# DER ZUFALL IN DER ASTRONOMIE

## publiziert in: Acta Leopoldina, Halle

Gerhard Börner
Max-Planck-Institut für Astrophysik
Karl-Schwarzschild-Str. 1, 85748 Garching

## 1 Einleitung

Der Zufall in der Astronomie zeigt sich häufig ganz direkt in der Art, wie unbeabsichtigt aufregende Entdeckungen gemacht werden, sobald ein neues Instrument benützt wird. Als Beispiele seien hier nur genannt, die Entdeckung der "Fluchtbewegung der Spiralnebel" durch Hubble, die Auffindung der Pulsare oder der Quasare, oder auch die überraschende Entdeckung eines kosmischen Labors für die Allgemeine Relativitätstheorie, des Binärpulsars PSR 1913+16 (Hulse and Taylor 1974).

Auch in den eher spekulativen Überlegungen, warum das Universum so beschaffen ist, wie wir es vorfinden und nicht anders, wie es nach den physikalischen Gesetzen auch sein könnte, spielen Zufallsüberlegungen eine Rolle: Geht man von einem - wie immer gearteten - Quantenzustand am Anfang aus, so gibt es viele Möglichkeiten ein Universum zu realisieren. Leben, Intelligenz und wir selber finden Platz in einem Kosmos, der mit seinen Eigenschaften und den in ihm geltenden Gesetzen die Entstehung von Leben ermöglicht. Unser jetziges Universum wird also zufällig ausgewählt nach diesen Vorgaben, aus einer Vielzahl möglicher Welten.

Im Bereich der astronomischen Entdeckungen und der Spekulationen über den Anfang der Welt gibt es viele spannende Geschichten, aber in diesem Vortrag möchte ich mich doch darauf beschränken, an einigen Beispielen darzulegen, mit welchem statistischen Methoden astronomische Fragestellungen behandelt werden. Seit den Zeiten der Antike gab es enge Verbindungen zwischen der Astronomie und statistischen Methoden und Begriffen. Die Konzepte von Mittelwertbildung und Fehleranalyse wurden tatsächlich an Hand von astronomischen Daten entwickelt. In der Neuzeit begann eine rege Entwicklung statistischer Methoden besonders im 18. Jahrhundert, als man die Bewegungen der Himmelskörper mit Newtons Mechanik erklärte und dafür auch eine präzise Analyse der Messungen benötigte. Häufig ging es um die Bestimmung von Kometenbahnen (erwähnenswert die Entdeckung des periodischen Kometen durch Halley) und um die Erklärung kleiner Abweichungen der Planeten und des Mondes von den einfachen elliptischen Bahnen im Gravitationsfeld einer Punktmasse. Aus diesen astronomischen Anwendungen entstanden die Grundlagen der mathematischen Statistik, speziell die Methode der kleinsten Quadrate und die Fehlertheorie.

Während etwa mit der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts der Einfluß der Astronomie auf die Entwicklung der Statistik stark zurück ging, blieb natürlich bis heute der Gebrauch statistischer Methoden ein wesentliches Element dieses Forschungsfeldes.

Bevor ich mich diesen ernsthaften Aspekten zuwende, möchte ich noch eine eher anekdotische Anmerkung machen, zu statistischen Aussagen über die Lebensdauer technischer Zivilisationen. Diese als "Untergangsargument" ("doomsday" oder "delta t" Argument) bezeichnete Überlegung wurde angestellt im Zusammenhang mit den Diskussionen um die Entwicklung von Leben auf anderen Planeten und die Suche nach außerirdischer Intelligenz. Die Schätzungen auf streng wissenschftlicher Basis für die Gesamtzahl von Zivilisationen mit interstellarer Kommunikationsmöglichkeit in der Milchstraße liegen zwischen 1 (unserer eigenen) und $10^6$. In diesem Zusammenhang wurden statistische Berechnungen zur Lebensdauer technologisch hochstehender Zivilisationen veröffentlicht (Gott 1993; Leslie 1996).

Die Grundlage ist das Bayessche Theorem, das für zwei Erreignisse oder Hypothesen A und B die Wahrscheinlichkeiten p(A), p(B) und p(AB)(Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von A und B) mit den bedingten Wahrscheinlichkeit p(A—B) (Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A unter der Bedingung, daß B bereits erfüllt ist) und p(B—A) verknüpft.

$$p(A)p(B \mid A) = p(AB) = p(B)p(A \mid B) \qquad (1)$$

Dieses Theorem läßt sich in der axiomatisch begründeten Wahrscheinlichkeitstheorie fast trivial folgern, aber seine Anwendung auf Hypothesen in der wirklichen Welt ist trickreich. Es kann leichtsinnig angewandt zu absurden Ergebnissen führen, denn es kann Zweideutigkeiten geben in der Bedeutung der Wahrscheinlichkeiten auf der linken und rechten Seite von Gleichung (1): Die "Wahrscheinlichkeit von A" hat keine absolute Bedeutung unabhängig von Vorkenntnissen. Das "doomsday" Argument in einer typischen Version läuft folgendermaßen ab: Die Hypothese A lautet, daß die Erdbevölkerung als Beispiel für eine technologisch hochstehende Zivilisation insgesamt weniger als X Menschen hervorbringen wird. Die Hypothese B sagt, daß der Beobachter (wir, jetzt) zu einer Zeit lebt, in der bis jetzt weniger als Y Menschen geboren wurden. Aus historischen und paläontologischen Untersuchungen wissen wir, daß $p(B) \simeq 1$ falls $Y \simeq 10^{11}$. Außerdem $p(A) \leq 1$ und wegen (1): $p(A \mid B) \leq p(B \mid A)$.

Nun wird die Wahrscheinlichkeit $p(B \mid A)$ abgeschätzt, durch die Überlegung, daß die Wahrscheinlichkeit zu den ersten Y in einer Gesamtbevölkerung von X zu gehören kleiner als $Y/X$ ist. Folglich: $p(B \mid A) < Y/X$ und damit auch

$$p(A \mid B) < Y/X \qquad (2)$$

(2) sagt nun aus, daß die menschliche Rasse nur mit einer Wahrscheinlichkeit, die kleiner ist als 10%, $10^{12}$ Individuen hervorbringen wird. Unsere Zivilisation kann mit 10% Wahrscheinlichkeit bis zu 500 Generationen hervorbringen, falls die gegenwärtige Bevölkerungszahl konstant bleibt, oder weniger als 500 Generationen, falls die Weltbevölkerung wächst. Dieses Argument scheint aus dem Bayessche Theorem zu folgen, allerdings als Resultat einer falschen Anwendung:

Die beiden Größen p(B) und $p(B \mid A)$ beruhen nicht auf einer identischen Einteilung der Welt in Bekanntes und Unbekanntes. Die Abschätzung $p(B) \simeq 1$ enthält die Annahme, daß wir genügend Kenntnisse aus der Paläontologie haben um sicher zu sein, daß wir zu den ersten 100 Milliarden Menschen gehören. Der Abschätzung $p(B \mid A) \ll 1$ liegt die Annahme zugrunde, daß wir nichts über unseren Platz in der Geschichte der menschlichen Art wissen. Die beiden Schätzungen der Wahrscheinlichkeit beruhen auf inkompatiblen Annahmen und deshalb ist das "doomsday" Argument ein Fehlschluß. Eigentlich ist die Aufgabe unterbestimmt. Die Suche nach extraterrestrischer Intelligenz muß also nicht aufgegeben werden.

## 2 Inverse Probleme

In der Astrophysik dominiert die direkte Methode der Beschreibung. Ein physikalisches Modell wird mit den Daten verglichen oder an die Daten angepaßt. Hauptsächlich handelt es sich ja um die Existenz von gasförmigen Konfigurationen im Gleichgewicht (Sterne, interstellares Medium, Galaxien), wobei die Wechselwirkung von Strahlung und Materie durch die Quantenmechanik bestimmt ist. Statistische Methoden spielen eine Rolle, wenn die physikalischen Prozesse zu komplex werden, etwa bei der Bildung der Spektrallinien in der Atmosphäre eines Sterns, wobei der Strahlungstransport durch Monte-Carlo Methoden beschrieben wird.

Häufig werden in der Astronomie aber auch inverse Probleme behandelt, in denen aus den Beobachtungen Rückschlüsse auf teils unbekannte, teils unbeobachtbare Prozesse gezogen werden. Dies ist die übliche Situation in der Astronomie, denn die Beobachter sind weit entfernt vom Objekt, d.h. in situ Messungen sind nicht möglich, und das theoretische Verständnis ist begrenzt, d.h. die beobachtbaren Größen können nicht direkt auf der Basis eines physikalischen Modells vorhergesagt werden.

Bereits von den Astronomen der Antike wurden inverse Probleme betrachtet: Falls zahlreiche zweidimensionale Projektionen eines Körpers gegeben sind, was ist die dreidimensionale Form? So wurde die Kugelgestalt der Erde aus der Beobachtung abgeleitet, daß bei Mondfinsternis der Erdschatten auf der Scheibe des Mondes stets einen kreisförmigen Rand hat. Die allgemeine Form in eindimensionaler Schreibweise eines inversen Problems läßt sich wie folgt darstellen:

$$\phi(x) = \int \psi(\xi) P(x \mid \xi) d\xi \tag{3}$$

(Dies ist eine Fredholm-Integralgleichung erster Art) dabei sind: $\phi$: die beobachtbare Funktion $\psi$: die interessierende Größe; P: beschreibt Mittelungs- oder Meßprozesse. Die Zählung von Objekten, die Linienbildung, die Beschreibung von Instrumentenfehlern lassen sich so darstellen. $P(x \mid \xi)$ beschreibt dann etwa die Form einer Spektrallinie oder die Ausschmierung einer Punktquelle ("point spread function") durch ein Teleskop. Die anfangs notwendigen Korrekturen an den Bildern des Hubble Space Telescopes waren Beispiele derartiger inverser

Problemstellungen. Ein wichtiger Aspekt ist auch der Effekt von Meßfehlern auf eine beobachtete Verteilung. $\psi(\xi)$ ist dabei im Prinzip auch beobachtbar, aber Fehler $x - \xi$ treten auf. Häufig nimmt man eine Normalverteilung für die Fehler an:

$$P(x \mid \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma}\right]$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi(\xi)$ kann druch Invertieren der Integralgleichung (3) gefunden werden. Als Anwendungsbeispiel betrachten wir eine Dekonvolutionsmethode, die bei der Bildauswertung und Spektrumsgewinnung eine wichtige Rolle spielt. Die Richardson-Lucy Dekonvolution (Richardson 1972: Lucy 1974) geht im Gegensatz zu Regularisierungsmethoden von einem Anfangsmodell aus, das eine konstante Dichteverteilung aufweist und möglichst geglättet ist und das in einem Iterationsverfahren schrittweise verändert wird durch zusätzliche Information aus den Beobachtungsdaten. Obwohl diese Verfahren viele Erfolge bei der praktischen Anwendung haben, gibt es noch eine Anzahl offener Fragen. Sehr wichtig erscheint mir etwa das Problem, wann die Iteration beendet werden sollte, d.h. wann die Schätzung des Signals als "gut" oder "konvergent" bezeichnet werden kann.

Das Inversionsproblem läßt sich (analog zu (3)) formulieren als eine Beziehung zwischen Zählraten $c_i (i = 1 \cdots N)$, dem eigentlichen Signal $u_j (j = 1 \cdots M)$ und dem Rauschen $n_i$

$$c_i = \sum_{j=1}^{M} p_{ij} u_j + n_i \tag{4}$$

$p_{ij}$ beschreibt die Abbildungsfunktion einer Punktquelle ("point spread function"). Die Beobachtung selbst könnte ein 1-D Sepektrum oder ein 2D Bild sein.

Das Rauschen $n_i$ besteht aus einem relativ gleichmäßigen Hintergrund, der einfach vor der weiteren Datenverarbeitung abgezogen werden kann und einer Komponente, die mit der Registrierung des Signals zusammenhängt. Ein typisches Beispiel ist die Schwankung von Pixel zu Pixel in CCD Empfängern, die von der -Poisson Verteilung der registrierten Photonen herrührt.

Eine Modell-Schätzung $\tilde{u}_2$ führt zu einer Modell-Zählrate $\tilde{c}_i = \sum_j \tilde{u}_j p_{ij}$, und einer $\chi^2$ Schätzung für die Güte der Anpassung.

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(c_i - \tilde{c}_i)^2}{\tilde{c}_i}$$

Das beste Modell erhält man durch das Aufsuchen des Minimums von $\chi^2$. Im Allgemeinen ist dieses Modell jedoch sehr irregulär mit starken Schwankungen von Pixel zu Pixel. Von einem realistischen physikalischen Modell erwartet man aber ein relativ glattes Verhalten. Die üblichen Regularisierungsmethoden suchen deshalb das Minimum aus der Summe von $\chi^2$ und einer weiteren Größe, wie der Glättefunktion ($\sum \tilde{u}_j^2$) oder der Negentropie ($\sum \tilde{u}_j ln \tilde{u}_j$). Die

Richardson-Lucy Dekonvalutionsmethode bestimmt Schätzungen $\tilde{u}_j^{(r)}$ des Signals $u_j$ im Interationsschritt $r(= 1, 2 \ldots)$ gemäß

$$\tilde{u}_j^{(r+1)} = \tilde{u}_j^{(r)} \sum_i \frac{c_i}{\tilde{c}_i} p_{ij}, \tag{5}$$

mit

$$\tilde{c}_i = \sum_0 \tilde{u}_j^{(r)} p_{ij}$$

Hierbei gilt $\sum \tilde{c}_i = \sum c_i = c$, das heißt die Gesamtzählrate bleibt gleich in jedem Interationschritt.

Ein Vorschlag zur Bestimmung der statistischen Signifikanzniveaus der Inerationsmethode (Bi und Börner 1995) geht von einer bootstrap Methode aus. In jedem Iterationsschritt werden 999 zufällige Simulationen der $\tilde{c}_i$ durchgeführt und gemäß einem Punktprozeß mit Multinormalverteilung die zugehörigen "likelihood" Werte berechnet. Mit der beobachteten $M([c_i])$ gibt es insgesamt 1000 likelihood Werte, die in ansteigender Ordnung $M(1), M(2), \ldots, M(k) \ldots M(1000)$ sortiert werden. Ordnung k repräsentiert die Daten. Die Null-Hypothese besagt, daß $[c_i]$ exakt einer zufälligen Realisierung des Modells $[\tilde{c}_i]$ entspricht. Falls k=1, erscheinen die eigentlichen Daten mit niedriger likelihood, so daß die Hypothese mit einer Konfidenz von 99.9% abgelehnt werden sollte. Im Allgemeinen ist das Signifikanzniveau, die Daten in einem Modell wiederzufinden gegeben durch

$$prob = K/1000$$

Da mit der R.L. Methode die likelihood Schritt für Schritt anwächst, wächst K selbst von 0 bis 1000. Modelle mit kleinem K ($\simeq 1$) und mit großem $K(\simeq 1000)$ sollten verworfen werden: $prob \ll 1$ bedeutet einen schlechten fit und $prob \simeq 1$ bedeutet, daß die Anpassung zu gut ist, weil man auch das gesamte Poisson-Rauschen als Daten interpretiert hat. Alle Simulationen und die ROSAT Daten, die wir untersucht haben, zeigen ein Verhalten wie in Abbildung 1: Nach wenigen Iterationsschritten erreicht die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Wert und bleibt da, selbst nach vielen zusätzlichen Iterationen. Dieser Wert hängt von den $p_i \wedge$ und von der Struktur des Signals ab. Wenigstens $prob = 20\%$ sollte für ein vernünftiges Modell erreicht werden.

Als Beispiel sei das Spektrum der AGN Galaxie G0905-98, die einen Radio-Jet besitzt im Energie Bereich 0.1 keV bis 2.5keV betrachtet. Abb.2 zeigt die Rohdaten: 2178 Photonen verteilt auf die 249 Ausgabe Kanäle des ROSAT Röntgensatelliten. Die Dekonvolution geht aus von einem Anfangswert, der geglättet ist und ebenfalls 2178 Zählereignisse umfaßt. Abb.1 zeigt, wie das Signifikanzniveau anwächst. Die größte Verbesserung des Modells wird in Schritt 2 erreicht, wo die Wahrscheinlichkeit steil ansteigt - von 3% auf 25%. Nach Schritt 2 werden die Anpassungen an die Daten nur noch sehr langsam verbessert. Abb. 3 zeigt das dekonvolvierte Röntgenspektrum nach Schritt 2.

# 3 Kosmologie - Die Ausdehnung des Weltalls

Das moderne Bild vom Kosmos ruht im Wesentlichen auf zwei fundamentalen Beobachtungen, der Entdeckung des amerikanischen Astronomen Edwin P. Hubble in den zwanziger Jahren, daß sich fast alle fernen Galaxien von uns wegbewegen, und der Messung eines kosmischen Strahlungsfeldes in Mikrowellenbereich durch Arno Penzias und Robert Wilson im Jahre 1964 (s. etwa Börner 1993). Hubble fand, daß fast jede Galaxie (außer einigen sehr nahen) eine Verschiebung z ihrer Spektrallinien zu größeren Wellenlängen zeigt gemäß $\lambda_b = \lambda_e(1+z)$, die umso größer ist, je weiter die Galaxie entfernt ist ($\lambda_b$ ist die beobachtete, $\lambda_e$ die ausgesandte Wellenlänge). Die Erklärung dieser Rotverschiebung durch den Dopplereffekt führt zu dem Schluß, daß die Galaxien sich von uns entfernen. Die Rate dieser Fluchtbewegung ist die "Hubble-Konstante" $H_0$

$$cz = v = H_0 d, \tag{6}$$

die das Anwachsen der Fluchtgeschwindigkeit v mit der Entfernung d angibt. c ist die Lichtgeschwindigkeit. Die Astronomen geben die Entfernung d in Megaparsec, das heißt in Einheiten von ca. 3 Millionen Lichtjahren an, und $H_0$ in Einheiten $kms^{-1}Mpc^1$. Der Kehrwert der Hubble-Konstanten $H_0^{-1}$ entspricht einer charakteristischen Zeitspanne, die nach heutigen Messungen zwissen 11 und 17 Milliarden Jahren beträgt. Dies ist etwa auch der Wert, den man für das Alter der ältesten Sterne findet: $t_0 = 10$ bis 14 Milliarden Jahre. In den nach Friedmann und Lemaitre benannten kosmologischen Modellen verändern sich die Abstände zwischen Galaxien, die exakt der kosmischen Ausdehnung folgen, proportional zu einer Funktion R(t). Die Hubble-Konstante entspricht der Rate dieser Expansion

$$H_0 = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\,|_{t=t_0}$$

zum jetzigen Zeitpunkt $t_0$. $t_0$ entspricht dem Weltalter. Zur Festlegung eines bestimmten kosmologischen Standardmodells benötigt man außer $H_0$ und $t_0$ noch eine Größe. Geeignet ist etwa der Dichteparameter $\Omega_0$, der die mittlere Massendichte $\varrho_0$. als dimensionslose Zahl darstellt:

$$\Omega_0 \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2}\varrho_0 \tag{7}$$

(G: Gravitationskonstante)

Zusätzlich gibt es in den Modellen noch die Freiheit eine entsprechende dimensionale Zahl $\Omega_\Lambda$ zur Charakterisierung einer evtl. vorhandenen kosmologischen Konstanten einzuführen. In den FL-Modellen ist das Produkt $t_0 H_0$ eine Funktion von $\Omega_0$ und $\Omega_\Lambda$. Im Prinzip können also unabhängige astronomische Bestimmungen dieser via Größen auch zu einem Test für das Modell führen.

Die Hubble-Konstante präzise zu messen ist schwierig, denn alle Galaxien weisen zufällig Eigenbewegungen von einigen 100 $kms^{-1}$ auf, da sie zumeist in größeren Strukturen eingebunden sind, deren Gravitationsfeld ihre Bewegung beeinflußt. Dies wirkt sich besonders für nahe Objekte aus, während bei weit entfernten Galaxien die Expansionsbewegung völlig überwiegt. Bei diesen allerdings sind die Entfernungsbestimmungen sehr ungenau. Die Form (6) des Hubble-Gesetzes ist eine lineare Näherung an die Beziehung, die in FL-Modellen zwischen z,$H_0, \Omega_0, \Omega_\Lambda$ und einem geeignet zu definierenden Entfernungsbegriff besteht. Üblicherweise definiert man die Entfernung d über das quadratische Abstandsgesetz der Abnahme der Leuchtkraft L einer Quelle: $4\pi d^2 = L/F$; hier ist F der von der Quelle registrierte Energiefluß. F, z sind meßbar, während d eine abgeleitete Größe darstellt. Die Astronomen versuchen nun sich einen Satz von Galaxien zu verschaffen, von denen F und z gemessen werden, um daran die Beziehung (6) zu testen.

Ein wesentlicher Auswahleffekt beruht darauf, daß mit einem bestimmten Teleskop oder Detektor während der Beobachtungszeit nur Objekte entdeckt werden können, deren Energiefluß eine bestimmte Schwelle überschreitet. Während in der Nähe auch viele leuchtschwache Objekte über die vorgegebene Schwelle kommen, werden bei großen Enfernungen nur noch diejenigen mit sehr großer Leuchtkraft registriert. Der Energiefluß, der von einer Quelle empfangen wird, wird als "scheinbare Helligkeit" bezeichnet. Die Astronomen benützen eine altehrwürdige Maßeinheit für die scheinbare Helligkeit, die Einteilung nach "Größenklassen (magnitudo)". Dies ist eine logarithmische Skala für den Energiefluß, die schon von Hipparchos, einem Astronomen im antiken Griechenland verwendet wurde. Es gibt eine ganze Reihe von Systemen, aber alle geben die Größenklasse m an durch eine Beziehung der Art

$$m = m_0 + 2.5 log F_0/F \tag{8}$$

$m_0$ ist ein geeignet festgesetzter Bezugspunkt für das $F_0$ den entsprechenden Energiefluß darstellt. Eine Verringerung der Größenklasse um 5 entspricht einem Faktor 100 im Energiefluß. Auch eine absolute Größenklasse $M = M_0 = 2.5 log L_0/L$, als logarithmische Skala für die Leuchtkraft ist in Gebrauch. Die absolute Größe M ist die scheinbare Helligkeit des Objektes in einer Entfernung um 10parsec. Wird die Entfernung d in parsec gemessen, so ist:

$$m - M = 5 log d/10 \tag{9}$$

oder äquivalent

$$d = 10^{1+0.2(m-M)}$$

Die Kataloge, resp. Datensätze von Galaxien, etc. sind üblicherweise flußlimitiert, wie bereits erläutert, d.h. sie enthalten nur Objekte mit $m < m_c$. Diese m-Abschneidung, der sogenannte Malmquist-Effekt, hat natürlich drastische Auswirkungen auf die statistische Analyse, z. B. mittels linearer Regression. Dies ist in Abb. 4 schematisch gezeigt. Daten, die gleichmäßig in der Ellipse im (m, logcz) Diagramm streuen, ergeben eine deutlich veränderte Regressionskurve, falls eine Abschneidung $m < m_c$ vorhanden ist, und der Mittelwert m bei festem z gesucht wird. Die astronomische Erklärung ist einfach: In den entfernten Regionen werden zunehmend die lichtschwächeren Objekte übersehen und damit wird der Mittelwert (bei festem z) auf kleinere m Werte als der echten

Gesamtheit entspräche, konzentriert. Die Entfernungen der hellen Galaxien werden also systematisch unterschätzt. Das lineare Hubble Gesetz (6) liefert:

$$m - M = 5 log cz - 5 log H_0 + 25 \tag{10}$$

Allgemein können wir schreiben

$$m = M + f(z) \tag{11}$$

und uns fragen, ob die Funktion f(z) aus einem Satz von Beobachtungen $(m_i, z_i)$ bestimmt werden kann. Im Rahmen der FL-Modelle ist f(z) eine gegebene Funktion, die neben $H_0, z$ auch von $\Omega_0$ und $\Omega_\Lambda$ abhängt. Unter Astronomen sehr beliebt ist die Suche nach "Standardkerzen", d.h. Objekten mit einem festen $M = M_0$, die bei verschiedenen Entfernungen und Rotverschiebungen beobachtet werden können. Damit läßt sich natürlich die Relation (10) oder (11) durch Regressionsanalyse bestimmen; die Ellipse in Abb.4 wäre in diesem Fall in eine Gerade entartet. Man kann aber nie ganz sicher sein, ob man wirklich Standardkerzen vor sich hat und in der Geschichte der Astronomie gibt es eine Reihe von vergeblichen Versuchen solche Objekte zu identifizieren. Gegenwärtig glaubt man mit einiger Berechtigung in den Supernovae vom Typ Ia Standardkerzen zur Verfügung zu haben, mit denen das Hubble Gesetz und auch schon Anzeichen einer Abweichung von der Linearität beobachtet werden konnten.

Im Allgemeinen weisen die M-Werte eine Streuung innerhalb der betrachteten Gesamtheit von Objekten auf; sie sind gemäß einer Leuchtkraftfunktion $\phi(M)$ verteilt (evtl. auch $\phi(M, z)$, wenn Entwicklungseffekte wichtig sind). Damit erhalten wir für den Mittelwert von m bei festem z, $E(m \mid z)$ (Segal und Nicoll 1976).

$$E(m \mid z) = \frac{\int_{-\infty}^{m_c} m\phi(m - f(z))dm}{\int_{-\infty}^{m_c} \phi(m - f(z))dm} \tag{12}$$

Für das lineare Hubble Gesetz ist

$$f(z) = 5 log cz - 5 log H_0 + 25 \tag{13}$$

Es war eine lange Zeit ungelöste Frage, ob man aus einem Satz von Beobachtungen $(m_i, z_i)$ sowohl die Verteilung $\phi(M)$, als auch die Form von f bestimmen kann. Inzwischen weiß man, daß dies möglich ist (Woodroofe 1985). Die Qualität der Schätzer ist allerdings schlecht und auch die astronomischen Datensätze weisen statistisch betrachtet Mängel auf. Allerdings hat sich eine ganz amüsante Kontroverse entwickelt zwischen dem astronomischen Establishment (etwa Sandage et al 1979) und dem Mathematiker Segal (Segal 1989).

Während für das Hubble Gesetz gilt f(z)$\sim$ 5logz, erhält Segal aus einer (sicherlich etwa exotischen) Chronometrischen Theorie $f(z) \sim 5/2 log(\frac{z}{1+z})$. Interessanterweise findet nun Segal in den von ihm untersuchten Datensätzen eine bessere Anpassung an sein f(z), als an das übliche Hubble Gesetz. Das Etablishment wirft ihm vor, den Malmquist-Effekt nicht richtig zu behandeln. Die Kontroverse wurde von Ullmann (Ullmann 1997) näher untersucht. Es zeigte sich, daß Segal eine nichtparametrische Methode benützt, um (12) auszuwerten. Diese Methode entspricht dem Algorithmus, den Lynden-Bell für Verteilungen mit Abschneidungen (Lynden-Bell 1971) konstruiert hat. Im Wesentlichen ist dies die Konstruktion des Histogramms einer abgeschnittenen Stichprobe ($m < m_c$). Dabei wird die zu bestimmende Leuchtkraftfunktion $\phi(M)$ durch eine Stufenhöhe rekursiv bestimmt. Die Annahme ist natürlich, daß auch im abgeschnittenen Teil der Stichprobe das gleiche $\phi(M)$ gilt. Dieses Verfahren korrigierte gerade die Abschneidung $m < m_c$, also den Malmquist-Effekt. In den astronomischen Datensätzen gibt es aber noch andere Abschneide- und Auswahleffekte, die nicht korrigiert werden. Dies scheint die Ursache für das kontroverse Resultat Segals zu sein. Aus dieser Kontroverse können wir aber auch lernen, daß viele astronomische Stichproben ungeeignet für die Analyse gemäß (12) sind. Die Astronomen können daraus trotzdem Hubble-Gesetz und die Hubble-Konstante bestimmen, weil sie wissen wie f(z) aussehen muß und wie sich die unbeobachtbaren Galaxien verhalten.

# 4 Kosmologie-Gravitationslinsen

Arthur Eddingtons berühmte Expedition zur Sonnenfinsternis von 1919 brachte zum ersten mal eine Messung der Lichtablenkung durch einen Himmelskörper. Dies bestätigte eine Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie und führte dazu, daß Einsteins Name praktisch jedermann geläufig wurde. Wenn ein Photon nahe an der Sonne oder an irgend einem anderen genügend massereichen System im Vordergrund – gleichültig ob sichtbar oder unsichtbar vorbeifliegt, so wird seine Bahn durch die Schwerkraft gekrümmt, und die Quelle erscheint an einer etwas abgeänderten Position. Im Falle einer Punktmasse M, an der das unabgelenkte Photon im Abstand b vorbeifliegen würde ergibt sich als Beugungswinkel:

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} \tag{14}$$

Die Lichtablenkung am Rand der Sonne ist $\alpha = 1.7$ Bogensekunden. In Abbildung 5 sind die Verhältnisse für den allgemeinen Fall einer Gravitationslinsenabbildung schematisch dargestellt. (dies und der folgende Text nach Bartelmann und Narayan 1998). Der wahre Winkelabstand zwischen einer fernen Galaxie und dem Zentrum der Gravitationslinse ist$\underline{\beta}$ (ein zweikomponentiger Vektor in der Himmelsebene mit dem Betrag $\beta$). Wegen der Lichtablenkung erscheint die Hintergrundgalaxie für uns bei der größeren Winkeldistanz $\underline{\theta}$. Die Massenverteilung der Linse ist entlang der Sichtlinie projiziert - und wegen der geringen Ausdehnung der Linse entlang des Lichtweges, kann man sie in guter Näherung durch die Massenverteilung in einer Ebene senkrecht zur Sichtlinie approximieren. Diese flache Linse ist charakterisiert durch ihre Oberflächendichte

$$\Sigma(\underline{\xi}) = \int \rho(\underline{\xi}, z) dz \tag{15}$$

($\rho$: Massendichte, z:Entfernung längs des ungestörten Lichtstrahls)

Der Ablenkungswinkel an der Stelle $\underline{\xi}$ ergibt sich als Summe über alle Massenelemente in der Linsenebene. Im Allgemeinen ist dieser Winkel ein zweikomponentiger Vektor. Im Spezialfall einer symmetrischen Linse ist sein Betrag gegeben durch

$$\alpha\wedge = \frac{4GM(\xi)}{c^2\xi},$$

wobei $M(\xi)$ die Masse innerhalb des Radius $\xi$ ist

$$M(\xi) = 2\pi \int_0^{\xi} \Sigma(\xi')\xi' d\xi'$$

In Abbildung 5 sind die Entfernungen zwischen Quelle und Beobachter, Beobachter und Linse, sowie Linse und Quelle jeweils mit $D_s$, $D_d$, und $D_{ds}$ bezeichnet. Die Positionen von Quelle und Bild um Himmel sind durch die einfache Gleichung:

$$\underline{\beta} = \underline{\theta} - \frac{D_{ds}}{D_s}\underline{\alpha}\wedge \tag{16}$$

gegeben. Eine Quelle, die genau auf der optischen Achse liegt, wird als Ring abgebildet, mit dem Radius:

$$\theta_E = [\frac{4GM(\theta_E)}{c^2}\frac{D_{ds}}{D_d D_s}]^{1/2} \tag{17}$$

Dieser "Einstein" Radius ist natürlich ein Idealfall, der im Allgemeinen nicht zu sehen ist. Bruchstücke, d.h. große Bögen am Himmel als Bilder ferner Galaxien wurden allerdings beobachtet.

Als Beispiel betrachten wir die Linsenabbildung durch ein Objekt in der Milchstraße mit $M \sim M_\odot$ und $D \sim 10kpc$, sowie die Abbildung durch einen Galaxienhaufen mit $M \sim 10^{14} M_\odot$ und $D \sim 1Gpc = 10^9 pc$

$$\theta_E = (0.0009'')(M/M_\odot)^{1/2}(\frac{D}{10kpc})^{-1/2}$$

$$\theta_E = (30'')(M/10^{14}M_\odot)^{1/2}(D/1Gpc)^{-1/2}$$

Die Linsengleichung (16) ist im allgemeinen Fall nichtlinear mit mehreren Bildern $\underline{\theta}$ einer einzigen Quellposition $\underline{\beta}$. Deshalb ist sie nicht einfach zu invertieren, um aus Beobachtungen Eigenschaften der Quelle zu erschließen. Im allgemeinen Fall wird das Licht von einer kreisförmigen Quelle sowohl isotrop fokussiert – was zu einer Vergrößerung führt – wie auch zu einem elliptischen Bild verzerrt. Diese Abbildungseigenschaften einer Linse können durch Konvergenz $\kappa(\theta)$ und Scherung $(\gamma_1(\underline{\theta}), \gamma_2(\underline{\theta}))$ beschrieben werden. Dabei gilt:

$$\Sigma(\theta) = \frac{c^2}{4\pi G}\frac{D_s}{D_d D_{ds}}\kappa(\theta) \tag{18}$$

Diese Größen lassen sich aus den Ableitungen eines sogenannten "effektiven" Linsenpotentials $\psi(\underline{\theta})$ gewinnen:

$$\psi(\underline{\theta}) = \frac{D_{ds}}{D_d D_s}\frac{2}{c^2}\int \phi(D_d\underline{\theta}, z)dz \tag{19}$$

($\phi$: Newtonsches Potential der Massenverteilung der Linse) (Nur der Vollständigkeit halber

$$\kappa(\underline{\theta}) = 1/2(\psi,_{11} + \psi,_{22})$$
$$\gamma_1(\underline{\theta}) = 1/2(\psi,_{11} - \psi,_{22})$$
$$\gamma_2(\underline{\theta}) = \psi,_{12}$$
$$\left(\psi,_{ij} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)$$

Es besteht also eine mathematische Beziehung zwischen $\kappa$ und dem Scherungsfeld $\underline{\gamma}$; diese läßt sich als Konvolutionsintegral im $\underline{\theta}$–Raum darstellen:

$$\kappa(\underline{\theta}) = \frac{1}{\pi}\int d^2\theta' Re[D^*(\underline{\theta} - \underline{\theta}')\gamma(\underline{\theta}')] \tag{20}$$

mit

$$D(\underline{\theta}) \equiv \theta^{-4}[\theta_2^2 - \theta_1^2 - 2i\theta_1\theta_2]$$

und

$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$$

Dies ist ein klassisches inverses Problem. Die Scherung einer Linsenabbildung kann nämlich bestimmt werden aus der elliptischen Verformung von Hinergrundgalaxien. Die Elliptizität eines Bildes kann definiert werden als:

$$\epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2 = \frac{1-r}{1+r}e^{2i\phi}; r = b|a$$

$\phi$ ist der Winkel entlang der Ellipse, b die große a die kleine Halbachse. Die mittlere Elliptizität, die durch eine Gravitationslinsenabbildung erzeugt wird ist:

$$< \epsilon > = < \frac{\gamma}{1-\kappa} > \tag{21}$$

$< ... >$ bezeichnet Mittelwerte über eine endliche Fläche am Himmel. Bei der Abbildung ferner Hintergrundgalaxien durch einen massereichen Haufen im Vordergrund gilt i.a. $\kappa \ll 1 und \mid \gamma \mid \ll 1$. Dann ist die Scherung direkt durch die mittlere Elliptizität gegeben.

$$< \gamma_1(\underline{\theta}) > \simeq < \epsilon_1(\underline{\theta}) >, < \gamma_2(\underline{\theta}) > \simeq < \epsilon_2(\underline{\theta}) >,$$

Die Felder $\gamma_i(\underline{\theta})$ werden im Faltungsintegral (19) eingesetzt, um $\kappa(\underline{\theta})$ und schließlich $\Sigma(\underline{\theta})$ zu bestimmen. Die tatsächliche Messung von $< \epsilon_i >$ erfordert die Mittelung über viele leicht verzerrte Bilder um ein Signal, das deutlich über dem

Rauschpegel liegt, zu erhalten (Kaiser und Squires 1993; Seitz und Schneider 1996, Bartelmann 1995). In Abb. 6 und Abb.7 wird das Verfahren illustriert. Beide Abbildungen sind aus Simulationsrechnungen gewonnen (Ich danke meinem Kollegen Matthias Bartelmann, der mir diese Bilder zur Verfügung gestellt hat). Die Hintergrundgalaxien bei einer Rotverschiebung von z=1 mit einer Flächendichte von 40 pro $(Bogenminute)^2$ sind abgebildet durch einen Galaxienhaufen bei z=0.3 mit einer Masse $M = 5.10^{14} M_{\odot}$(Abb.6). Eine numerische Simulation beruhend auf Modellen für kalte Dunkle Materie wurde benützt. In Abb. 7 wird das Massenprofil des Galaxienhaufens, wie es aus der Rekonstruktionsmethode gewonnen wird, mit dem "wirklichen" aus der Simulation verglichen. Es ist klar, daß diese Methode, die Gravitationslinsenabbildung zu invertieren, einen sehr vielversprechenden Weg zur Vermessung kosmischer Massenkonzentrationen eröffnet.

# 5 Unsichtbar und doch meßbar: Statistische Beschreibungen der Galaxienverteilung

Es ist ein großes Ziel der Kosmologen, die Verteilung und Entwicklung der kosmischen Materie im Detail zu verstehen. Die grundlegenden Bausteine der sichtbaren Materie im Universum sind die Galaxien, und deren Verteilung am Himmel wird durch astronomische Beobachtungen ständig genauer und umfassender erschlossen. Die Position am Himmel und die Rotverschiebung des Spektrums werden dabei für möglichst viele und möglichst weit entfernte Galaxien sehr präzise bestimmt. Die Rotverschiebung einer Galaxie, die der kosmischen Expansion folgt, ist proportional zur Entfernung. Damit läßt sich aus den Meßdaten ein dreidimensionales Bild der Galaxienverteilung rekonstruieren. In Abbildung 8 ist eine "'Rotverschiebungskarte" des neuesten, allgemein zugänglichen Datensatzes, des "'Las Campanas Redshift Survey" (LCRS) dargestellt. Deutlich sind in der Punktverteilung (jeder Punkt steht für eine Galaxie) ausgeprägte Strukturen zu erkennen: dichte Haufen von Galaxien und ein Netzwerk aus dünnen Schichten und Filamenten, die große, fast leere Bereiche umschließen. Die Muster, die hier zu sehen sind, zeigten sich auch schon in früheren Messungen. In dem größeren Bereich, der vom LCRS erfaßt wird, erscheinen sie vielfach wiederholt. Obwohl die Analyse dieses Datensatzes noch nicht vollständig durchgeführt ist — auch eine Gruppe am MPA beschäftigt sich damit — läßt sich als vorläufiges Ergebnis feststellen, daß in verschiedenen, großen Volumina die Verteilung der Galaxien praktisch identisch ist. Diese Gesamtheit von etwa 30 000 Galaxien überdeckt offensichtlich einen Bereich, der typische Züge des Kosmos widerspiegelt.

Die theoretischen Ansätze zur Erklärung der großräumigen Strukturen in der Galaxienverteilung stehen auf etwas schwankenden Fundamenten, denn sie müssen eine grundlegende Ungewißheit über die Zusammensetzung der kosmischen Materie in Kauf nehmen: Aus den Beobachtungen häufen sich die Hinweise auf die Existenz einer nichtleuchtenden, "'dunklen" Komponente der kosmischen

Materie, die mit einem Anteil von 90%, oder sogar 99%, bei weitem überwiegen könnte. Die Zusammensetzung der dunklen Materie ist noch unbekannt — es gibt ein breites Spektrum exotischer Elementarteilchen, die als theoretische Kandidaten geeignet wären, aber leider bisher keine experimentellen Befunde. Die Kosmologen müssen mit der beunruhigenden Tatsache leben, daß sie nicht wissen, was die dominante Materiekomponente im Universum ist. Um diese Wissenslücke auszugleichen, diskutieren sie eine Vielzahl hypothetischer Fälle und untersuchen die Konsequenzen für die kosmische Strukturbildung.

Die Konstruktion theoretischer Modelle allein für die dunkle Materie hat den Vorteil, daß diese Teilchen nur durch ihre Schwerkraft miteinander wechselwirken und ihre Energie nicht in Wärme oder Strahlung umsetzen können. Es genügt also, von plausiblen Anfangsbedingungen ausgehend allein die Dynamik der gravitativen Wechselwirkung zu verfolgen. Man hofft, so zu einem Endzustand zu gelangen, der wesentliche Züge der beobachteten Verteilung wiedergibt. Kleine Dichtekontraste werden im expandierenden Kosmos durch die Wirkung der Schwerkraft verstärkt. Raumbereiche, die etwas mehr Masse als der Durchschnitt enthalten, bleiben gegenüber der allgemeinen Expansion etwas zurück und bilden schließlich Klumpen oder stark verdichtete Halos, aber der katastrophale Kollaps des ganzen Systems auf Grund seiner Eigengravitation wird durch die kosmische Expansion verhindert. Im allgemeinen entsteht ein reich strukturiertes Muster von Materieverdichtungen. Spezielle Eigenschaften dieser Strukturen werden bestimmt durch das kosmologische Hintergrundmodell (mittlere Dichte, mittlere Expansionsrate, Alter) und durch die Anfangsbedingungen für die Verteilung der dunklen Materie, speziell die Amplituden der Dichteschwankungen auf verschiedenen Skalen.

In Abbildung 9 sind die Resultate einer derartigen Modellrechnung aufgetragen, ganz analog zu der Darstellung der LCRS Daten in Abbildung 8. Die Anfangsbedingungen werden dabei realisiert durch eine zufällige Verteilung von Massenpunkten auf dem Gitter, mit der Eigenschaft, daß im Mittel ein vergebenes Leistungsspektrum von Dichteschwankungen wiedergegeben wird. In Abb. 9 ist also eine zufällige Realisierung der Massenkonzentrationen - genauer in einem Modell der Kalten Dunklen Materie (CDM)–dargestellt. Die beiden Bilder sehen ähnlich aus, obwohl die "Galaxien" im theoretischen Modell "Pseudo–Galaxien" sind, geeignet ausgewählte Konzentrationen der dunklen Materie. Die Betrachtung der Bilder allein genügt natürlich nicht. Da der subjektive Eindruck auch täuschen kann, muß eine quantitative statistische Beschreibung dieser Muster gegeben werden. Eine einfache Charakterisierung des Bestrebens der Galaxien sich in Haufen und größeren Gebilden zu konzentrieren, kann bereits erreicht werden, indem alle Nachbarn im Abstand $r$ von einer beliebig ausgewählten Galaxie gezählt werden. Die Anzahl der Nachbarn wird für jede Galaxie bestimmt, und dann der Mittelwert berechnet. Schließlich bestimmt man das Verhältnis zum entsprechenden Ergebnis für eine zufällig verteilte Gesamtheit von Galaxien. Dieselbe Prozedur führt man für verschiedene Abstände $r$ durch und erhält auf diese Weise eine sogenannte "Zweipunkt–Korrelationsfunktion". Die Form dieser Funktionen entspricht nahezu einem einfachen Potenzgesetz.

$w(r) = (r_0/r)^\gamma$, wobei

$$w(r)r_0 = (5.01) \pm 0.05)h^{-1}Mpc, h \equiv H_0/100 \tag{22}$$

$\gamma = 1.825 \pm 0.018$.

Sie messen die Tendenz zur Haufenbildung auf verschiedenen Skalen und sind deshalb auch ein wichtiges Hilfsmittel beim Vergleich von Theorie und Beobachtung.

In Abbildung 10 sind in der linken Hälfte die Resultate von CDM Modellen mit den Messungen am LCRS verglichen. Die Simulationen sind mit einem $P^3M$ Code gerechnet in dem $(128)^3$ Teilchen verfolgt wurden. Es wurden mit demselben Anfangsspektrum 3 verschiedene kosmologische Modelle betrachtet mit $\Omega_0 + \Omega_\Lambda = 1$, und $\Omega_0 = 0.2, 0.3$ und 1. Zu jedem Modell wurden 6 Realisierungen gerechnet. (Jing et al 1998).

Die quantitative Auswertung zeigt Unterschiede in den Zweipunkt–Korrela tionsfunktionen bei kleinen Abständen, d.h. die wirklichen Galaxien sind etwas anders verteilt als die Modell–Objekte. Diese Tatsache, daß die dunkle Materie nicht genau die Verteilung der leuchtenden Galaxien nachzeichnet, wird in den Modellen berücksichtigt durch die Einführung eines "bias"–Parameters — einer ad hoc Vorschrift, wie bestimmte Konzentrationen der dunklen Materie mit Galaxien gleichzusetzen sind, so daß die Zweipunkt–Korrelationen übereinstimmen. Eigentlich sollte der "bias" durch die Physik der Galaxienbildung festgelegt sein, aber solange diese Prozesse nur unzureichend beschrieben werden können, bleibt diese zusätzliche Freiheit.

Außer den Mustern von Haufen und Superhaufen geben auch die Eigenbewegungen der leuchtenden Galaxien Hinweise auf die Struktur der dunklen Materie. Die Galaxien folgen im Mittel der gleichförmigen Hubble-Expansion, doch gibt es Abweichungen, die durch das Gravitationsfeld von Massenkonzentrationen, der leuchtenden wie der dunklen Materie, verursacht werden. Die Geschwindigkeitsfelder dieser Eigenbewegungen geben ein detailliertes Bild der gesamten Massenverteilung. In den Rotverschiebungskarten, wie in Abbildung 8, erscheinen sie als leichte Verzerrungen: Kompakte Zusammenballungen von Galaxien sind in Richtung auf den Beobachter in die Länge gezogen. Diese "Finger Gottes" werden durch die zufälligen Geschwindigkeiten in einem Haufen, in dem sich Schwerkraft und Eigenbewegungen die Balance halten, hervorgerufen. Eine Galaxie, die sich auf den Beobachter zubewegt, wird im Rotverschiebungsraum näher placiert, als es ihrer wirklichen Entfernung entspräche; einer Galaxie, die sich vom Beobachter wegbewegt wird demgemäß eine größere Rotverschiebungs–Entfernung zugeschrieben.

Die Geschwindigkeiten in der Umgebung einer Massenkonzentration, etwa eines Galaxienhaufens, können nur dann direkt analysiert werden, wenn es gelingt zusätzlich zu den Rotverschiebungen der Spektrallinien die wirklichen Entfernungen der Galaxien zu bestimmen. Dazu benützen die Astronomen Relationen zwischen photometrischen Eigenschaften, wie der Breite einer bestimmten Spektrallinie, und der Leuchtstärke einer Galaxie. Diese Beobachtungen kosten viel Zeit und deshalb wurden bisher nur einige hundert Galaxien auf diese Weise vermessen. Das Ergebnis ist trotzdem beeindruckend: Ein groß es System aus Galaxien und Haufen bewegt sich auf eine, noch nicht genau bekannte Masse zu, die verdientermaßen den Namen "Der Große Attraktor" erhielt.

Der Effekt von Eigenbewegungen kann allerdings im allgemeinen nicht so detailliert erfaßt werden: Da durch diese Bewegungen die Positionen der Galaxien längs der Sichtlinie verschoben werden, weist die Zweipunkt–Korrelationsfunktion im Rotverschiebungsraum eine leichte Unsymmetrie auf. Sie hängt nicht allein vom Abstand je zweier Galaxien ab, sondern sowohl vom Abstand parallel $\pi$, wie auch senkrecht zur Sichtlinie $r_p$. Diese Asymmetrie läßt sich, sofern die Daten von ausreichender Präzision sind, auswerten und mit der mittleren Geschwindigkeitsdifferenz von Galaxienpaaren in Beziehung bringen. Die Zweipunktkorrelation im Rotverschiebungsraum $\xi_z(r_p, \pi)$ wird dargestellt als das Faltungsintegral der räumlichen Zweipunktkorrelation $\xi(r)$ mit der Verteilungsfunktion $f(v_{12})$ der Relativgeschwindigkeit (von Galaxienpaaren) entlang der Sichtlinie:

$$1 + \xi_z(r_p, \pi) = \int f(v_{12}) \xi(\sqrt{r_p^2 + (\pi - v_{12})^2}) dv_{12} \tag{23}$$

$\xi(r)$ wird nach dem Integral von $\xi_z$ über $\pi$ modelliert. Die (eigentlich unbekannte) Funktion $f(v_{12})$ wird auf Grund von Simulationsresultaten, analytischen Modellen und Beobachtungshinweisen als Exponentialfunktion angesetzt:

$$f(v_{12}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{12}} exp(\frac{-\sqrt{2}}{\sigma_{12}} \mid v_{12} - < v_{12} > \mid) \tag{24}$$

$\sigma_{12}(r_p)$ ist die gesuchte Geschwindigkeitsdispersion. Für den Mittelwert $< v_{12} >$ werden verschiedene plausible Modelle gewählt.

Ähnlich wie die direkte Messung der Eigenbewegungen erlaubt auch diese gemittelte Größe Rückschlüsse auf die Klumpungseigenschaften der Materie. So schätzten 1983 Davis and Peebles die mittlere Geschwindigkeitsdifferenz $\sigma_{12}$ für die erste CfA Durchmusterung ab. Ihre Auswertung führte zu einem Wert, der weit unter den Resultaten numerischer Simulationen lag. Zehn Jahre lang bestand diese Diskrepanz, aber dann konnte gezeigt werden, daß die Paargeschwindigkeit in verschiedenen astronomischen Datensätzen enormen Schwankungen unterlag und daß auch wesentlich größere Werte auftraten.

Jetzt konnte diese Größe ebenfalls aus dem LCRS bestimmt werden(Jing et al 1998). In Abb. 10 sind in der rechten Hälfte die Werte für 3 verschiedene kosmologische Modelle aufgetragen. Bei einem Abstand von $1h^{-1}Mpc$ ergibt sich ein Wert von $\sigma_{12} = (570 \pm 80) kms^{-1}$ aus den Daten. Die theoretischen Modelle ergeben immer noch etwas höhere Werte. Ein Modell, bei dem die statistische Gewichtung der "Pseudogalaxien" aus dunkler Materie verringert wird durch einen Faktor $M^{-\alpha}$, wenn M die Masse des Galaxienhaufens ist, in dem sich die "Pseudogalaxie" befindet, liefert eine verbesserte Anpassung an die Daten (Abb. 11). Am besten scheint das Modell mit $\Omega_0 = 0.2$ zu passen.

**Abb. 1:** Die Signifikanz-Niveaus der Iterationsschritte bei der Richardson-Lucy Dekonvolution eines ROSAT 1-D Spektrums (s.Abb.2) Nach dem 2. Schritt verbessert sich die Anpassung nur sehr langsam.

**Abb. 2:** Zählraten des ROSAT Spektrums der Röntgenquelle G0905–098. Die durchgezogene Kurve entspricht Iterationsschritt 2 der R-L Dekonvolution.

**Abb. 3:** Das rekonstruierte Röntgenspektrum

**Abb. 4:** Die Änderung der Regressionsgeraden für $(m \mid z)$ wird hier für rechtsseitige Abschneidung von (m,z) Daten schematisch dargestellt.

**Abb. 5:** Schematische Darstellung des Strahlengangs in einer Gravitationslinse.

**Abb. 6:** Elliptische verzerrte Hintergrundgalaxien von einem Galaxienhaufen im Vordergrund. Die numerische Simulation wurde freundlicherweise von Herrn M. Bartelmann zur Verfügung gestellt. Die Hintergrundgalaxien befinden sich bei z=1, der Galaxienhaufen bei z=0.3. Die Flächendichte der Galaxien beträgt 40 pro $(Bogenmin.)^2$ Die Masse des Haufens $M = 5 \times 10^{14} M_{\odot}$.

**Abb. 7:** Vergleich des rekonstruierten mit dem tatsächlichen Massenprofil des Haufens (auch dieses Bild verdanke ich M. Bartelmann).

**Abb. 8:** Die Galaxienverteilung der LCRS Durchmusterung in der nördlichen galaktischen Hemisphäre. Die Galaxien wurden in drei verschiedenen Streifen, entsprechend kleinen Intervallen der Deklination (Breite auf der Himmelskugel) beobachtet, die im Bild aufeinander projiziert wurden. Als Koordinaten sind die 'Rektaszension' (eine Längenkoordinate auf der Himmelskugel) und die Rotverschiebung aufgetragen, hier als Fluchtgeschwindigkeit, die man durch Multiplikation der Rotverschiebung mit der Lichtgeschwindigkeit (300000 km/s) erhält.

**Abb. 9:** Hier ist das Resultat einer numerischen Simulation dargestellt. Ausgewählte Punkte, die einem Bereich hoher Konzentration von Teilchen der dunklen Materie entsprechen, sind in gleicher Weise wie die LCRS Beobachtungen in Abbildung 8 aufgetragen.

**Abb. 10:** Die linke Hälfte zeigt die Zweipunktkorrelationsfunktionen. Dreiecke mit Fehlerbalken sind die LCRS Daten. Mittelwerte und $1-\sigma$ Grenzen der CDM Modelle sind durch dicke bzw. dünne Linien dargestellt. Die gestrichelten Linien im Kästchen links unten entsprechen einer Multiplikation der $\Omega_0 = 1$ Werte mit einem Faktor 2.6. Die rechte Hälfte zeigt die Geschwindigkeitsdispersion von Galaxienpaaren. Dicke und dünne Linien entsprechen wieder den Mittelwerten und $1\sigma$ Schwankungsbreiten. Durchgezogene und gestrichelte Linien gehören zu verschiedenen Modellen für den Erwartungswert der Paargeschwindigkeit$< v_{12} >$. Die offenen Kreise geben das LCRS Resultat wieder, falls $< v_{12} >$ direkt aus der numerischen Simulation abgelesen wird; Dreiecke falls für $< v_{12} >$ ein selbstähnlicher Ansatz gemacht wird.

**Abb. 11:** Wie Abb.10 aber mit einer Reduzierung $\alpha M^{-\alpha}$ der Gewichtung von Modellgalaxien in Haufen der Masse M.

# References


[1] Bi H.G, Börner G, 1994, Astrophys. J.Supp. **108**

[2] Börner G., 1993, The Early Universe-Facts and Fiction (3rd Edition, Springer Verlag)

[3] Grott R., 1993 Nature **363**, 315.

[4] Hulse R.A., Taylor J.H., 1975, Astrophys. J. **195**, L51

[5] Leslie J., 1996, The End of the World, (Rutledge)

[6] Lucy L., 1974, Astron. J. **79**, 745

[7] Lynden-Bell D., 1971, M.N.R.A.S.**155**, 95

[8] Richardson W.H., 1972, J. Opt. Soc. Am. **62**, 55

[9] Sandage A., Tammann G.A., Yahil A., 1979, Astrophys. J.**232** 352

[10] Segal I.E., 1989, M.N.R.A.S. **237** 17

[11] Segal I.E., Nicoll J.F., 1980, Astron. Astrophys. **82**, L3

[12] Ullmann O., 1997, Dissertation, Uni-München,

[13] Woodroofe M., 1985, Annals Statist. **13**, 163