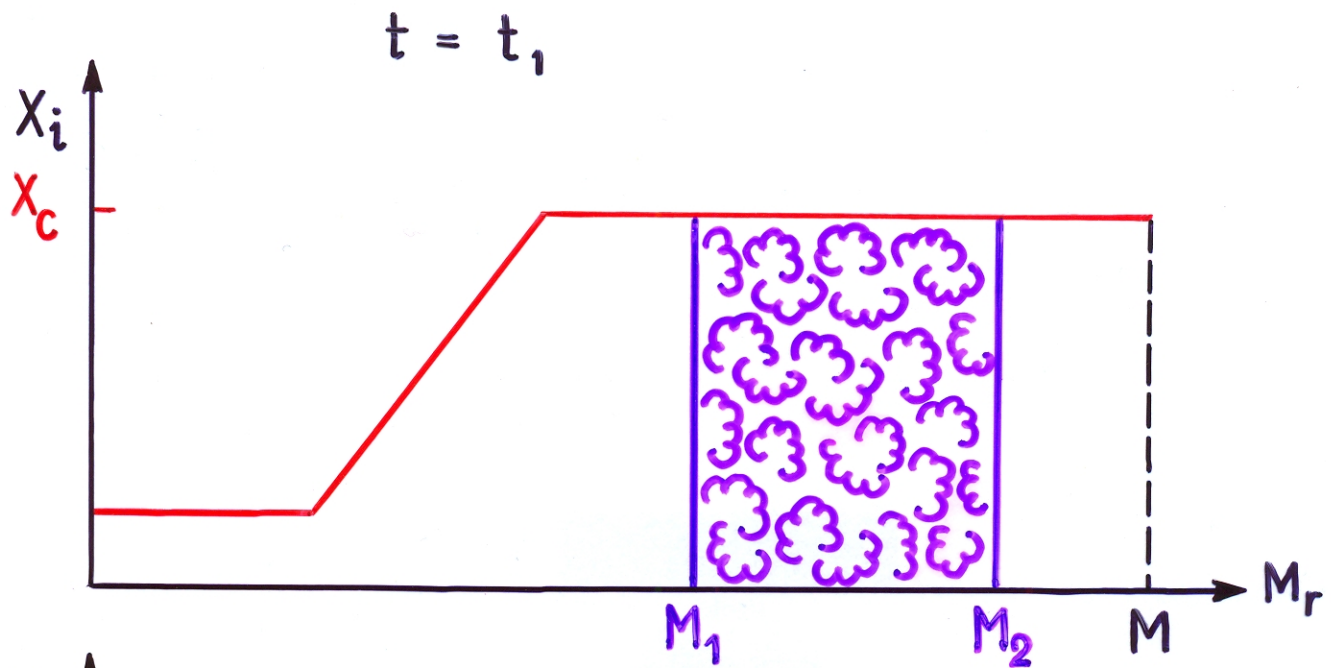
Sedimentation: Absinken der schweren Elemente im Schwerfeld des Sterns. → Wirkung entgegengesetzt zur Diffusion.



Aber: Teilchentransport bei Sedimentation ist ebenfalls ein Diffusionsprozess!

► Diffusion und Sedimentation kompensieren sich teilweise

► im allg. Diffusion und Sedimentation nicht wichtig für den Sternaufbau ($\tau_{\text{diff}} \gg \tau_N$)



$$M_1 < M_r < M_2 :$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_{\text{Konv.}} &= \frac{X_2 - X_c}{M_2 - M_1} \frac{1}{2} \left[\frac{dM_2}{dt} + \left| \frac{dM_2}{dt} \right| \right] \\ &+ \frac{X_1 - X_c}{M_2 - M_1} \frac{1}{2} \left[\left| \frac{dM_1}{dt} \right| - \frac{dM_1}{dt} \right] \end{aligned}$$

Abschätzung der Diffusionszeitskala

Ansatz: "Random walk" : Im Mittel nach N Stößen mit der mittl. freien Weglänge λ zurückgelegter Weg

$$\ell_{\text{diff}} = \lambda \sqrt{N} \quad ,$$

wobei $N = \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_s}$, τ_s = mittl. Stosszeit

$$\tau_{\text{diff}} = \tau_s \left(\frac{\ell_{\text{diff}}}{\lambda} \right)^2$$

λ : $\lambda = \frac{1}{n\sigma_s} = \frac{\mu}{g L \sigma_s}$: n = Teilchendichte (pro Vol.)
 σ_s = Stossquerschnitt

σ_s : Nehmen elastischen Stossquerschnitt im Coulombfeld

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{d_{\text{min}}} \rightarrow d_{\text{min}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\langle E_{\text{kin}} \rangle}$$

Denken uns die Teilchen als harte Kugeln mit Radius $r = \frac{1}{2} d_{\text{min}}$

$$\sigma_s = \pi d_{\text{min}}^2 = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4}{9k^2 T^2} \approx 4 \cdot 10^{-20} \text{ cm}^2 \quad \text{für } Z_1 = Z_2 = 1, T = 10^7 \text{ K}$$

$$\lambda = \frac{9k^2 T^2 \mu}{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4 g L} \approx 250 d_{\text{min}} \approx 4 \cdot 10^{-7} \text{ cm} \quad \text{für } \mu = 1, g = 10^2 \text{ g cm}^{-3}$$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \rightarrow \tau_s = \frac{\lambda}{\langle v \rangle} \approx 8 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

$$\tau_{\text{diff}} \approx \frac{\ell_{\text{diff}}^2}{\langle v \rangle \lambda} \approx \ell_{\text{diff}}^2 \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4 g L^{1/2}}{9\sqrt{3} k^{5/2} T^{5/2} \mu^{1/2}}$$

Beispiel: Sonne : $Z_1 = Z_2 = 1$, $\mu = 1$, $T = 10^7 \text{ K}$, $g \approx 10^2 \text{ g cm}^{-3}$, $\ell_{\text{diff}} \approx 10^{-2} R_\odot$

$$\rightarrow \tau_{\text{diff}} \approx 10^9 \text{ Jahre}$$

II ÜBERSICHT ÜBER DAS GESAMTPROBLEM

10. Das System der Grundgleichungen

10.1 Die Grundgleichungen des Sternaufbaus

Zwei unabhängige Variable : M_r und t (oder r und t)

- 1) $\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \varrho}$: Massenverteilung im Stern
- 2) $\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$: Bewegungsgleichung
- 3) $\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \varepsilon_N - \varepsilon_\nu - c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\varrho} \frac{\partial P}{\partial t}$: Energiesatz
- 4a) $\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{3}{64\pi ac} \frac{\partial \varepsilon}{r^4 T^3} L_r$: Strahlungstransport, wenn $\nabla_a > \nabla_r$
- 4b) $\frac{\partial T}{\partial M_r} = \frac{T}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial M_r} \right) \nabla_a$: Konvektion, wenn $\nabla_r > \nabla_a$
- 5a) $\frac{\partial X_i}{\partial t} = \sum_n \frac{\varepsilon_{n \rightarrow i}}{E_{n \rightarrow i}} - \sum_k \frac{\varepsilon_{i \rightarrow k}}{E_{i \rightarrow k}}, \forall i$: Änderung der chem. Zus. in radiativen Gebieten
- 5b) $\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{\int_{M_1}^{M_2} \left(\sum_n \frac{\varepsilon_{n \rightarrow i}}{E_{n \rightarrow i}} - \sum_k \frac{\varepsilon_{i \rightarrow k}}{E_{i \rightarrow k}} \right) dM_r}{M_1 \int_{M_1}^{M_2} dM_r} + \frac{X_2 - X_c}{M_2 - M_1} \frac{1}{2} \left(\frac{dM_2}{dt} + \left| \frac{dM_2}{dt} \right| \right) + \frac{X_1 - X_c}{M_2 - M_1} \frac{1}{2} \left(\left| \frac{dM_1}{dt} \right| - \frac{dM_1}{dt} \right)$ } Änderung der chem. Zus. in konvektiven Gebieten

Materialfunktionen

- $\varrho = \varrho(P, T, X_i)$: Zustandsgleichung $\rightarrow c_p, \nabla_a, \delta$
 $\varepsilon_N = \varepsilon_N(P, T, X_i)$: nukleare Energieerzeugungsrate
 $\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu(P, T, X_i)$: Neutrinoverluste
 $\varepsilon = \varepsilon(P, T, X_i)$: Opazität
- werden als gegeben vorausgesetzt $\rightarrow$ Kapitel III

► zu bestimmende Funktionen: $r(M_r, t), P(M_r, t), L_r(M_r, t), T(M_r, t)$ und $X_i(M_r, t) \forall i=1, \dots, I$

Wenn chem. Zus. durch I Teilchensorten beschrieben

→ $I+4$ Gleichungen für $I+4$ Funktionen → es ist sinnvoll nach Lösungen des Systems der Grundgleichungen zu suchen.

Die Gleichungen sind

- a) partielle Differentialgleichungen (zwei unabh. Var. M_r und t)
- b) nicht-lineare Differentialgleichungen (bes. unangenehme Eigensch.)

Zur Lösung benötigt man noch Randwerte bzw. Randbedingungen
+ Anfangswerte bzw. Anfangsbedingungen

► Sternaufbau ist ein Randwert- und Anfangswert-Problem

(Das ist ebenfalls eine unangenehme Eigenschaft: Wahl der Anfangswerte ist oft problematisch)

Definition: Sternmodell für den Zeitpunkt t_* $\equiv \begin{pmatrix} r(M_r, t) \\ P(M_r, t) \\ \vdots \\ X_i(M_r, t) \end{pmatrix}_{t=t_*}$

10.2 Zeitliche Ableitungen und Zusammenhang mit Zeitskalen

vorkommende zeitl. Abl. $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ in (2), $\frac{\partial P}{\partial t}$ und $\frac{\partial T}{\partial t}$ in (3), $\frac{\partial X_i}{\partial t}$ in (5)

Jeder dieser zeitl. Abl. kann eine Zeitskala zugeordnet werden:

<u>Ableitung</u>	<u>Zeitskala</u>	
$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$	τ_h	: <u>hydrost. Zeitskala</u> = Einstellzeit für hydrostatisches Gleichgewicht ($\ddot{r} \rightarrow 0$)
$\frac{\partial P}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial t}$	τ_{KH}	: <u>Kelvin-Helmholtz-Zeit</u> = Einstellzeit für thermisches Gleichgewicht ($\dot{T} \rightarrow 0, \dot{P} \rightarrow 0$)
$\frac{\partial X_i}{\partial t}$	τ_N	: Einstellzeit für nukleares Gleichgewicht ($\dot{X}_i \rightarrow 0$) = <u>nukleare Zeitskala</u> (Nur sinnvoll definiert in rad. Geb. und konv. Geb. wo $\dot{M}_1 = 0$ und $\dot{M}_2 = 0$)

Dabei gilt : $\tau_h \ll \tau_{KH} \ll \tau_N$

Welche Zeitableitungen muss man mitberücksichtigen ?

Der Grad der mögl. Vereinfachung hängt von der Entwicklungsgeschwindigkeit des Sterns (Zeitskala τ_*) ab.

- a) Sei $\tau_* \approx \tau_h$: Alle zeitl. Ableitungen (ausser in gew. Fällen $(\frac{\partial X_i}{\partial t})_{\text{nukl.}}$)
- b) Sei $\tau_* \approx \tau_{KH}$: Da $\tau_h \ll \tau_{KH}$, darf $\partial^2 r / \partial t^2 = 0$ gesetzt werden
- c) Sei $\tau_* \approx \tau_N$: Hier ist es zulässig $\ddot{r}=0$, $\dot{P}=0$ und $\dot{T}=0$ zu setzen.
Einzige wichtige Zeitableitungen : $\frac{\partial X_i}{\partial t}$

Beispiele : $\tau_* \approx \tau_h$: z.B. beim protostellaren Kollaps, Kollaps zum Neutronenstern (freier Fall), explosive Phasen, pulsierende Sterne

$\tau_* \approx \tau_{KH}$: Normalfall

$\tau_* \approx \tau_N$: während des zentr. Wasserstoffbrennens, d.h. für Hauptreihensterne

Sternmodelle, für die $\ddot{r}=0$, $\dot{T}=0$ und $\dot{P}=0$ heissen Gleichgewichtsmodelle

N.B. τ_N und τ_{KH} können unter best. Bedingungen lokal um mehrere Zehnerpotenzen von $\bar{\tau}_N$ bzw. von $\bar{\tau}_{KH}$ abweichen !

10.3 Anfangswerte

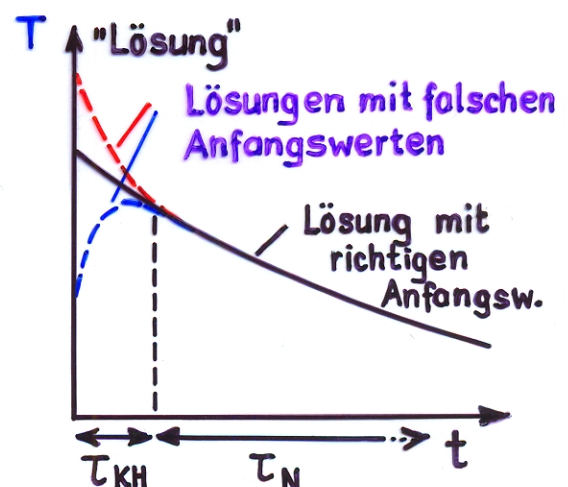
Wahl guter Anfangswerte oft problematisch
(z.B. schnellen Phasen braucht man $v(M_r, t_0)$)

Bei Gleichgewichtsmodellen ist die Wahl relativ einfach (braucht nur die $X_i(M_r)$ anzugeben).

Bei Hauptreihensternen noch einfacher : $\frac{\partial X_i}{\partial M_r} = 0$

Falsche Anfangswerte für P, T :

→ Lösungen, die mit τ_{KH} gegen die richtige konvergieren



10.4 Die Verkoppelung der Aufbaugleichungen

Können Teile des Systems der Aufbaugleichungen für sich gelöst werden?

Betrachten nur den einfachsten Fall, $\ddot{r} = 0$, $\dot{P} = 0$, $\dot{T} = 0$:

$$\begin{aligned}
 \triangleright \quad \frac{\partial r}{\partial M_r} &= f(r, g) = f_1(r, P, T, X_i) & (1) \\
 \frac{\partial P}{\partial M_r} &= f_2(M_r, r) & (2) \\
 \frac{\partial L_r}{\partial M_r} &= \varepsilon_N = f_3(P, T, X_i) & (3) \\
 \frac{\partial T}{\partial M_r} &= \alpha g(L_r, r, T) = f_4(L_r, r, P, T, X_i) & (4) \\
 \frac{\partial X_i}{\partial t} &= h(\varepsilon) = f_5(P, T, X_i) & (5)
 \end{aligned}$$

(1) } "mechanischer" Teil
 (2) } des Gleichungssystems
 (3) } "thermisch-energetischer"
 (4) } Teil des Gl.-Systems
 (5) : "chemischer" Teil des Gleichungssystems

Es gibt mehrere Fälle, wo Teile der Gl. (1)-(5) für sich gelöst werden können:

a) Entkoppelung des mechanischen Teils (1)-(2) vom Rest

für $t = t_*$ sei $X_i(M_r, t_*)$ gegeben.

(1) und (2) mit (3)-(5) nur über g , d.h. die Zustandsgl. verkoppelt.

► Wenn T aus der Zustandsgleichung eliminiert werden kann, so ist der mechanische Teil vom Rest entkoppelt und kann getrennt integriert werden. $\rightarrow$ Lösungen für die mech. Struktur unabhängig von T .

Beispiele: $g = g(P)$, $\frac{\partial g}{\partial T} = 0$: entartetes Elektronengas

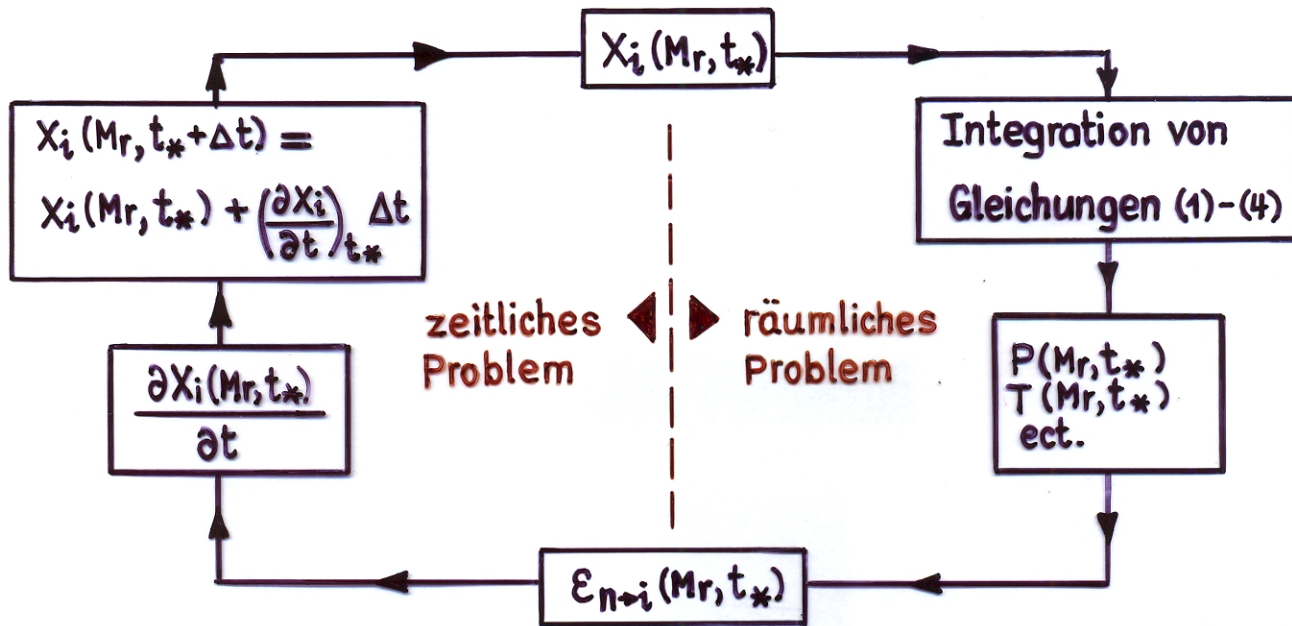
$g = g(P, T)$ + Nebenbedingung $\nabla = \nabla_a$: adiabatische Schichtung

b) Entkoppelung des räumlichen vom zeitlichen Problem

Gl. (5) enthält keine räumliche Ableitungen $\rightarrow$ Gl. (1)-(4) sind von Gl. (5) entkoppelt.

► Gl. (1)-(4) : räumliches Problem zu geg. $X_i(M_r)$
Gl. (5) : zeitliches Problem zu geg. $P(M_r, t), T(M_r, t)$

Diese Eigenschaft macht man sich bei der Berechnung von Sternentwicklung zu nutze. Man integriert (1)-(4) und (5) alternierend:



c) Wenn $\dot{P} \neq 0$ und $\dot{T} \neq 0$, so erfolgt die Lösung analog zu b):

Sei für $t=t_*$: $P(M_r, t_*) = P_*$, $T(M_r, t_*) = T_*$, r , L_r und $X_i(M_r, t_*)$ gegeben.

→ chemische Zus. für $t=t_*+\Delta t = t_{**}$: $X_i(M_r, t_{**})$

und $\epsilon_g(M_r, t_{**}) = -C_p \dot{T}_{**} + \frac{\delta}{g} \dot{P}_{**}$, wobei

$$\dot{T}_{**} = \frac{T_{**} - T_*}{t_{**} - t_*} \quad , \quad \dot{P}_{**} = \frac{P_{**} - P_*}{t_{**} - t_*}$$

Da P_{**} und T_{**} ohnehin bestimmt werden, folgt automatisch auch ϵ_g

► räumliches und zeitliches Problem lassen sich auch dann getrennt behandeln, wenn $\epsilon_g \neq 0$.

11. Randbedingungen

11.1 Randbedingungen im Zentrum des Sterns

$$M_r = 0 \quad : \quad \left. \begin{array}{l} \underline{\underline{r(M_r = 0) = 0}} \\ \underline{\underline{L_r(M_r = 0) = 0}} \end{array} \right\} \text{zentrale Randbedingungen}$$

Für praktische Zwecke (num. Rechenverfahren) : Randbedingungen nicht bei $M_r = 0$, sondern bei endlich grossem $r = r_c$, bzw. $M_r = M_c$ (wegen $\Delta r/r \ll 1$ bei der Diskretisierung)

Randbedingungen durch Reihenentwicklung der Aufbaugleichungen in der Umgebung von $M_r = 0$.

a) Aus $\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$ und $\left. \frac{\partial \rho}{\partial M_r} \right|_{M_r=0} = 0$, d.h. $\rho(r) \approx \rho(r=0) = \rho_c$ für hinreichend kleines r

folgt :

$$\underline{\underline{M_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_c}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{r = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \rho_c^{-1/3} M_r^{1/3}}}$$

b) Aus $\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon_N - \epsilon_\nu + \epsilon_g$ und $(\epsilon_N - \epsilon_\nu + \epsilon_g) < \infty$ folgt :

$$\underline{\underline{L_r = (\epsilon_N - \epsilon_\nu + \epsilon_g)_{r=0} M_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_c (\epsilon_N - \epsilon_\nu + \epsilon_g)_{r=0}}}$$

c) Aus $\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{G M_r}{4\pi r^4}$ ($\ddot{r} = 0$ angenommen) folgt

$$\begin{aligned} dP &= -\frac{G M_r}{4\pi r^4} dM_r = -\frac{G}{4\pi} M_r \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{-4/3} \rho_c^{4/3} M_r^{-4/3} dM_r \\ &= -\frac{G}{4\pi} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{-4/3} \rho_c^{4/3} M_r^{-1/3} dM_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow P(M_r) &= \int_0^{M_r} \frac{\partial P}{\partial M_r} dM_r + C = -\frac{G}{4\pi} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{-4/3} \rho_c^{4/3} \int_0^{M_r} x^{-1/3} dx + C \\ &= -\frac{G}{4\pi} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{-4/3} \rho_c^{4/3} \frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_0^{M_r} + C = -\frac{G}{2} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{-1/3} \rho_c^{4/3} M_r^{2/3} + C \end{aligned}$$

Mit $P(M_r=0) = P_c$ folgt:
$$P(M_r) = P_c - \frac{G}{2} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{-1/3} \rho_c^{4/3} M_r^{2/3}$$

d) Aus $\frac{\partial T}{\partial M_r} = -\frac{GM_r T}{4\pi r^4 P}$ folgt

$$dT = -\frac{GM_r T}{4\pi r^4 P} \nabla dM_r = -\frac{G}{4\pi} \frac{T_c}{P_c} \nabla_c \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{-4/3} \rho_c^{4/3} M_r^{-1/3} dM_r$$

$$\rightarrow T(M_r) = \int_0^{M_r} dT + C = -\frac{G}{4\pi} \frac{T_c}{P_c} \nabla_c \rho_c^{4/3} \int_0^{M_r} x^{-1/3} dx + C$$

Mit $T(M_r=0) = T_c$ folgt:
$$T(M_r) = T_c - \frac{G}{2} \left(\frac{3}{4\pi} \right)^{-1/3} \frac{T_c}{P_c} \nabla_c \rho_c^{4/3} M_r^{2/3}$$

11.2 Oberflächenbedingungen (äussere Randbedingungen)

Es gibt mehrere Möglichkeiten äussere Randbedingungen zu formulieren, je nach den Erfordernissen an Genauigkeit.

a) Nullrandbedingungen

Da $P(M_r=M) \ll P_c$ und $T(M_r=M) \ll T_c$

$\rightarrow$ $P(M_r=M) = 0$ und $T(M_r=M) = 0$: Nullrandbedingungen

unbefriedigend, da mit $P=0$ optisch dünne Schichten im Integrationsbereich. Transportgleichung gilt nur für $\tau \gg 1$, für $\tau \lesssim 1$ braucht man Theorie der Sternatmosphären. Gebiete mit $P=0$ nicht Teil des Sterninneren

b) Photosphärenbedingungen

Photosphäre = Schicht, aus der der Schwerpunkt der Energieabstrahlung erfolgt. Entspr. optische Tiefe τ_{ph} aus Atmosphärenth.

Eddington-Approximation für die graue Atmosphäre:

$$\tau_{ph} = 2/3$$

Def.: Effektivtemperatur T_{eff} :
$$T_{eff}^4 = \frac{L}{4\pi \sigma R^2 (\tau = 2/3)}$$

Temperaturschichtung in der Eddington-Approximation für die graue Atmosphäre ($\partial \kappa / \partial \nu = 0$) :

► $T^4(\tau) = \frac{3}{4} \frac{L}{4\pi\sigma R^2} \left(\tau + \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3}\right)$ 1. Randbedingung für die Photosphäre

verknüpft die Randwerte $T = T_{\text{eff}}$, $L_r = L$ und $r = R$ an der Stelle $M_r = M$ (N.B. $M - M(\tau = 2/3) \approx 10^{-11} M_{\odot}$, daher $M = M(\tau = 2/3)$)

Druckschichtung in der Photosphäre:

$d\tau = \kappa g dr \rightarrow \tau_{\text{ph}} = \int_R^{\infty} \kappa g dr$, τ_{ph} = optische Tiefe in der Photosphäre

Ersetzen κ durch $\bar{\kappa}$, so dass $\frac{2}{3} = \tau_{\text{ph}} = \bar{\kappa}_{\text{ph}} \int_R^{\infty} g dr$

Hydrostatisches Gleichgewicht : $\frac{dP}{dr} = -g g$

► $P_{\text{ph}} = \int_R^{\infty} g g dr = \bar{g} \int_R^{\infty} g dr$, wobei $\bar{g} = g = \frac{GM}{R^2}$

► $P_{\text{ph}} = \frac{2}{3} \frac{GM}{R^2} \frac{1}{\bar{\kappa}_{\text{ph}}}$: 2. Randbedingung für die Photosphäre

► Photosphärenrandbedingungen sind viel besser als Nullrandbedingungen; sie können für die Berechnung realistischer Sternmodelle verwendet werden.

11.3 Hüllenlösungen

Hüllenlösungen = Lösungen der Aufbaugleichungen für Schichten dicht unterhalb der Photosphäre

a) radiative Hüllen (Gleichgewichtshüllen, d.h. $\dot{P} = 0, \dot{T} = 0$)

Strahlungstransport : $\frac{dT}{dM_r} = - \frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{\kappa L_r}{r^4 T^3} = -K \frac{\kappa L_r}{r^4 T^3}$

Ansatz für κ : $\kappa = \kappa_0 P^a T^b$

(nur näherungsweise richtig,
aber in Hüllen verwendbar)

$$\rightarrow -\frac{dT}{dM_r} = \frac{3\kappa_0}{64\pi^2 ac} \frac{L_r}{r^4} \frac{P^a}{T^{3-b}} = K' \frac{L_r P^a}{r^4 T^{3-b}}$$

Hydrostatisches Gleichgewicht in der Hülle : $\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} = -K'' \frac{M_r}{r^4}$

$$\rightarrow \frac{T^{3-b}}{P^a} \frac{dT}{dP} = \frac{K'}{K''} \frac{L_r}{M_r}$$

Für Hüllen : $L_r = L$ (wegen $\dot{P}=0, \dot{T}=0$ und $\epsilon_N=0$), in sehr guter Näherung $M_r = M$ und in guter Näherung $r=R$

$$\rightarrow \frac{d(T^{4-b})}{d(P^{a+1})} = \frac{4-b}{a+1} \frac{K'}{K''} \frac{L}{M} \rightarrow P^{1+a} = \frac{16\pi acG}{3} \frac{M}{\kappa_0 L} \frac{a+1}{4-b} T^{4-b} + C$$

► $P^{1+a} = C' T^{4-b} + C$, wobei C vorläufig unbestimmt ist.

Verwenden jetzt Kramers Opazität für ff und gf Absorption :

→ $a = 1$, $b = -4.5$

→ $P^2 = C' T^{8.5} + C$, mit $C' = \frac{2}{8.5} \frac{16\pi acG}{3} \frac{M}{\kappa_0 L}$

oder :

► $T^{8.5} = \frac{1}{C'} P^2 - \frac{C}{C'}$

Diskussion in der $\log P - \log T$ -Ebene (Steigung = $\frac{d\log T}{d\log P} = \nabla$)

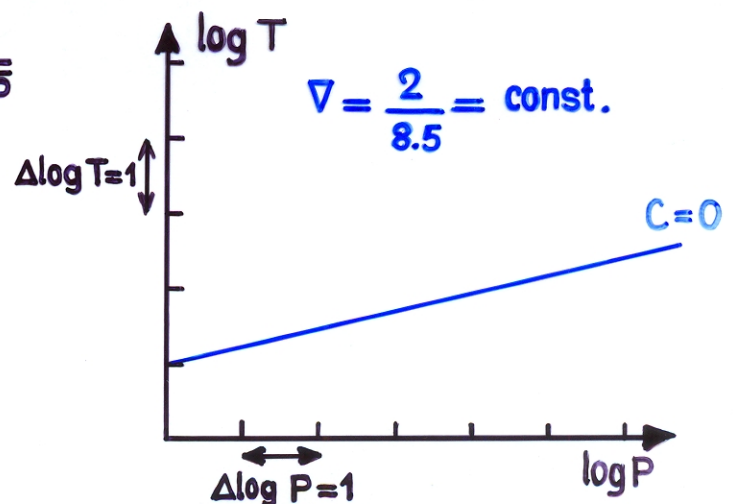
→ $\nabla = \frac{2}{8.5} \frac{P^2}{C' T^{8.5}} = 0.235... \frac{P^2}{C' T^{8.5}}$

Fallunterscheidung:

1) $C=0$ → $T^{8.5} = \frac{1}{C'} P^2$

→ für $P \rightarrow 0$ folgt $T \rightarrow 0$

⇒ Nullrandbedingung



∇ unabhängig von P und T , $\nabla < \nabla_a \approx 0.4 \rightarrow$ radiative Hüllen

2) $C < 0$ (keine Nullrandbedingung, da für $P \rightarrow 0$ $T \rightarrow \text{const.} > 0$)

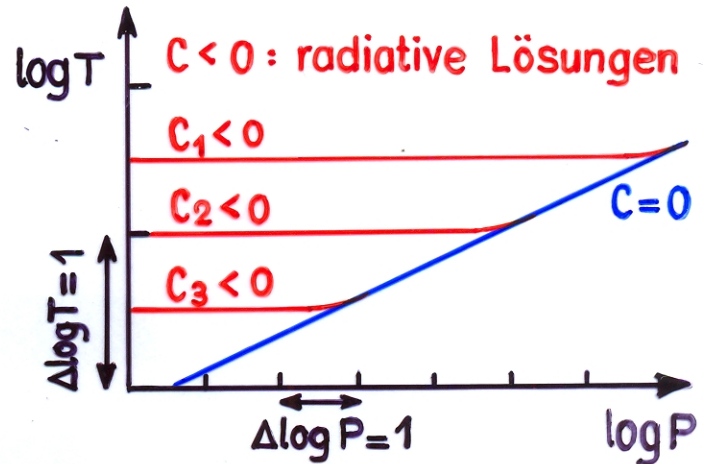
$$C < 0: T^{8.5} > \frac{1}{C'} P^2$$

$$\rightarrow \nabla = \frac{2}{8.5} \frac{P^2}{C' T^{8.5}} < \frac{2}{8.5}$$

$\rightarrow$ radiative Lösungen

$$\lim_{P \rightarrow 0} T^{8.5} = -\frac{C}{C'} = \text{const.} > 0$$

$$\rightarrow \lim_{P \rightarrow 0} (\log T) = \text{const.}$$



Verhalten in der Nähe der Null-Lösung: $\Delta \log P = 4.25 \Delta \log T$

$$\rightarrow \text{sehr schnell } \frac{1}{C'} P^2 \gg -\frac{C}{C'} \rightarrow T^{8.5} \approx \frac{P^2}{C'} : \text{Null-Lösung}$$

► Lösungen mit $C < 0$ konvergieren mit wachsendem P gegen die Null-Lösung

$$3) \underline{C > 0} : \rightarrow T^{8.5} < \frac{P^2}{C'} \rightarrow \nabla = \frac{2}{8.5} \frac{P^2}{C' T^{8.5}} > \frac{2}{8.5}$$

$\rightarrow$ Konvektion möglich!

Bedingung für $\nabla = \nabla_a = 0.4$ (Grenze für die Gültigkeit dieser Theorie):

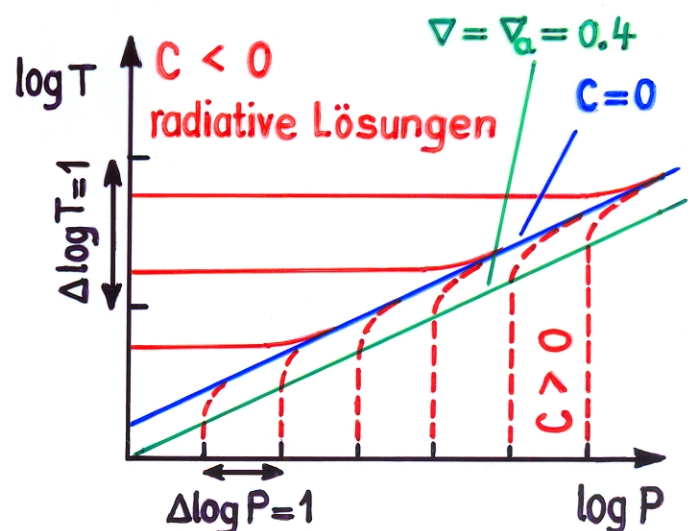
$$\nabla = \nabla_a = \frac{2}{5} = \frac{2}{8.5} \frac{P^2}{C' T^{8.5}} \rightarrow T^{8.5} = \frac{10}{17 C'} P^2$$

$$\rightarrow \log T = \frac{2}{8.5} \log P - \frac{1}{8.5} \log C' - \frac{1}{8.5} \log 1.7$$

$$\underline{\log T = \frac{2}{8.5} \log P - \frac{1}{8.5} \log C' - 0.027}$$

$\rightarrow$ Lösung || zur Null-Lösung, aber um $\Delta \log T = 0.027$ tiefer

Formal ist für $\nabla > \nabla_a$: $\lim_{T \rightarrow 0} P = \text{const.}$



b) Konvektive Hüllen (Verlauf im $\log T - \log P$ -Diagramm ?)

- im tiefen Sterninneren : $\nabla = \nabla_a$ bei Konvektion , ∇_a aber nicht konstant

bei hohen Temperaturen : Gas (haupts. H und He) ist vollst. ionisiert

($T \gtrsim 50000 \text{ K}$)

→ 1-atomiges ideales Gas : $\gamma = c_p/c_v = \frac{5}{3}$

► $\nabla_a = \frac{\gamma-1}{\gamma} = 0.4$

→ Gerade mit Steigung 0.4 im $\log T - \log P$ -Diagr. , unterhalb der Grenzlinie $\nabla = \nabla_a$

bei niedrigen Temperaturen : Gas ist unvollständig ionisiert

Betrachten adiabatische Kompression , $\Delta \log P > 0$

→ bei vollst. Ionisation : $(\Delta \log T)_a \approx 0.4 \Delta \log P$

→ bei unvollst. Ionisation : $(\Delta \log T)_a < 0.4 \Delta \log P$
da ein Teil der Arbeit in Ionisationsenergie geht

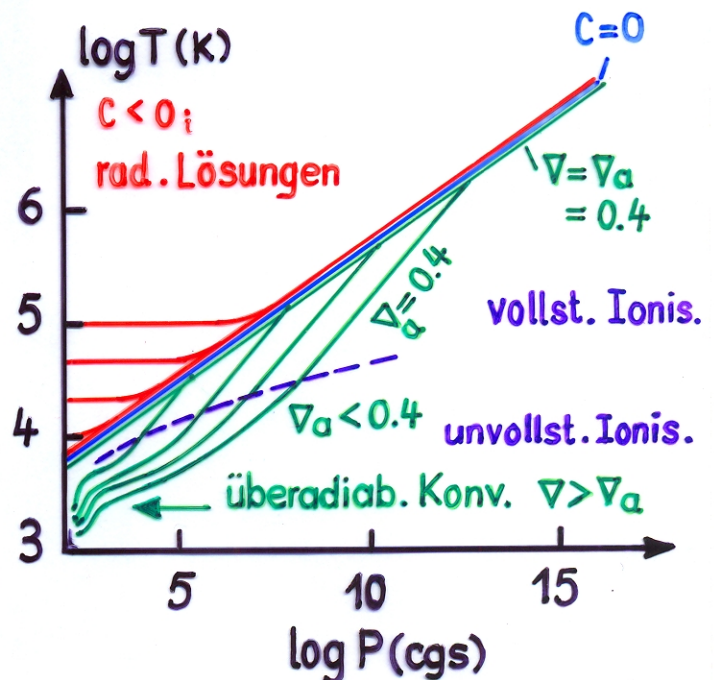
► $\nabla_a < 0.4$

- unmittelbar unterhalb der Photosphäre

ρ, P klein, Konvektion wird ineffektiv

► $\nabla > \nabla_a$: überadiabatische Konv. ($\nabla \rightarrow \nabla_r$)

→ Kurven im $\log T - \log P$ fallen steil ab

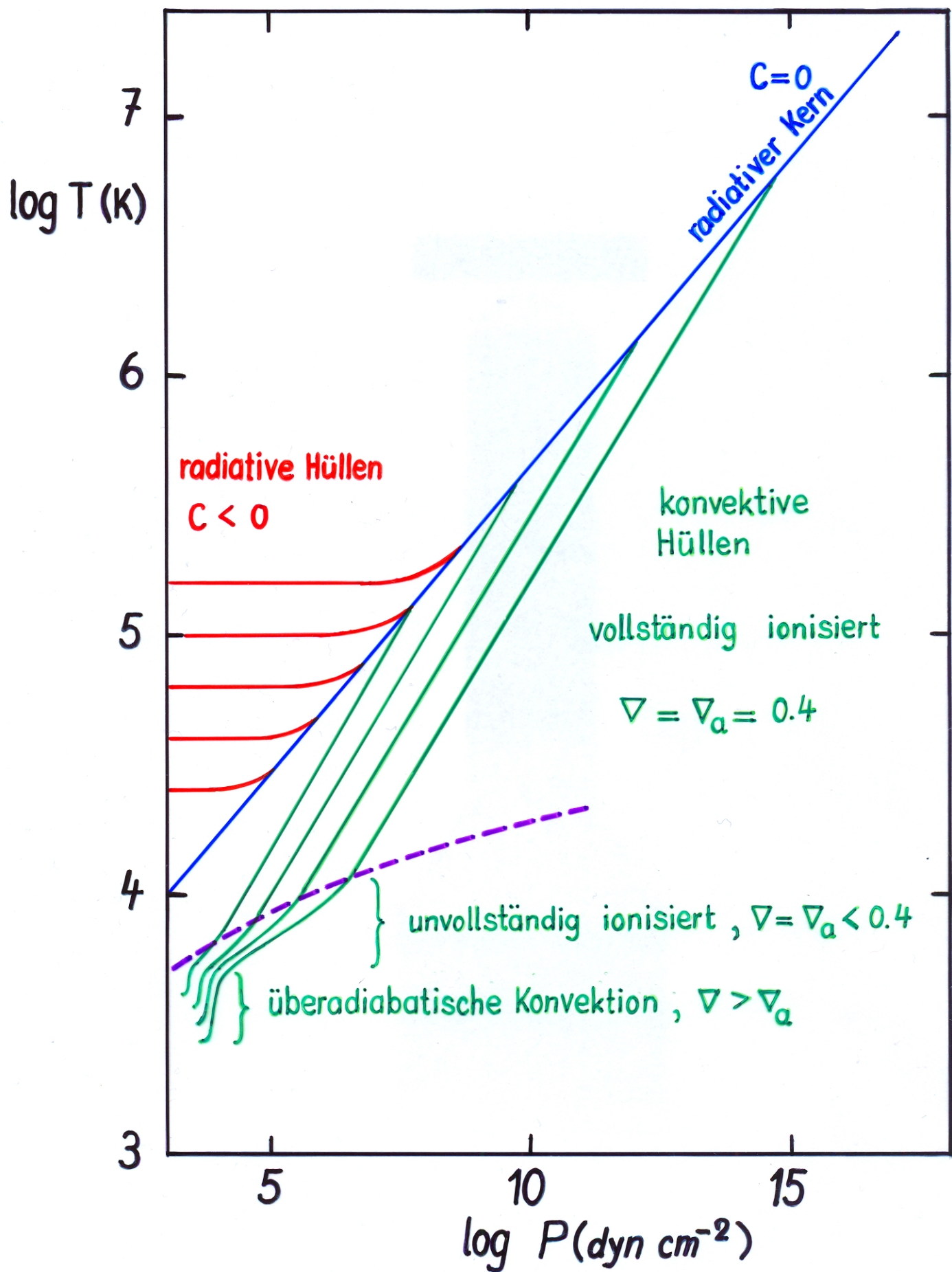
c) Zusammenfassung:

► **Radiative Hüllen** : Lösungen konvergieren stark zum Sterninneren

→ Äussere Randbedingungen haben geringen Einfluss auf den inneren Aufbau

► **Heisse Sterne** haben radiative Hüllen (aus $\log T - \log P$ -Diagramm)

Hüllenlösungen



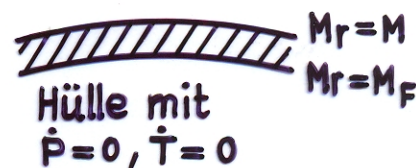
- Konvektive Hüllen : Lösungen im $\log T$ - $\log P$ -Diagramm sind stark divergent. $\rightarrow$ Tiefe der Konvektionszone hängt empfindlich von den äusseren Randbedingungen ab
 $\rightarrow$ Innerer Aufbau stark von äusseren Randbedingungen abhängig ! Unsicherheiten der Konvektionstheorie gehen mit ein.

- Kühle Sterne haben konvektive Hüllen

Grenze zwischen radiativen und konvektiven Hüllen : $T_{\text{eff}} \approx 6000 \text{ K}$
 ($\rightarrow$ Sonne mit $T_{\text{eff}} = 5780 \text{ K}$ hat eine konvektive Hülle)

11.4 Randbedingungen für numerische Rechenverfahren

Für praktische Zwecke : Der äussere Rand wird von $M_r = M$ nach innen zu $M_r = M_F < M$ verlegt.



Vorteil: Umgehung der Schwierigkeiten mit Hüllenslösungen. (Wählt M_F so, dass die Ionisationszonen innerhalb $M_F < M_r < M$ liegen. $\rightarrow$ Braucht für die Innenlösung nicht die Konvektionsgleichungen zu lösen)

Praktisches Vorgehen

1 Hüllenintegration von $M_r = M$ mit Versuchswerten für L und T_{eff} bis $M_r = M_F$

$$\rightarrow (L, T_{\text{eff}})_{M_r=M} \rightarrow (r_F(L, T_{\text{eff}}), T_F(L, T_{\text{eff}}), P_F(L, T_{\text{eff}}), L_F = L)$$

$$\rightarrow \text{Elimination von } L \text{ und } T_{\text{eff}} : P_F = P_F(r_F, L_F) \text{ und } T_F = T_F(r_F, L_F)$$

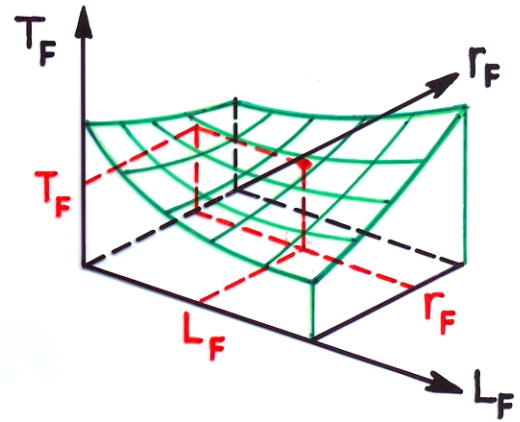
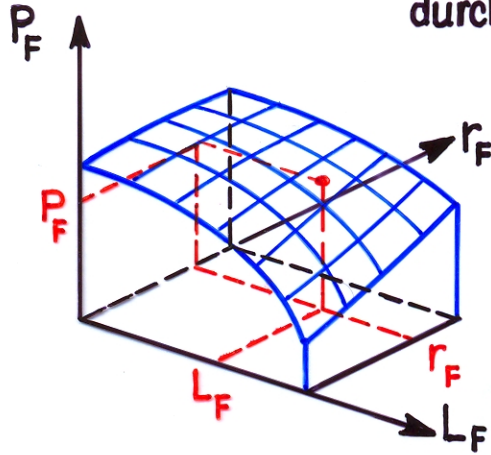
viele Hüllenintegrationen in der (L, T_{eff}) -Ebene liefern

2 Flächen $P_F = P(r_F, L_F)$ und $T_F = T(r_F, L_F)$ über der (r_F, L_F) -Ebene

$\rightarrow$ jeder Hüllenintegration mit (L, T_{eff}) entspricht je ein Punkt $P(r_F, L_F)$ und $T(r_F, L_F)$.

- Äussere Randbedingung bei $M = M_F$: $P(M_F) = P(r_F, L_F)$, $T(M_F) = T(r_F, L_F)$

Für praktische Zwecke : Randbedingung durch lokale Approximation der Flächen $P_F = P(r_F, L_F)$ und $T_F = T(r_F, L_F)$ durch Tangentialebenen



- Tangentialebene in der Umgebung eines Punktes $(r_F(L, T_{eff}), L_F(L, T_{eff}))$ ist durch 3 Hüllenintegrationen eindeutig bestimmt.
- $$\left. \begin{aligned} P_F &= a_1 L_F + a_2 r_F + a_3 \\ T_F &= b_1 L_F + b_2 r_F + b_3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Die Konstanten } a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \\ \text{werden durch die 3 Hüllenintegrationen} \\ \text{bestimmt} \end{array}$$

Bedingung für die Innenlösung:

$$\left. \begin{aligned} P_F &= P(M_F) = a_1 L(M_F) + a_2 r(M_F) + a_3 \\ T_F &= T(M_F) = b_1 L(M_F) + b_2 r(M_F) + b_3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{praktische äussere} \\ \text{Randbedingungen} \end{array}$$