

I DIE GRUNDGLEICHUNGEN DES STERNAUFBAUS

vereinfachende Annahmen: (Rechtfertigung später)

keine Rotation $\rightarrow$ keine Zentrifugalkräfte
 kein Magnetfeld $\rightarrow$ keine magnet. Kräfte
 kein Begleiter $\rightarrow$ keine Gezeitenkräfte $\rightarrow$ Einzelsterne
konstante Masse (wenigstens vorläufig)

1. Die Massenverteilung im Stern

äußere Kraft: nur Gravitation $\rightarrow$ sphärisch symmetr. Sterne

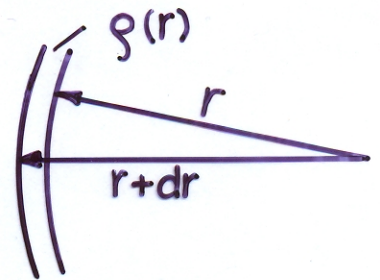
► nur eine Ortskoordinate erforderlich

r : Abstand vom Zentrum

$M_r :=$ Masse innerhalb von r

Sei $\rho(r)$ die Dichteverteilung

► $M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr$, $\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$



Für Theorie des Sternaufbaus: M_r als unabhängige Variable geeigneter

Eulersche Koordinate r

Lagrangesche Koordinate M_r

Grenzen des Sterns: $0 \leq r \leq R$ (variabel!)

$0 \leq M_r \leq M$ (fest)

zeitl. Ableitung: $\dot{r} = v$

$\dot{M}_r$ (keine konvekt. Gl.)

► 1. Grundgleichung des Sternaufbaus:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Eulersch

$$\frac{dr}{dM_r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho(r)}$$

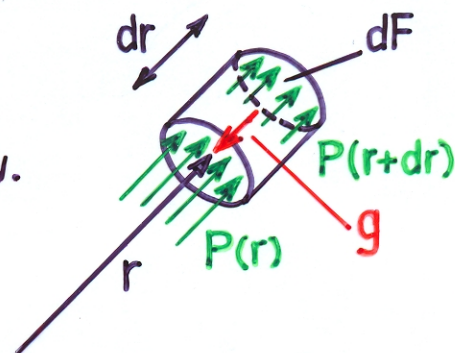
Lagrangesch

2. Die Impulsbilanz

2.1. Hydrostatisches Gleichgewicht

Annahme: Jedes Massenelement im Kräftegleichgew.

Welche Kräfte?



Druck: $(P(r) - P(r+dr))dF = -\frac{dP}{dr} dr dF$

Gravitation: $-dm |g| = -|g| \rho dr dF$, $|g| = \frac{GM_r}{r^2}$: Schwerebeschl.

► 2. Grundgleichung des Sternaufbaus (hydrostatisches Gleichgewicht)

$$\underline{\underline{\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho(r)}}$$

Eulersche Form

$$\underline{\underline{\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}}}$$

Lagrangesche Form

► $P(r_*) = \int_{r_*}^R \frac{GM_r}{r^2} \rho(r) dr + P_0$

$P(M_{r_*}) = \int_{M_{r_*}}^M \frac{GM_r}{4\pi r^4} dM_r + P_0$

P_0 : Oberflächendruck, praktisch = 0

Wichtig: P ist der Gesamtdruck, egal welches die Druckquellen sind!

Für einen Stern: $P = P_{\text{Gas}} + P_{\text{Strahlung}} (+ P_{\text{Neutrino}} + P_{\text{Magn.}} + P_{\text{Turb.}} + \dots)$

2.2 Die Bewegungsgleichung

Bewegung von Flüssigkeiten / Gasen durch **Navier-Stokes-Gleichung** beschrieben

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} - \underbrace{\frac{\eta}{\rho} \text{rot rot } \vec{v} + \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \text{grad div } \vec{v}}_{\substack{\text{viskose Kräfte} \\ \eta = \text{Viskosität}}}$$

$\uparrow$ äussere Kraft $\uparrow$ Druck

Übergang von der Eulerschen zur Lagrangeschen Schreibweise

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \text{ grad}$$

►
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} - \frac{\eta}{\rho} \text{rot rot } \vec{v} + \frac{4}{3} \frac{\eta}{\rho} \text{grad div } \vec{v}$$

Vereinfachungen:

- 1) $\eta = 0$, keine innere Reibung
 - 2) $\vec{F} = -\text{grad } \phi$, $\phi = \text{Gravitationspotential}$
 - 3) Kugelsymmetrie, $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$
- $\vec{v} = (\dot{r}, 0, 0)$, $\text{grad} \rightarrow \frac{d}{dr}$

►
$$\ddot{r} = -\frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$

Bestimmung von $\frac{d\phi}{dr}$ durch Lösung der Poisson-Gleichung:

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho$$

Lösung:
$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{GM_r}{r^2}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\phi}{dr} \right] = 4\pi G \rho$$

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d\phi}{dr} \right] = 4\pi G r^2 \rho = G \frac{dM_r}{dr}$$

$$r^2 \frac{d\phi}{dr} = GM_r$$

$$\rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{GM_r}{r^2}$$

►
$$\ddot{r} = -\frac{GM_r}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$$
 oder
$$\frac{\ddot{r}}{4\pi r^2} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} - \frac{dP}{dM_r}$$
 verallg. Form der 2. Grundgl.

2.3 Gestörtes hydrostatisches Gleichgewicht

Bedingung für hydrostatisches Gleichgewicht: $\ddot{r} = 0$
(nicht $\dot{v} = 0!$)

genähertes hydrost. Gleichgew.: $\left| \frac{\ddot{r}}{4\pi r^2} \right| \ll \frac{GM_r}{4\pi r^4}, \quad \left| \frac{dP}{dM_r} \right|$

stark gestörtes hydrost. Gleichgewicht:

a) Sei $\left| \frac{dP}{dM_r} \right| \ll \frac{GM_r}{4\pi r^4} \rightarrow |\ddot{r}| \approx \frac{GM_r}{r^2}$: Druckfreie Bewegung

Abschätzung: $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} \rightarrow \frac{R}{\tau_h^2} = \frac{GM}{R^2} \rightarrow \tau_h = \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2}$

τ_h = char. Einstellzeit für hydrost. Gleichgewicht $\approx$ Freifallzeit

Beispiele:

Sonne	: $R = 1R_\odot, M = 1M_\odot$	$\rightarrow \tau_h \approx 25 \text{ min}$
Riesenstern	: $R \approx 10^2 R_\odot, M \approx M_\odot$	$\rightarrow \tau_h \approx 20 \text{ Tage}$
Weisser Zwerg	: $R \approx 10^{-2} R_\odot, M \approx M_\odot$	$\rightarrow \tau_h \approx 1.5 \text{ sec}$
Neutronenstern	: $R \approx 10^{-5} R_\odot, M \approx M_\odot$	$\rightarrow \tau_h \approx 10^{-4} \text{ sec}$

Wichtig: $\tau_h \ll$ Entwicklungszeitskala ($\sim 10^6 - 10^{10}$ Jahre)

► Sterne sind immer im hydrostatischen Gleichgewicht

(mit Ausnahmen: Sternentstehung, Supernovae, pulsierende Sterne, z.B. δ -Cephei-St., Periode $\pi \approx \tau_h \sim \bar{\rho}^{-1/2}$)

b) Sei $\left| \frac{dP}{dM_r} \right| \gg \frac{GM_r}{4\pi r^4} \rightarrow |\ddot{r}| \approx \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}$: starke Druckstörung

Abschätzung: $\frac{dP}{dr} \rightarrow \frac{P}{R}, \frac{d^2 r}{dt^2} \rightarrow \frac{R}{\tau_h^2} \rightarrow \frac{R}{\tau_h^2} \approx \left(\frac{P}{\rho} \right)^{1/2} = v_s$
 $v_s = \text{Schallgeschw.}$

$\rightarrow \tau_h \approx \frac{R}{v_s} = \text{Schallaufzeit durch den Stern}$

Da $P/\rho \sim T \rightarrow v_s \sim T^{1/2} \rightarrow v_s$ gross im Sternzentrum (T hoch)
 v_s klein weit aussen (T niedrig) $\rightarrow \tau_h$ wird hauptsächlich durch die Aussenschichten bestimmt!

2.4 Zwischenbilanz

Bisher : 2 Gleichungen für 3 unbekannte Funktionen r , ρ und P

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dM_r} &= \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \\ \frac{dP}{dM_r} &= -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{unbekannt : } r(M_r), \rho(M_r), P(M_r) \\ &\text{Gleichungen lösbar, wenn es eine Zustandsgleichung} \\ &\text{der Form } \phi(P, \rho) = 0 \text{ gibt. Jedoch schon für} \\ &\text{ein ideales Gas ist } f(P, \rho, T) = 0 \end{aligned}$$

► Benötigen eine weitere Gleichung für die Temperatur T

2.5 Abschätzung von Zentraldruck P_c und Zentraltemperatur T_c

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho, \text{ für Abschätzung } \frac{dP}{dr} \rightarrow \frac{P_c - P_0}{R} = \frac{P_c}{R}$$

$$\frac{GM_r}{r^2} \rho \rightarrow \frac{G(M/2)}{(R/2)^2} \bar{\rho} = \frac{2GM}{R^2} \bar{\rho}$$

$$\text{► } \underline{P_c \approx \frac{2GM}{R} \bar{\rho} = \frac{6}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4}}$$

Beispiel : Sonne $P_c \approx 6 \cdot 10^{15} \text{ dyn cm}^{-2}$

Benützen für Abschätzung von T_c die Gleichung des idealen Gases

$$P = \frac{R}{\mu} \rho T \quad : \quad R = \text{Gaskonstante}, \mu = \text{Molekulargewicht [g/mol]}$$

$$\text{► } \underline{T_c \approx \frac{2G\mu}{R} \frac{M}{R}}$$

Beispiel : Sonne, $\mu = \frac{1}{2} \rightarrow T_c \approx 10^7 \text{ K}$

(Für $P \approx 6 \cdot 10^{15} \text{ dyn cm}^{-2}$, $T_c = 10^7 \text{ K}$ und $\rho = \bar{\rho} \approx 1 \text{ g cm}^{-3}$ ist die ideale Gasgleichung eine sehr gute Näherung)

3. Energiereservoir – Virialsatz

3.1 Energiereservoir

Welche Energiereservoir hat ein Stern? Wie lange reichen sie aus?

Dazu folgende Abschätzungen:

a) Thermische Energie : (mit idealem Gas)

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{Q}{\mu} \rho T \\ \frac{Q}{\mu} &= c_p - c_v = \frac{2}{3} c_v \end{aligned} \right\} \begin{aligned} c_v &= \frac{3}{2} \frac{Q}{\mu} \quad (\text{spez. Wärme pro Masseneinheit}) \\ \rightarrow \text{therm. Energie pro Masseneinheit} &= c_v T \end{aligned}$$

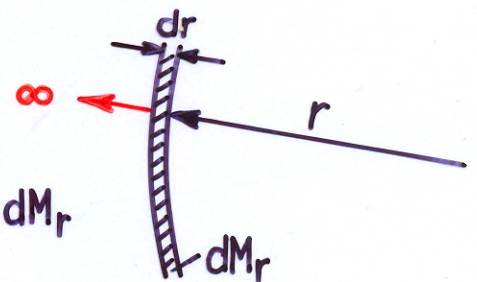
► totale therm. Energie
$$E_T = \int_0^M c_v T dM_r = \int_0^M \frac{3}{2} \frac{Q}{\mu} T dM_r = \frac{3}{2} \frac{Q}{\mu} \langle T \rangle M$$

Für die Sonne : $M_\odot = 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$, $\langle T \rangle \approx 10^7 \text{ K}$, $\mu = \frac{1}{2} \text{ g/Mol} \rightarrow E_{T,\odot} \approx 5 \cdot 10^{48} \text{ erg}$

b) Gravitationsenergie

Potentielle Energie einer Massenschale

$$dE_G = -dM_r \int_r^\infty \frac{GM_r}{x^2} dx = -dM_r GM_r \int_r^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{GM_r}{r} dM_r$$



► tot. pot. Energie
$$E_G = - \int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r \approx -\frac{GM^2}{R}$$

Für die Sonne : $E_{G,\odot} \approx -4 \cdot 10^{48} \text{ erg}$

Wie lange kann ein Stern von E_T oder E_G leben?

► Kelvin-Helmholtz-Zeit
$$\tau_{KH} \approx \frac{E_T}{L} \approx -\frac{E_G}{L} \approx \frac{GM^2}{RL}$$

Für die Sonne : $L_\odot = 4 \cdot 10^{33} \text{ erg s}^{-1} \rightarrow \tau_{KH,\odot} \approx 10^{15} \text{ s} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ Jahre}$

► $\tau_{KH,\odot} \ll \text{Alter der Sonne} \approx 4.6 \cdot 10^9 \text{ Jahre} \rightarrow E_G$ und E_T können nicht die Quellen der Leuchtkraft sein!

c) Nukleare Energie (aus dem Massendefekt bei Kernfusion)

Totaler Massendefekt der Sonne über $4.6 \cdot 10^9$ Jahre

$$\Delta M = \frac{L \Delta t}{c^2} \rightarrow \left(\frac{\Delta M}{M} \right)_{\odot} = \frac{L_{\odot} \Delta t}{M_{\odot} c^2} \approx 3 \cdot 10^{-4}$$

► Kernfusionen lassen M praktisch konstant. $\text{Max} \left(\frac{\Delta M}{M} \right) = 7 \cdot 10^{-3}$

3.2 Der Virialsatz

Warum ist $|E_G| \approx E_T$? $\leftrightarrow$ Virialsatz !

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} \quad | \cdot 4\pi r^3, \int_0^M \dots dM_r \rightarrow \int_0^M 4\pi r^3 \frac{dP}{dM_r} dM_r = - \int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r = E_G$$

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{dP}{dM_r} dM_r = \underbrace{[4\pi r^3 P]_0^M}_{=0} - \int_0^M 12\pi r^2 \frac{dr}{dM_r} P dM_r = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r$$

↑ 1. Grundgleichung

► $3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r = -E_G$

mit idealer Gasgleichung: $\frac{P}{\rho} = \frac{Q}{\mu} T = \frac{2}{3} c_v T$

$$\rightarrow 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r = 2 \int_0^M c_v T dM_r = 2E_T \quad \rightarrow \underline{\underline{E_T = \frac{3}{2} \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r}}$$

► $E_G = -2E_T$ Virialsatz (einfachste Form)

Konsequenz :

Sternkontraktion $\rightarrow -\delta E_G > 0$

- $\nearrow \delta E_T = -\frac{1}{2} \delta E_G > 0$: E_T nimmt zu $\rightarrow$ Stern wird heißer
- $\searrow -\frac{1}{2} \delta E_G > 0$ wird abgestrahlt

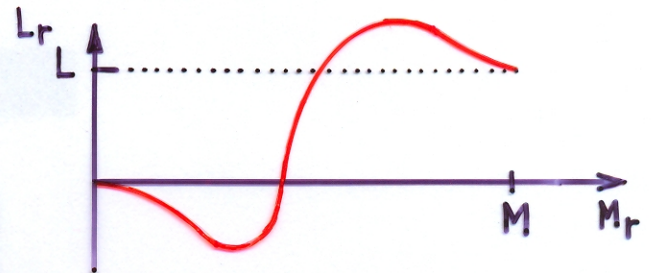
4. Der Energiesatz

Def. L_r = die pro Zeiteinheit durch eine Kugelschale mit Radius r strömende Energie (wie spielt dabei keine Rolle)

Randwerte für L_r : $L_r(M_r=0) = 0$: im Zentrum

$L_r(M_r=M) = L$ = totale Leuchtkraft des Sterns

Der Verlauf von $L_r(M_r)$ braucht nicht monoton zu sein!



4.1 Der Energiesatz in differentieller Form

Wie ändert sich L_r in einer Massenschale dM_r ?

Definitionen

ϵ_N : pro Zeit - und Masseneinheit frei werdende nukleare Energie (ohne Neutrinoverluste)

$-\epsilon_\nu$: " " " " durch Neutrinos abgeführte Energie

ϵ_g : " " " " durch Änderung des thermodynamischen Zustands frei werdende Energie

► $\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon_N - \epsilon_\nu + \epsilon_g$ Energiesatz in differentieller Form (3. Grundgleichung)

Berechnung von ϵ_N und ϵ_ν : kernphysikalisches Problem

→ $\epsilon_N = \epsilon_N(P, T, X_i)$, $\epsilon_\nu = \epsilon_\nu(P, T, X_i)$

Berechnung von ϵ_g : thermodynamisches Problem

1. Hauptsatz der Thermodynamik : $\epsilon_g = - \frac{dQ}{dt} = -T \frac{dS}{dt}$

(Q, S pro Masseneinheit)

Berechnung von $dQ(\vartheta, T)$

$$\begin{aligned} dQ &= du + PdV = du + P d\left(\frac{1}{\vartheta}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{\vartheta} dT + \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)_T d\vartheta - \frac{P}{\vartheta^2} d\vartheta \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{\vartheta} dT + \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)_T - \frac{P}{\vartheta^2} \right\} d\vartheta \quad (*) \end{aligned}$$

Wenn $d\vartheta = 0$: $dQ = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{\vartheta} dT = c_v dT \Leftrightarrow \underline{c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{\vartheta}}$

Eliminierung von $(\partial u / \partial \vartheta)_T$ in (*):

Differential der Entropie: $dS = \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{\vartheta} dT + \frac{1}{T} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)_T - \frac{P}{\vartheta^2} \right\} d\vartheta$

$$= \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\vartheta} dT + \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)_T d\vartheta$$

$$\Rightarrow \underline{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{\vartheta} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{\vartheta}} \quad \text{und} \quad \underline{\left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)_T - \frac{P}{T\vartheta^2}}$$

Benützen Gleichheit der 2. gemischten Ableitungen: $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial \vartheta} = \frac{\partial^2 S}{\partial \vartheta \partial T}$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta \partial T}} = -\frac{1}{T^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)_T + \cancel{\frac{1}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial T \partial \vartheta}} + \frac{P}{T^2 \vartheta^2} - \frac{1}{T \vartheta^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\vartheta}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)_T - \frac{P}{\vartheta^2} = -\frac{T}{\vartheta^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\vartheta} \quad \blacktriangleright \quad \underline{\underline{dQ = c_v dT - \frac{T}{\vartheta^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\vartheta} d\vartheta}}$$

Berechnung von $dQ(P, T)$ (Wechsel von (ϑ, T) auf (P, T))

Dazu Zustandsgleichung: $\vartheta = \vartheta(P, T)$, mit

$$d\vartheta = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial P}\right)_T dP + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial T}\right)_P dT \Leftrightarrow \frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{P}{\vartheta} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{P} + \frac{T}{\vartheta} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial T}\right)_P \frac{dT}{T}$$

Def.: $\underline{\alpha = \left(\frac{\partial \ln \vartheta}{\partial \ln P}\right)_T}$, $\underline{\delta = -\left(\frac{\partial \ln \vartheta}{\partial \ln T}\right)_P} \rightarrow \underline{\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T}}$

Zustandsgl. in diff. Form

N.B.: Für ein ideales Gas ist $\alpha=1$ und $\delta=1$

$$\left. \begin{aligned} dQ &= c_v dT - \frac{T}{\varrho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\varrho d\varrho \\ d\varrho &= \left(\frac{\partial \varrho}{\partial P} \right)_T dP + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_P dT \end{aligned} \right\} \underline{\underline{dQ = \left(c_v - \frac{T}{\varrho^2} \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial \varrho}{\partial T} \right) dT - \frac{T}{\varrho^2} \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial \varrho}{\partial P} dP}}$$

ausserdem : $\underline{\underline{\left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P \equiv c_P = c_v - \frac{T}{\varrho^2} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\varrho \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_P}}$ spezifische Wärme

wegen $\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\varrho = - \frac{\left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_P}{\left(\frac{\partial \varrho}{\partial P} \right)_T}$ folgt $\underline{\underline{dQ = c_P dT + \frac{T}{\varrho^2} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_P dP}}$

da weiter $\frac{T}{\varrho} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial T} \right)_P = \left(\frac{\partial \ln \varrho}{\partial \ln T} \right)_P = -\delta$

folgt $\underline{\underline{dQ = c_P dT - \frac{\delta}{\varrho} dP}}$

und $\underline{\underline{\varepsilon_g = - \frac{dQ}{dt} = - c_P \frac{dT}{dt} + \frac{\delta}{\varrho} \frac{dP}{dt}}}$

Umformung auf die Variablen P und T ergibt

$$\underline{\epsilon_g(P, T) = -c_p \frac{dT}{dt} + \frac{\delta}{\varrho} \frac{dP}{dt}}, \text{ wobei } \delta = - \left(\frac{\partial \ln \varrho}{\partial \ln T} \right)_P$$

► $\underline{\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon_N - \epsilon_v - c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\varrho} \frac{\partial P}{\partial t}}$ Energiesatz in differentieller Form
3. Grundgleichung

Spezialfälle:

a) Fast immer ist $\epsilon_v \ll \max(\epsilon_N, |\epsilon_g|)$ und kann vernachlässigt werden

b) Stationäre Sterne (im thermischen Gleichgewicht, nicht explizit von der Zeit abhängig)

$$\dot{P} = 0, \dot{T} = 0 \Rightarrow \underline{\epsilon_g = 0}$$

Aber: aus $\epsilon_g = 0$ folgt nicht $\dot{P} = 0$ und $\dot{T} = 0$!

für stationäre Sterne : $\underline{\frac{dL_r}{dM_r} = \epsilon_N}$

c) adiabatische Änderungen eines Sterns : $dQ = 0 \rightarrow c_p dT - \frac{\delta}{\varrho} dP = 0$

oder $c_p T d \ln T - \frac{\delta}{\varrho} P d \ln P = 0$

► adiabatischer Temperaturgradient $\underline{\underline{\nabla_a = \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_a = \frac{P \delta}{c_p \varrho T}}}$

$\underline{\epsilon_g = -c_p T \left(\frac{\dot{T}}{T} - \nabla_a \frac{\dot{P}}{P} \right)}$ → Es kann $\epsilon_g = 0$ aber $\dot{T} \neq 0$ und $\dot{P} \neq 0$ sein !

4.2 Die integrale Form des Energiesatzes

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \varepsilon_N - \varepsilon_V - \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{g^2} \frac{\partial g}{\partial t} \quad \Bigg| \int_0^M \dots dM_r$$

$$\Rightarrow L = -\frac{\partial E_N}{\partial t} - L_V - \frac{\partial E_T}{\partial t} + \int_0^M \frac{P}{g^2} \frac{\partial g}{\partial t} dM_r$$

Zur Berechnung von $\int_0^M \frac{P}{g^2} \frac{\partial g}{\partial t} dM_r$

benützen wir $-E_G = 3 \int_0^M \frac{P}{g} dM_r$ (vgl. 3.2)

$$\rightarrow -\frac{\partial E_G}{\partial t} = 3 \underbrace{\int_0^M \frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial t} dM_r}_{\approx ?} - 3 \int_0^M \frac{P}{g^2} \frac{\partial g}{\partial t} dM_r$$

benützen jetzt nach t abgeleitete 2. Grundgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P}{\partial M_r} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{GM_r}{4\pi r^4} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial M_r} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) = 4 \frac{GM_r}{4\pi r^5} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right) \quad \Bigg| \cdot 4\pi r^3, \int_0^M \dots dM_r$$

$$\rightarrow \underbrace{\int_0^M 4\pi r^3 \frac{\partial}{\partial M_r} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) dM_r}_{\text{linke Seite}} = \underbrace{4 \int_0^M \frac{GM_r}{r^2} \frac{\partial r}{\partial t} dM_r}_{\text{rechte Seite}}$$

linke Seite part. integriert = $\underbrace{\left[4\pi r^3 \frac{\partial P}{\partial t} \right]_0^M}_{=0} - \int_0^M 12\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial M_r} \frac{\partial P}{\partial t} dM_r = -3 \int_0^M \frac{1}{g} \frac{\partial P}{\partial t} dM_r$

rechte Seite = $-4 \frac{\partial}{\partial t} \int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r = 4 \frac{\partial E_G}{\partial t}$

$$\rightarrow -\frac{\partial E_G}{\partial t} = -4 \frac{\partial E_G}{\partial t} - 3 \int_0^M \frac{P}{g^2} \frac{\partial g}{\partial t} dM_r \rightarrow \underline{\underline{\int_0^M \frac{P}{g^2} \frac{\partial g}{\partial t} dM_r = -\frac{\partial E_G}{\partial t}}}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{L + L_V = -\frac{\partial}{\partial t} [E_N + E_T + E_G]}} \quad \text{integrale Form des Energiesatzes}$$

Beispiel: Sei $L_V = 0$, $E_N = \text{const.}$, d.h. $\dot{E}_N = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Energiesatz : } L = -\dot{E}_T - \dot{E}_G \\ \text{Virialsatz : } \dot{E}_G = -2\dot{E}_T \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L = -\frac{1}{2} \dot{E}_G \\ \dot{E}_T = -\frac{1}{2} \dot{E}_G \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{abgestr. Energie} \\ \text{Erhöhung der inneren} \\ \text{Energie} \end{array}$$

► lebt ein Stern von E_G , so ist $\dot{E}_G < 0 \rightarrow \dot{E}_T = -\frac{1}{2} \dot{E}_G > 0 \rightarrow$ Stern heizt sich auf! Wegen $L > 0$ ist

$$\dot{E}_G = \int_0^M \frac{GM_r}{r} \frac{\dot{r}}{r} dM_r < 0$$

► $\dot{r} < 0$ für wesentliche Teile des Sterns $\rightarrow$ Kontraktion

4.3 Zusammenhang zwischen Energiesatz und dem Virialsatz in allg. Form

$$\frac{\partial L_r}{\partial M_r} + \epsilon_V - \epsilon_N + \frac{\partial u}{\partial t} = -P \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad \Bigg| \int_0^M \dots dM_r$$

$$\rightarrow L + L_V + \dot{E}_N + \dot{U} = \underbrace{- \int_0^M P \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) dM_r}_{\text{rechte Seite}} = \text{mechanische Energie des Sterns}$$

Berechnung der rechten Seite:

$$\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} - \frac{\ddot{r}}{4\pi r^2} \quad \Bigg| \cdot 4\pi r^2 \dot{r} \quad ; \quad \underline{\text{Def.}} \quad V_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rightarrow \frac{\partial V_r}{\partial M_r} = \frac{1}{\rho}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V}_r \frac{\partial P}{\partial M_r} &= -\frac{GM_r}{r} \frac{\dot{r}}{r} - \dot{r} \ddot{r} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{GM_r}{r} - \frac{1}{2} \dot{r}^2 \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial M_r} [\dot{V}_r P] - P \frac{\partial}{\partial M_r} \dot{V}_r = \frac{\partial}{\partial M_r} [\dot{V}_r P] - P \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{-P \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\partial}{\partial M_r} [\dot{V}_r P] - \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{GM_r}{r} + \frac{1}{2} \dot{r}^2 \right]} \quad *$$

Bedeutung von $\frac{\partial}{\partial M_r} [\dot{V}_r P]$: $\dot{V}_r P = 4\pi r^2 \dot{r} P = P F \dot{r} = K \dot{r} =$ Leistung für Kontr./Expansion

Integration von (*) ergibt

$$- \int_0^M P \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) dM_r = \underbrace{[\dot{V}_r P]_0^M}_{=0} - \frac{\partial}{\partial t} [E_G + E_K], \quad \text{wobei } E_K = \int_0^M \frac{1}{2} \dot{r}^2 dM_r = \text{kin. Energie}$$

► allg. Form des Energiesatzes in der integralen Form:

$$\underline{L + L_v = -\frac{\partial}{\partial t} [E_N + U + E_G + E_K]}$$

Wenn $\ddot{r} \neq 0 \rightarrow E_K$ als mögliche Energiequelle

Der Virialsatz

Ausgangspunkt: $\frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4} - \frac{\ddot{r}}{4\pi r^2} \quad | \cdot 3V_r, (V_r = \frac{4\pi}{3} r^3)$

$$\Rightarrow 3V_r \frac{\partial P}{\partial M_r} = -\frac{GM_r}{r} - r\ddot{r} = -\frac{GM_r}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r^2}{\partial t^2} + \dot{r}^2$$

$$V_r \frac{\partial P}{\partial M_r} = \frac{\partial}{\partial M_r} [V_r P] - P \frac{\partial V_r}{\partial M_r} = \frac{\partial}{\partial M_r} [V_r P] - P \frac{1}{\rho}$$

$$\rightarrow 3 \frac{\partial}{\partial M_r} [V_r P] - 3 \frac{P}{\rho} = -\frac{GM_r}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r^2}{\partial t^2} + \dot{r}^2 \quad | \int_0^M \dots dM_r$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^M r^2 dM_r}_{=\frac{3}{2}\theta} - \underbrace{2 \int_0^M \frac{1}{2} \dot{r}^2 dM_r}_{E_K} = \underbrace{-3[V_r P]_0^M}_{=0} - \underbrace{\int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r}_{E_G} + 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r, \quad \theta = \text{Trägheitsmom.}$$

► $\underline{\frac{3}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - 2E_K = E_G + 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r}$: allg. Form des Virialsatzes
(für beliebige Zustandsgleichung und Sterne mit $\ddot{r} \neq 0$)

Mit Zustandsgleichung: $\frac{P}{\rho} = (\gamma-1)u, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v}$

$$\rightarrow \underline{\frac{3}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - 2E_K = E_G + 3(\gamma-1) \int_0^M u dM_r = E_G + 3(\gamma-1)U} \quad (\gamma \text{ unabh. von } M_r)$$

Für Sterne im hydrost. Gleichgewicht ($\ddot{r}=0$): $\underline{3(\gamma-1)U = -E_G}$

Beispiele zum Virialsatz

a) 1-atomiges, ideales Gas:
$$\left. \begin{aligned} P &= nkT \\ \varrho u &= \frac{3}{2} nkT \end{aligned} \right\} \frac{P}{\varrho} = \frac{2}{3} u \rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

► $2U + E_G = 0$

Mit $L_V = 0$, $E_K = 0$ (d.h. $\ddot{r} = 0$), $\dot{E}_N = 0$ folgt aus dem Energiesatz

$L = -\frac{1}{2} \dot{E}_G$

b) 2-atomiges, ideales Gas: 5 Freiheitsgrade pro Teilchen ($f=5$)
(Translation: 3, Rotation: 1, Vibration: 1)

allg: $\gamma = 1 + \frac{2}{f}$, hier also: $\gamma = 7/5$

► $\frac{6}{5} U + E_G = 0$ $\rightarrow \dot{U} = -\frac{5}{6} \dot{E}_G$

Mit $L_V = 0$, $E_K = 0$ (d.h. $\ddot{r} = 0$), $\dot{E}_N = 0$ folgt aus dem Energiesatz

$L = -\frac{1}{6} \dot{E}_G$

c) Photonengas:
$$\left. \begin{aligned} P &= P_{\text{Str.}} = \frac{1}{3} a T^4 \\ \varrho u_{\text{Str.}} &= a T^4 \end{aligned} \right\} \frac{P_{\text{Str.}}}{\varrho} = \frac{1}{3} u_{\text{Str.}} \rightarrow \gamma = \frac{4}{3}$$

► $U + E_G = 0$

Mit $L_V = 0$, $E_K = 0$ (d.h. $\ddot{r} = 0$), $\dot{E}_N = 0$ folgt aus dem Energiesatz

$L = 0$

d) Gesamtenergie wenn $E_K = 0$, $E_N = 0$:

$E_{\text{tot}} = E_G + U = -(3\gamma - 4)U = \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} E_G$ $\rightarrow$ $L = -\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \dot{E}_G$

Wegen $U > 0$ folgt $E_{\text{tot}} < 0$, d.h. gravitativ gebundener Stern
nur wenn $\gamma > 4/3$

4.4. Zeitskalen

a) nukleare Zeitskala: (Stern lebt praktisch nur von E_N , d.h. $\dot{E}_T, \dot{E}_G \ll \dot{E}_N$)

$$\rightarrow \frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon_N - \epsilon_\gamma \quad \text{oder} \quad L + L_\gamma = -\frac{\partial E_N}{\partial t} \Rightarrow \frac{L + L_\gamma}{E_N} = -\frac{\partial \ln E_N}{\partial t} = \frac{1}{\tau_N}$$

$$\blacktriangleright \quad \underline{\tau_N = \frac{E_N}{L + L_\gamma}} \quad : \text{ nukleare Zeitskala}$$

b) thermische Zeitskala, Kelvin-Helmholtz-Zeit

$$\dot{E}_N = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L_r}{\partial M_r} = \epsilon_g \quad \text{oder} \quad L = -\frac{\partial}{\partial t} [E_G + E_T] = -\frac{3\gamma-4}{3(\gamma-1)} \frac{\partial E_G}{\partial t}$$

$$\underline{\text{1-atomiges Gas:}} \quad L = -\frac{1}{2} \frac{\partial E_G}{\partial t} = \frac{\partial E_T}{\partial t}$$

$$\frac{L}{E_G} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln E_G}{\partial t} = \frac{1}{\tau_{KH}} \quad \rightarrow \quad \underline{\tau_{KH} = \frac{E_G}{L}} \quad : \text{ Kelvin-Helmholtz-Zeit}$$

$$\frac{L}{E_T} = \frac{\partial \ln E_T}{\partial t} = \frac{1}{\tau_T} \quad \rightarrow \quad \underline{\tau_T = \frac{E_T}{L}} \quad : \text{ thermische Zeitskala}$$

c) wann ist ϵ_g wichtig?

$$\text{nach Def. ist} \quad L = \frac{E_T}{\tau_T} = \frac{E_N}{\tau_N} \quad \rightarrow \quad \frac{\tau_T}{\tau_N} \approx \frac{\tau_{KH}}{\tau_N} \ll 1$$

Energiesatz ($L_\gamma=0, E_K=0$, ideales Gas mit $\gamma=5/3$):

$$L = -\frac{\partial}{\partial t} [E_N + E_G + U] = -\frac{\partial}{\partial t} [E_N - (3\gamma-4)U] = -\frac{\partial}{\partial t} [E_N - U]$$

$$\text{Sei } \Delta t = \tau_*, \text{ so dass } \frac{\Delta E_T}{E_T} \approx 1$$

$$\rightarrow L = -\frac{\Delta E_N}{\Delta t} + \frac{\Delta E_T}{\Delta t} = -\frac{\Delta E_N}{\Delta t} + \underbrace{\frac{\Delta E_T}{E_T}}_{\approx 1} \frac{E_T}{\Delta t} = -\frac{\Delta E_N}{\Delta t} + L \frac{\tau_T}{\Delta t}$$

$$\rightarrow \underline{L \left(1 - \frac{\tau_T}{\tau_*}\right) = -\frac{\Delta E_N}{\tau_*}} \quad ; \text{ Wenn } \tau_* \gg \tau_T \rightarrow L \approx -\frac{\Delta E_N}{\tau_*} \rightarrow \epsilon_g \approx 0$$

$\blacktriangleright \epsilon_g$ ist nur dann wichtig, wenn die charakteristische Entwicklungszeitskala $\tau_* \lesssim \tau_T \approx \tau_{KH}$ ist.